# VEKTORANALYSIS

## TEIL I

SIEGFRIED PETRY

Fassung vom 25. Januar 2013

**I n h a l t**

# 1 Grundbegriffe

Die Vektoranalysis wendet die Methoden der Analysis (Differential- und Integralrechnung) auf mathematische Funktionen an, in denen Vektoren auftreten, die sich in Abhängigkeit von Ort und Zeit verändern können. Die wichtigsten Anwendungsgebiete der Vektoranalysis sind physikalische Felder, insbesondere elektromagnetische Felder.

Physikalische Felder sind Teilgebiete des Raumes, in denen jedem Punkt eindeutig eine »Feldgröße« – ein Skalar oder ein Vektor (auch ein Tensor oder Spinor) – zugeordnet ist. Je nach Art der Feldgröße spricht man von einem Skalarfeld oder einem Vektorfeld (bzw. Tensor- oder Spinorfeld).

**Skalare Feldgrößen** sind z. B. Druck, Temperatur, Beleuchtungsstärke, Potential.

**Vektorielle Feldgrößen** sind z. B. elektrische und magnetische Feldstärke, Strömungsgeschwindigkeit.

**Kraftfelder** sind Vektorfelder, in denen z. B. eine elektrische Ladung oder eine Masse eine Kraft erfährt.

**Elektrodynamische Felder** sind zeitlich veränderliche elektrische und magnetische Felder, in denen Induktionsvorgänge stattfinden.

**Feldlinien** sind (gedachte) Linien dergestalt, dass die Vektoren der Feldgröße ihre Tangenten sind. Bekannte Beispiele sind: Stromlinien, elektrische und magnetische Feldlinien.

# 2 Vektorfunktionen

## 2.1 Schreibweise und Definition

Der deutschen Norm folgend werden die Zeichen für Vektoren kursiv und fett geschrieben, die Zeichen für den Betrag von Vektoren werden kursiv geschrieben.

Für die Beschreibung eines Vektors $\boldsymbol{v}$ durch seine kartesischen Komponenten $v_1$, $v_2$, $v_3$ sind in der Physik zwei Schreibweisen üblich, nämlich mittels der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (auch $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$) der benutzten Basis und durch Aufzählung der durch ein Komma getrennten Komponenten in Klammern hinter dem Vektorsymbol:

$$v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3; \qquad \boldsymbol{v}(v_1, v_2, v_3).$$

Eine Funktion, bei der die abhängige Variable ein Vektor ist, heißt Vektorfunktion. Im einfachsten Fall sind die (skalaren) Komponenten $v_1$, $v_2$, $v_3$ des Vektors $\boldsymbol{v}$ Funktionen einer einzigen skalaren Variablen $u$, die oft auch als Parameter bezeichnet wird. (Dann spricht man von einer einparametrigen Vektorfunktion). Dann ist

$$\boldsymbol{v} = v_1(u)\boldsymbol{e}_1 + v_2(u)\boldsymbol{e}_2 + v_3(u)\boldsymbol{e}_3.$$

## 2.2 Ableitung einer Vektorfunktion

Analog zur Definition der Ableitung einer skalaren Funktion ist die Ableitung einer Vektorfunktion $\boldsymbol{v}(u)$ definiert:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\triangle \boldsymbol{v}}{\triangle u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(u + \triangle u) - \boldsymbol{v}(u)}{\triangle u}.$$

Aus dieser Definition folgt als Erstes sofort, dass die Ableitung eines konstanten Vektors wegen

$$\boldsymbol{v}(u+\triangle u)=\boldsymbol{v}(u)$$

gleich null ist. Ferner ergibt sich für die Ableitung eines Vektors $\boldsymbol{w} = f(u)\boldsymbol{c}$, der das Produkt einer skalaren Funktion $f(u)$ und eines konstanten Vektors $\boldsymbol{c}$ ist:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\triangle u)\boldsymbol{c}-f(u)\boldsymbol{c}}{\triangle u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\triangle u)-f(u)}{\triangle u}\boldsymbol{c}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{c}.$$

Für den oben beschriebenen Vektors $\boldsymbol{v}$(u) folgt daraus wegen der Konstanz der Einheitsvektoren:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{e}_1+\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{e}_2+\frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{e}_3$$

Die Ableitung des Vektors $\boldsymbol{v}(u)$ nach $u$ ist die Summe dreier Vektoren und somit wiederum ein Vektor.

Für den »Ortsvektor« $\boldsymbol{r}$ eines Punktes $P(x, y, z)$ gilt

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=x\,\boldsymbol{e}_1+y\,\boldsymbol{e}_2+z\,\boldsymbol{e}_3,$$

wobei $O$ der Ursprung des Koordinatensystems ist.

Bewegt sich der Punkt $P$ im Raum und sind seine Koordinaten differenzierbare Funktionen der Zeit $t$, so ist

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\,\boldsymbol{e}_1+y(t)\,\boldsymbol{e}_2+z(t)\,\boldsymbol{e}_3,$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3.$$

Nun sind aber d$x$/d$t$, d$y$/d$t$ und dz/d$t$ die Beträge der Geschwindigkeiten, mit denen sich die Projektionen des Punktes $P$ auf die Achsen dort bewegen. Sie sind somit die skalaren Komponenten des Geschwindigkeitsvektors des Punktes $P$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v_z.$$

Daher ist

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=v_x\,\boldsymbol{e}_1+v_y\,\boldsymbol{e}_2+v_z\,\boldsymbol{e}_3$$

der Vektor der Geschwindigkeit von $P$, also:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_P. \qquad \textbf{(1.1)}$$

Analog ergibt sich der Vektor $\boldsymbol{a}$ der Beschleunigung des Punktes $P$:

$$\boldsymbol{a}_P=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}. \qquad \textbf{(1.2)}$$

## 2.3 Differentiationsregeln

Die Gesetze für die Differentiation einparametriger Vektorfunktionen gewinnt man durch Zerlegung der Vektoren in ihre Komponenten. Diese sind skalare Funktionen, auf die man die einschlägigen Regeln für die Differentiation skalarer Funktionen anwendet. So ergeben sich:

1. Die Ableitung der Summe und Differenz zweier Vektoren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\boldsymbol{v}(u) \pm \boldsymbol{w}(u)\right] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}u} \pm \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}u}.$$

2. Weitere Differentiationsregeln:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[f(u)\boldsymbol{v}(u)\right] = \frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{v} + f(u)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}u} \qquad f(u):\ \text{skalare Funktion},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}u}\cdot\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}u}, \qquad \text{Skalarprodukt-Regel}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}u}\times\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}u}, \qquad \text{Vektorprodukt-Regel}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{v}\left[f(u)\right] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}, \qquad \text{Kettenregel}$$

**Beispiel:**

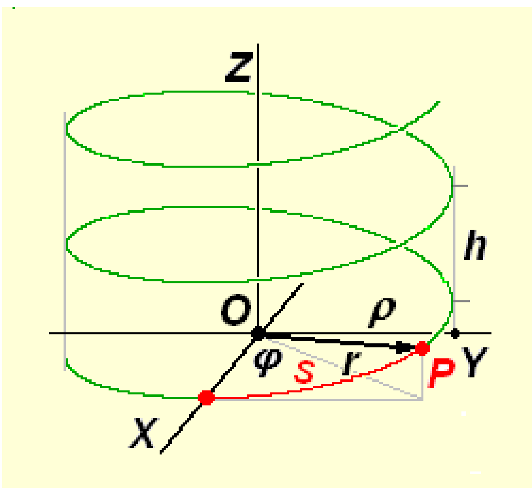
Der Ortsvektor ***r*** eines Punktes *P* sei

$$\boldsymbol{r}(\varphi) = \rho\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \rho\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\varphi\,\boldsymbol{e}_3. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Wenn $\varphi$ alle reellen Zahlenwerte annimmt, durchläuft der Punkt *P* eine Schraubenlinie mit dem Radius $\rho$ und der Ganghöhe $h$.

Die Ableitung dieser Vektorfunktion nach $\varphi$ ist der Vektor

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \rho\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\boldsymbol{e}_3.$$



Bewegt sich der Punkt $P$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$, dann ist

$$\varphi = \omega\, t,$$

wobei $t$ die Zeit ist. Dann ist nach Gleichung (1.1) der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ des Punktes

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}\omega = -\rho\,\omega\,\sin(\varphi)\,\boldsymbol{e}_1 + \rho\,\omega\,\cos(\varphi)\,\boldsymbol{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\omega\boldsymbol{e}_3,$$

und nach Gleichung (1.2) der Beschleunigungsvektor

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\rho\omega^2\cos(\varphi)\,\boldsymbol{e}_1 - \rho\omega^2\sin(\varphi)\,\boldsymbol{e}_2.$$

Für diesen Vektor gilt

$$\boldsymbol{a}^2 = a^2 = \rho^2\omega^4\left[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right] = \rho^2\omega^4 \quad \text{und}$$

$$a = \rho\,\omega^2.$$

Der Betrag der Beschleunigung ist also konstant. Der Beschleunigungsvektor ist auf die Zylinderachse hin gerichtet und steht auf dieser senkrecht.

#### Übung 2.1

1. Zeigen Sie, dass die Steigung der Kurve mit der Gleichung (1.3) konstant ist.

2. Geben Sie die Bogenlänge $s$ der Kurve als Funktion von $\varphi$ an. (Hinweis: Wenn man den Mantel des Zylinders in eine Ebene abrollt, wird die Kurve zu einer Geraden.)

3. Stellen Sie den Vektor $\boldsymbol{r}$ als Funktion der Bogenlänge $s$ dar.

#### Übung 2.2

1. Ersetzen Sie in Gleichung (1.3) $\rho$ durch $\rho_0\ \varphi\ =\ \rho_0\ \omega\ t$ und identifizieren Sie die dadurch entstehende Kurve.

2. Berechnen Sie $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{a}$ und die Steigung der Kurve.

# 3 Anwendungen auf die Differentialgeometrie der Raumkurven

## 3.1 Grundsätzliches über Raumkurven

### 3.1.1 Eine Gerade im Raum

Eine Gerade im Raum kann vektoriell beschrieben werden:

1. Durch einen Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ durch den sie geht, und durch ihre Richtung. Diese wiederum wird durch den »Richtungsvektor« $\boldsymbol{v}(v_1, v_2, v_3)$ beschrieben.

2. Durch zwei ihrer Punkte ($P_1$ und $P_2$). Dieser Fall kann auf den ersten zurückgeführt werden, indem man $\overrightarrow{P_1P_2} = \boldsymbol{v}$ setzt.

Siehe dazu auch *Vektoralgebra, 5.1.*

Dann lautet die Gleichung des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ eines Punktes $P$ auf der Geraden zum Beispiel:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda \boldsymbol{v} \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

Dabei ist $\boldsymbol{r}_0$ der Ortsvektor des Punktes $P_0$. Die reelle Zahl $\lambda$ heißt Parameter. Die Komponentendarstellung des Vektors $\boldsymbol{r}$ lautet dann

$$\boldsymbol{r} = (x_0 + \lambda v_1)\boldsymbol{e}_1 + (y_0 + \lambda v_2)\boldsymbol{e}_2 + (z_0 + \lambda v_3)\boldsymbol{e}_3.$$

Die skalaren Komponenten des Vektors $\boldsymbol{r}$ sind – bei vorgegebenen $\boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{v}$ – dann lediglich Funktionen von $\lambda$:

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}(\lambda), \quad \mathrm{y} = \mathrm{y}(\lambda), \quad \mathrm{z} = \mathrm{z}(\lambda),$$

und daher ist auch

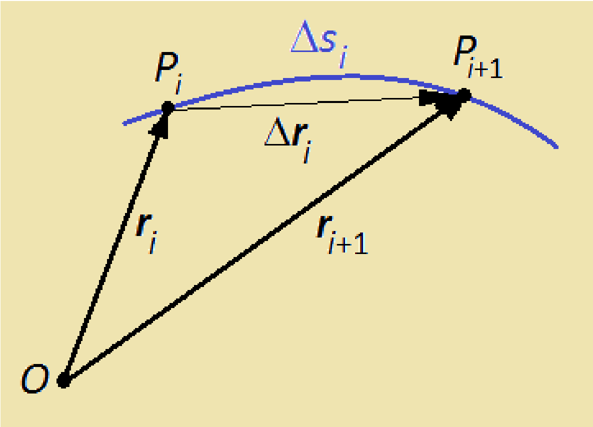
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\lambda).$$

Im Prinzip könnte auch die Variable $x$ als Parameter dienen, wobei dann $y = y(x)$, $z = z(x)$ und $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x)$ Funktionen von $x$ wären. Es gibt aber Kurven (z. B. die oben beschriebene Schraubenlinie), bei der $y$ und $z$ nicht in eindeutiger Weise von $x$ abhängen. Dann ist die »Parameterdarstellung« des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ eine bequeme und eindeutige Methode zur Beschreibung einer Raumkurve. Der Parameter kann dabei ein Winkel sein (siehe Schraubenlinie) oder aber – z. B. bei Bewegungsvorgängen – die Zeit, aber auch irgendeine andere Größe, die nicht immer unmittelbar anschaulich sein muss.

### 3.1.2 Die Bogenlänge einer Raumkurve

Es leuchtet unmittelbar ein, dass ein Teilstück einer Raumkurve (z. B. ein Stück der Mittellinie einer Straße) zwischen zwei ihrer Punkte ($P_1$ und $P_2$) eine gewisse Länge hat, die praktisch auch mit einiger Genauigkeit gemessen werden kann. Aber wie kann diese so genannte Bogenlänge mathematisch definiert und bestimmt werden, wenn die Raumkurve z. B. durch ihre Parameterdarstellung gegeben ist?

Zur Lösung dieser Aufgabe denken wir uns die Kurve zwischen den Punkten $P_1$ und $P_2$ in eine Anzahl $n$ ungefähr gleicher Teile zerlegt, die von 1 bis $n$ durchnummeriert werden, und betrachten eines dieser Teilstücke (z. B. das $i$-te) :




Der Sekantenvektor zwischen den Punkten, die das Teilstück begrenzen, ist dann

$$\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i.$$

Der Betrag $\Delta r_i$ dieses Vektors ist gleich der Länge der Raumdiagonalen eines Quaders mit den Kantenlängen $\Delta x_i$, $\Delta y_i$, $\Delta z_i$ und somit

$$\Delta r_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}.$$

Da die Sekante die kürzeste Verbindung der beiden Endpunkte ist, muss die tatsächliche Bogenlänge $\Delta s_i$ größer oder mindestens gleich $\Delta r_i$ sein. Entsprechend gilt für die gesuchte Länge $s_{1,2}$ des Kurvenstücks zwischen $P_1$ und $P_2$:

$$s_{1,2} = \overset{\frown}{P_1 P_2} \geq \sum_1^n \Delta r_i.$$

Vergrößert man nun die Anzahl $n$ der Teilstücke unbeschränkt, wobei alle $\Delta r_i$ gegen null gehen sollen, dann wird die rechts stehende Summe immer größer. Nähert sie sich dabei einem Grenzwert, so muss dieser die gesuchte Bogenlänge sein:

$$s_{1,2} = \overset{\frown}{P_1 P_2} = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n \Delta r_i.$$

Dieser Grenzwert wird in der Analysis als Integral bezeichnet:

$$s_{1,2} = \overset{\frown}{P_1 P_2} = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n \Delta r_i = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}r.$$

Darin ist d$r$ das so genannte *Differential* des Betrages $r$ des Ortsvektors, für das gilt:

$$\mathrm{d}r = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}.$$

Wird eine Raumkurve durch die Parameterdarstellung $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, $z = z(\lambda)$ beschrieben, dann ist

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda, \quad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda, \quad \mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

und

$$\mathrm{d}r = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Damit ergibt sich für die Bogenlänge des Kurvenstücks

$$s_{1,2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

**Beispiel:** Für die Schraubenlinie mit der Parameterdarstellung

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi \\ y = r\cos\varphi \\ z = h/2\pi \end{cases}$$

ist die Bogenlänge der Kurve zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi + \frac{h^2}{4\pi^2}}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}\,2\pi = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

## 3.2 Tangente, Tangentenvektor, Tangenteneinheitsvektor einer Raumkurve

Durchläuft ein Punkt $P$ in Abhängigkeit von der Zeit $\tau$ eine Raumkurve, so ist sein Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ eine Vektorfunktion der Zeit: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\tau)$. (Um Verwechslung und Verwirrung zu vermeiden, wird als Formelzeichen für die Zeit hier der griechische Buchstabe $\tau$ verwendet.) Die Komponentendarstellungen der Vektoren $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{a}$ sind

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(\tau) &= x(\tau)\,\boldsymbol{e}_1 + y(\tau)\,\boldsymbol{e}_2 + z(\tau)\,\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{v}(\tau) &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{a}(\tau) &= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\tau^2}\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Wir definieren nun: Die **Kurventangente** im Punkt $P$ der Raumkurve ist die Gerade durch $P$, welche dieselbe Richtung hat wie der Geschwindigkeitsvektor in $P$, also wie der Vektor $\boldsymbol{v}_P = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}\tau)_P$.
Der Vektor mit dem Betrag 1 und mit der Richtung der Kurventangente in einem Punkt der Kurve heißt **Tangenteneinheitsvektor**.

Für den Tangenteneinheitsvektor $\boldsymbol{t}$ gilt demnach

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{v}}{v} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}\right|}.$$

Wenn die unabhängige Variable nicht die Zeit ist, sondern eine beliebige, in irgendeiner Weise von der Zeit abhängige Variable $u$ (insbesondere wie oben ein Winkel $\varphi$ oder die Bogenlänge $s$ der Kurve von einem beliebig gewählten Anfangspunkt bis zum Punkt $P$), dann ist

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}u} = \boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}u} = k(u)\,\boldsymbol{v}.$$

Dabei ist $\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}u$ ein *skalarer* (von $u$ abhängiger) Faktor $k(u)$, der die Richtung des Produkt-Vektors $k(u)\boldsymbol{v}$ nicht beeinflusst. Also hat auch der Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}u$ die Richtung von $\boldsymbol{v}$ und damit die Richtung der Tangente. Folglich gilt allgemein für $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}u}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}u}\right|} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{t}.$$

### Übung 3.2

Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor der Kurve mit der Gleichung (1.3) und der Kurve aus Übung 2.2.

## 3.3 Begleitendes Dreikant

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Vektorfunktion $\boldsymbol{r}(u)$ und ihre Ableitungen stetig sind. Dann gibt es in jedem Punkt der Raumkurve genau eine Tangente, aber unendlich viele Tangentenebenen, weil jede Ebene durch die Tangente die Kurve berührt. Unter diesen Tangentenebenen gibt es eine mit besonderen Eigenschaften, mit denen wir uns im Folgenden befassen werden.

Wir betrachten zuerst den Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}$ eines Punktes, der eine Raumkurve durchläuft. Für ihn gilt (Gleichung (1.2))

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(v\,\boldsymbol{t}) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{t} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\tau} = a_{\mathrm{B}}\,\boldsymbol{t} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\tau}. \qquad \textbf{(1.4)}$$

Dabei ist $a_{\mathrm{B}}$ die Bahnbeschleunigung des Punktes. (Sie wird auch als Tangentialbeschleunigung $a_t$ bezeichnet.) Sie bewirkt lediglich eine Änderung der Bahngeschwindigkeit (= Betrag der Geschwindigkeit) des Punktes, nicht aber eine Richtungsänderung.

Betrachten wir nun den letzten Term der Gleichung (1.4), also den Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}\tau$. In der Literatur findet man einen sehr einfachen und eleganten „Beweis“ dafür, dass dieser Vektor auf der Tangente senkrecht steht. Leider wird bei diesem Beweis die Kettenregel (betreffend die Ableitung einer indirekten Funktion) benutzt, und diese gilt nicht für Funktionen $f(\boldsymbol{v})$ von Vektoren. Ein stichhaltiger Beweis ist folgender:

Da $\boldsymbol{t}$ ein Einheitsvektor ist, gilt für seine Komponentendarstellung

$$\boldsymbol{t} = \cos\alpha(u)\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\beta(u)\,\boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma(u)\,\boldsymbol{e}_3,$$

wobei $\cos\alpha$ , $\cos\beta$, $\cos\gamma$ seine von $u$ abhängigen Richtungskosinus sind. Für die Ableitung nach $u$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}u} = -\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{e}_1 - \sin\beta\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{e}_2 - \sin\gamma\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}u}\boldsymbol{e}_3,$$

und für das Skalarprodukt

$$\boldsymbol{t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}u} = -\cos\alpha\,\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u} - \cos\beta\,\sin\beta\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u} - \cos\gamma\,\sin\gamma\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}u}.$$

Für die Richtungskosinus gilt

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

und für die Ableitung dieser Gleichung nach $u$

$$2\left(-\cos\alpha\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}u} - \cos\beta\sin\beta\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}u} - \cos\gamma\sin\gamma\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}u}\right) = 0.$$

Folglich ist das betrachtete Skalarprodukt gleich null, und da im Allgemeinen keiner der beiden Faktoren null ist, muss

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\tau} \perp \boldsymbol{t}$$

sein (siehe Vektoralgebra, Orthogonalitätsbedingung).

Demnach beschreibt die Gleichung 1.4, nämlich

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^2} = a_{\mathrm{B}}\,\boldsymbol{t} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}\boldsymbol{t} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\tau},$$

die Zerlegung des Vektors $\boldsymbol{a}$ in eine Komponente in Richtung der Tangente (Tangentialkomponente) und in eine dazu senkrechte Komponente, die als **Normalkomponente** bezeichnet wird. Der zu $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}\tau$ (oder allgemein der zu $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}u$) gehörige Einheitsvektor wird als der **Hauptnormalenvektor** $\boldsymbol{n}$ der Kurve im Punkt $P$ bezeichnet.

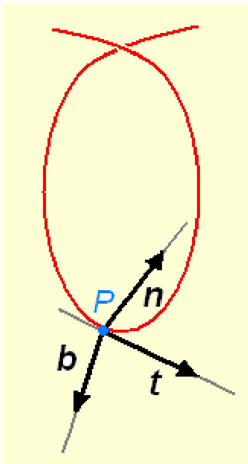
$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\tau}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}\tau}\right|} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}u}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}u}\right|}.$$

Der Hauptnormalenvektor $\boldsymbol{n}$ weist in die Richtung, in die sich der Tangentenvektor im Punkt $P$ dreht, während $P$ die Kurve durchläuft.

Zusammen mit $\boldsymbol{t}$ spannt $\boldsymbol{n}$ eine Ebene auf, die **Schmiegebene** (auch Schmiegungsebene) genannt wird, weil sich die Kurve gleichsam an diese Ebene anschmiegt.

Wenn wir zwei Punkte der Kurve herausgreifen, die in der Nähe des Punktes $P$ und auf verschiedenen Seiten von ihm liegen, so bestimmen diese Punkte zusammen mit $P$ eine Ebene. Diese Ebene konvergiert zur Schmiegebene, wenn sich die beiden Punkte unbeschränkt dem Punkt $P$ nähern.

Wir definieren nun noch einen dritten Einheitsvektor $\boldsymbol{b}$, der auf $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{n}$ senkrecht steht und mit ihnen zusammen ein Rechtssystem bildet. Dieser Vektor heißt **Binormalenvektor.** Die drei Vektoren bilden eine den Punkt $P$ begleitende Basis eines Koordinatensystems. Sie heißt **begleitendes Dreibein** oder **begleitendes Dreikant**.



### 3.4 Krümmung und Krümmungskreis einer Raumkurve

Es ist nützlich, sich zunächst die analogen Überlegungen und Begriffe bei einer ebenen Kurve zu vergegenwärtigen. Dort liegen alle Kurventangenten in derselben Ebene, nämlich in der Ebene der Kurve. Ändert sich die Richtung der Tangente (ihr Winkel ) auf der Weglänge (Bogenlänge) $\Delta s$ um den Wert $\Delta\alpha$ so ist die »mittlere Krümmung« $k_m$ auf der Strecke $\Delta s$ wie folgt definiert:

$$k_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s},$$

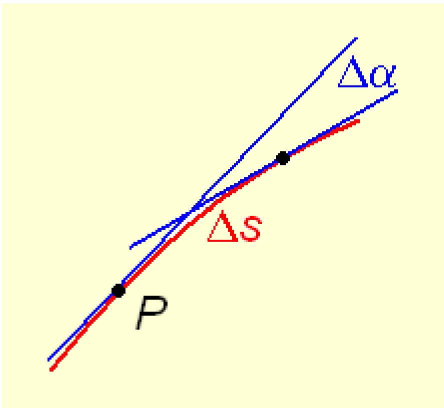
und die **Krümmung** der Kurve im betrachteten Punkt $P$

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Unter dem **Krümmungskreis** der Kurve im Punkt $P$ versteht man den Kreis durch $P$, der dieselbe Steigung und dieselbe Krümmung hat wie die Kurve in $P$. Der Radius $\rho$ dieses Kreises heißt **Krümmungsradius** der Kurve in $P$.

Diese Definition übertragen wir nun auf eine Raumkurve.

Unter der mittleren Krümmung einer Kurve im Bereich $\Delta s$ versteht man den auf $\Delta s$ bezogenen Drehwinkel $\Delta\alpha$ der Tangente. Ihr Grenzwert für $\Delta s$ gegen 0 heißt Krümmung $k$ der Kurve im Punkt $P$.




$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

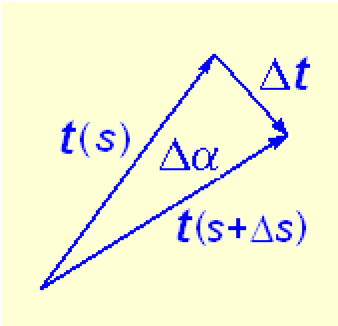
Ein in der Schmiegebene gelegener Kreis durch $P$ mit derselben Steigung und derselben Krümmung wie die Raumkurve, heißt **Krümmungskreis** der Kurve in $P$. Sein Radius heißt Krümmungsradius $\rho$ der Kurve in $P$. Sein Mittelpunkt liegt auf der Hauptnormalen.

Für einen zum Mittelpunktswinkel $\Delta\alpha$ gehörigen Kreisbogen $\Delta s$ gilt

$$\Delta s = r\,\Delta\alpha.$$

Daher ist die (konstante) Krümmung eines Kreises

$$k = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{r}.$$




Wir heften nun die Tangenteneinheitsvektoren zweier benachbarter Kurvenpunkte an denselben Punkt: Für hinreichend kleine Winkel $\Delta\alpha$ ist

$$\Delta\alpha \approx \Delta t$$

und zwar so, dass

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = 1.$$

Daher ist die Krümmung der Kurve

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta s} = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\right|.$$

Der Radius des Krümmungskreises ist folglich

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\right|}.$$

Da der Vektor d$\boldsymbol{t}$/d$s$ die Richtung des Hauptnormalen-Einheitsvektors $\boldsymbol{n}$ hat, ist

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} = k\,\boldsymbol{n} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}.$$

Daraus ergibt sich für $k$:

$$k = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}s^2}\right)^2}.$$

## 4 Integralrechnung mit Vektoren

In Integralen können Vektoren sowohl als Integrand (das ist die zu integrierende Funktion) als auch als Differential bei dem Integranden auftreten.

### 1. Typ: Nur der Integrand ist ein Vektor

Ein typisches Beispiel ist das Zeitintegral der Kraft, das in der Dynamik auftritt. (Dort ist es ein bestimmtes Integral, es genügt hier jedoch, unbestimmte Integrale zu betrachten.)

$$\int \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \int \left(F_x\boldsymbol{e}_1 + F_y\boldsymbol{e}_2 + F_z\boldsymbol{e}_3\right)\mathrm{d}t = \boldsymbol{e}_1\int F_x\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_2\int F_y\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_3\int F_z\,\mathrm{d}t.$$

Das Ergebnis ist also, wie zu erwarten, ein Vektor.

Anmerkung: Dass oben die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ wie skalare Größen vor die Integrale gezogen werden dürfen, lässt sich wie folgt beweisen: Das Integralzeichen ist das Symbol für den Grenzwert einer Summe. Konstante Faktoren bei den Summanden können ausgeklammert werden, auch wenn sie (konstante) Vektoren sind.

### 2. Typ: Integrand und Differential sind Vektoren

Ein Beispiel dafür ist das Wegintegral der Kraft, mit dem die Arbeit berechnet wird.

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int \left(F_x\boldsymbol{e}_1 + F_y\boldsymbol{e}_2 + F_z\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_3\right)\\ &= \int F_x\,\mathrm{d}x + \int F_y\,\mathrm{d}y + \int F_z\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Da $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ein Skalarprodukt ist, ist das Ergebnis des Integrals erwartungsgemäß auch ein Skalar.

Ein spezielles Beispiel hierfür ist

$$\int \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int v_x\,\mathrm{d}x + \int v_y\,\mathrm{d}y + \int v_z\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + C = \tfrac{1}{2}v^2 + C.$$

Ein anderes interessantes Beispiel (unter Verwendung des erst später erklärten Operators „Gradient“ (grad), dessen Bedeutung hier zu erkennen ist):

$$\begin{aligned}\int \mathrm{grad}\,U\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_3\right)\\ &= \int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z\right) = \int \mathrm{d}U = U + C.\end{aligned}$$

Erläuterung: Der Integrand im vorletzten Integral ist das vollständige Differential $\mathrm{d}U$ der Funktion $U = U(x, y, z)$.

### 3. Typ: Nur das Differential ist ein Vektor

$$\int U\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \int U\left(\mathrm{d}v_x\,\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}v_y\,\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}v_z\,\boldsymbol{e}_3\right) = \boldsymbol{e}_1\int U\,\mathrm{d}v_x + \boldsymbol{e}_2\int U\,\mathrm{d}v_y + \boldsymbol{e}_3\int U\,\mathrm{d}v_z.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor.

## 5 Lösungen

### Übung 2.1

1. $\tan\alpha = \dfrac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}} = \dfrac{\frac{h}{2\pi}\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(-\rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi)^2 + (\rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi)^2}} = \dfrac{h}{2\pi\rho} = \text{konst.}$

2. $s=\sqrt{\rho^2\varphi^2+\frac{h^2}{4\pi^2}\varphi^2}=\varphi\sqrt{\rho^2+\frac{h^2}{4\pi^2}}.$

3. $\varphi=\dfrac{s}{\sqrt{\rho^2+\frac{h}{4\pi^2}}}=:k\,s.$

$$\boldsymbol{r}(s)=\rho\cos\left(ks\right)\boldsymbol{e}_1+\rho\sin\left(ks\right)\boldsymbol{e}_2+\frac{h}{2\pi}ks\,\boldsymbol{e}_3.$$

### Übung 2.2

Die entstehende Kurve ist (statt auf einen Kreiszylinder) auf einen Kreiskegel aufgewickelt, dessen Spitze in $O$ liegt und dessen Achse die $Z$-Achse ist.

$$\boldsymbol{r}=\rho_0\varphi\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1+\rho_0\varphi\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2+\frac{h}{2\pi}\varphi\,\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}\omega=\rho_0\omega(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\,\boldsymbol{e}_1+\rho_0\omega(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\,\boldsymbol{e}_2+\frac{h}{2\pi}\omega\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{a}=\rho_0\omega^2(-2\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\,\boldsymbol{e}_1+\rho_0\omega^2(2\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\,\boldsymbol{e}_2.$$

$$\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}},$$

$$\mathrm{d}z=\frac{h}{2\pi}\mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{d}x=\rho_0(\cos\varphi-\varphi\,\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}y=\rho_0(\sin\varphi+\varphi\,\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2=\rho_0^2(1+\varphi^2)(\mathrm{d}\varphi)^2,$$

$$\tan\alpha=\frac{h}{2\pi\rho_0\sqrt{1+\varphi^2}}.$$

**Übung 3.2**

1. $$\boldsymbol{r} = \rho\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \rho\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\varphi\,\boldsymbol{e}_3,$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \rho\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\,\boldsymbol{e}_3,$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi + \frac{h^2}{4\pi^2}},$$

$$= \rho\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \frac{h^2}{4\pi^2\rho^2}} = \rho\sqrt{1 + \frac{h^2}{4\pi^2\rho^2}},$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right|} = \frac{-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{h}{2\pi\rho}\,\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{4\pi^2\rho^2}}}.$$

2. $$\boldsymbol{r} = \rho_0\varphi\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_1 + \rho_0\varphi\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\varphi\,\boldsymbol{e}_3,$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi} = \left(\rho_0\cos\varphi - \rho_0\varphi\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\rho_0\sin\varphi + \rho_0\varphi\cos\varphi\ \right)\boldsymbol{e}_2 + \frac{h}{2\pi}\,\boldsymbol{e}_3,$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \sqrt{\rho_0^2\left(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi\right)^2 + \varphi_0^2\left(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi\right)^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}},$$

$$= \rho_0\sqrt{1 + \varphi^2 + \frac{h^2}{4\pi^2\rho_0^2}},$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right|} = \frac{\left(\rho_0\cos\varphi - \rho_0\varphi\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\rho_0\sin\varphi + \rho_0\varphi\cos\varphi\ \right)\boldsymbol{e}_2 + \dfrac{h}{2\pi}\,\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{1 + \varphi^2\,\dfrac{h^2}{4\pi^2\rho^2}}}.$$