Vektoranalysis

Teil II

Siegfried Petry

Fassung vom 25. Januar 2013

I n h a l t

Skalarfelder und Vektorfelder

Skalarfelder und Vektorfelder

1 Begriffe

Ein physikalisches Feld ist ein Teilgebiet des Raumes, in dem jedem Punkt eine eindeutig bestimmte skalare oder vektorielle physikalische Größe (»Feldgröße«) zugeordnet ist.

Bei **Skalarfeldern** ist die Feldgröße U eine skalare Funktion des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ des betrachteten Punktes P:

$$U = U(\boldsymbol{r}) = U(x, y, z).$$

Beispiele für skalare Feldgrößen sind Druck und Temperatur in der Atmosphäre, das Gravitationspotential in der Umgebung einer Masse, das Potential in der Umgebung eines elektrisch geladenen Körpers, die Lautstärke in einem Schallfeld.

Bei **Vektorfeldern** ist die Feldgröße $\boldsymbol{v}$ eine Vektorfunktion von $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(x, y, z).$$

Beispiele für vektorielle Feldgrößen sind die elektrische und die magnetische Feldstärke, die Gravitationsfeldstärke, die Geschwindigkeit von Gasen und Flüssigkeiten in Strömungen.

2 Beispiele: Das Feld einer elektrischen Ladung und das Feld einer Masse

Die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ im Feld einer elektrischen Kugelladung Q, deren Mittelpunkt sich in O befindet, ist

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}.$$

Für $Q > 0$ ist $\boldsymbol{E}$ radial nach außen gerichtet, für $Q < 0$ radial nach innen.

Die Gravitationsfeldstärke im Feld einer kugelförmigen Masse m mit dem Mittelpunkt O ist

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = -G\frac{m}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad G\text{: Gravitationskonstante}$$

Die Feldstärke ist hier radial nach innen gerichtet.

3 Das Potential eines Vektorfeldes

Das Potential φ eines Punktes P in einem beliebigen elektrischen Feld oder einem Gravitationsfeld ist definiert als die ladungsbezogene Arbeit W/q bzw. die massebezogene Arbeit W/m^*, die aufzuwenden ist, um die Ladung q bzw. die Masse m^* aus unendlicher Entfernung zu dem Punkt P zu bringen. (Anmerkung: Ein Punkt eines Feldes besitzt nur dann ein definiertes Potential, wenn die Arbeit vom Weg unabhängig ist, auf dem die Ladung bzw. die Masse nach P gebracht wird. – Dieses Problem wird später noch genauer untersucht.) Also:

$$\text{Potential } \varphi = \frac{W}{q} \text{ bzw. } \frac{W}{m^*}.$$

Aus der Definition folgt sofort, dass das Potential im Feld einer positiven elektrischen Ladung überall positiv, im Feld einer negativen Ladung und einer Masse überall negativ ist. Für die aufzuwendende Arbeit gilt:

$$W = \int_{\infty}^{r} \mathrm{d}W = \int_{\infty}^{r} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Da in beiden Feldern die Arbeit vom gewählten Weg unabhängig ist, denken wir uns die Ladung $q > 0$ bzw. die Masse m^* von außen radial nach innen bewegt, wobei dann Kraft- und Wegvektor gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sind. Dann wird

$$\mathrm{d}W = \pm F\,\mathrm{d}s.$$

Für das elektrische Feld einer positiven Ladung gilt das positive Vorzeichen, für das Feld einer negativen Ladung und das Gravitationsfeld das negative. Der Betrag der aufzuwendenden Kraft F ist gleich dem Betrag der Feldkraft

$$F_{\text{Feld}} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

bei der Integration ist jedoch zu berücksichtigen, dass r abnimmt, wenn s zunimmt, es ist also $\mathrm{d}r = -\mathrm{d}s$. So ergibt sich

$$W = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r_P} \frac{\mathrm{d}s}{r^2} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r_P} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left.\frac{1}{r}\right|_{\infty}^{r_P} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_P},$$

und

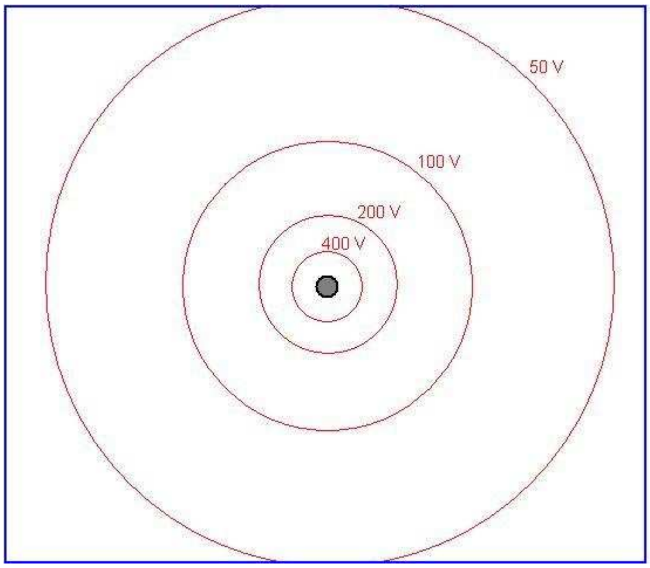
$$\varphi_P = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_P}.$$

Für das Gravitationsfeld findet man analog

$$W = -G\frac{m^* m}{r_P} \quad \text{und} \quad \varphi_P = -G\frac{m}{r_P}.$$

Für r = konst. ist auch φ = konst. Die Punkte gleichen Potentials liegen also auf einer Kugelfläche um O. Diese so genannten **Äquipotentialflächen** oder **Niveauflächen** dieser Felder sind Kugeln (siehe Abbildung). Das elektrische Potential wird in Volt (V = Joule/Coulomb) gemessen, das Gravitationspotential in Joule/Kilogramm.

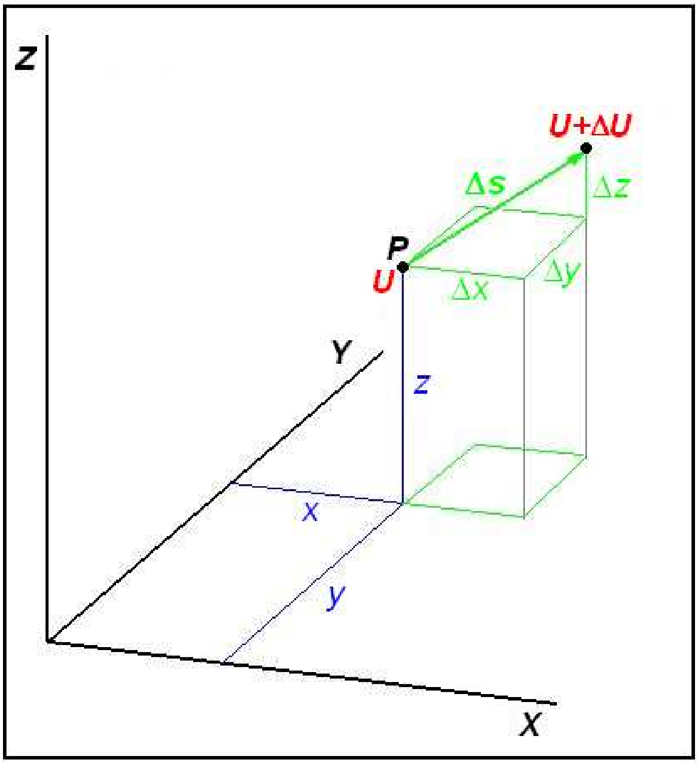
Ein Feld, in dem jedem Punkt ein Potential zugeordnet ist, heißt **Potentialfeld**.



Äquipotentialflächen einer positiven Kugelladung

4 Anstieg und Steigung einer skalaren Feldgröße

Wir begeben uns nun zu einem Punkt $P(x, y, z)$ eines Skalarfeldes mit der Feldgröße $U(\boldsymbol{r})$ und fragen zunächst nach dem **Anstieg** ΔU der Feldgröße auf der Strecke $\Delta \boldsymbol{s}$ und dann nach der **mittleren Steigung** $\Delta U/\Delta s$ der Feldgröße auf derselben Strecke.



Dazu berechnen wir zunächst die Steigung der Feldgröße in Richtung der drei Koordinatenachsen. Dafür liefert die Differentialrechnung:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta z}.$$

Der **Anstieg** ΔU der Feldgröße U längs einer Strecke $\Delta \boldsymbol{s} = (\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)$ ist dann – dies ist ebenfalls ein Ergebnis der Differentialrechnung – für hinreichend kleine Δx, Δy, Δz

$$\Delta U \approx \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z,$$

und die **mittlere Steigung** $\Delta U/\Delta s$ der Feldgröße U auf der Strecke $\Delta \boldsymbol{s}$

$$\frac{\Delta U}{\Delta s} \approx \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Die Quotienten $\Delta x/\Delta s$, $\Delta y/\Delta s$, $\Delta z/\Delta s$ sind die Richtungskosinus des Vektors $\Delta \boldsymbol{s}$:

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Sie sind die skalaren Komponenten des Einheitsvektors $\boldsymbol{e}$, der dieselbe Richtung hat wie $\Delta \boldsymbol{s}$:

$$\boldsymbol{e} = \frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta s} = \cos\alpha\ \boldsymbol{e}_1 + \cos\beta\ \boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma\ \boldsymbol{e}_3.$$

Damit wird

$$\frac{\Delta U}{\Delta s} \approx \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

Daraus ergibt sich für Δs gegen null die Steigung der Feldgröße U im Punkt P in der Richtung $\Delta \boldsymbol{s}$, die so genannte **Richtungsableitung** der Funktion U:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta s} &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\\ &= \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.\end{aligned}$$

5 Richtungsableitung und Gradient einer skalaren Feldgröße

Der soeben gefundene Term für die Steigung der Feldgröße U in der durch den Einheitsvektor $\cos\alpha\ \boldsymbol{e}_1 + \cos\beta\ \boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma\ \boldsymbol{e}_3$ beschriebenen Richtung kann interpretiert werden als das Skalarprodukt der beiden Vektoren

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_3$$

und

$$\boldsymbol{e} = \cos\alpha\ \boldsymbol{e}_1 + \cos\beta\ \boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma\ \boldsymbol{e}_3.$$

Der Vektor $\boldsymbol{v}$ hat bemerkenswerte, für die Untersuchung von Feldern nützliche Eigenschaften, weshalb er einen eigenen Namen erhalten hat: Gradient U (grad U). (»Gradient« ist ein aus einem lateinischen Stamm abgeleitetes Kunstwort, das man etwa mit »Steigungszeiger« übersetzen kann.)

$$\operatorname{grad} U \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_3.$$

Damit gilt für die Richtungsableitung der Feldgröße U in der Richtung des Einheitsvektors

$$\boldsymbol{e} = \cos\alpha\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\beta\,\boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma\,\boldsymbol{e}_3$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \operatorname{grad} U \cdot \boldsymbol{e} = \operatorname{grad} U \cdot (\cos\alpha\ \boldsymbol{e}_1 + \cos\beta\ \boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma\ \boldsymbol{e}_3).$$

Die besonderen Eigenschaften des Vektors grad U ergeben sich aus folgender Überlegung:
Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ ist gleich dem Produkt ihrer Beträge v und w und dem Kosinus des Winkels δ zwischen den beiden Vektoren:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v\,w\,\cos\delta.$$

Bei gegebenen Beträgen v und w ist der Wert des Skalarprodukts maximal (nämlich gleich uv), wenn $\delta = 0$ ist. Die Richtungsableitung (= Steigung) der Feldgröße U ist also dann am größten, wenn der Vektor $\boldsymbol{e}$ (oder der Vektor $\Delta\boldsymbol{s}$) dieselbe Richtung wie der Vektor grad U hat. Anders gesagt:

Der Vektor grad *U* weist in die Richtung, in der die Feldgröße *U* die größte Steigung hat.

Steht dagegen der Vektor $\boldsymbol{e}$ auf dem Vektor grad U senkrecht, dann ist dU/ds = 0. Das bedeutet, der Vektor $\boldsymbol{e}$ liegt in der Tangentialebene der Niveaufläche U = konstant des betrachteten Punktes P. Daraus folgt:

Der Vektor grad *U* steht auf der durch den Punkt *P* gehenden Niveaufläche senkrecht.

Ferner: Der Maximalwert der Steigung (oder der Richtungsableitung) ist der Maximalwert des obigen Skalarprodukts:

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}\right)_{\max} = \left|\operatorname{grad} U\right| \cdot \left|\boldsymbol{e}\right| = \left|\operatorname{grad} U\right|.$$

Das bedeutet:

Der Betrag des Vektors grad *U* ist gleich dem Maximalwert der Steigung der Feldgröße im betrachteten Punkt.

Beispiel: Gesucht ist der Gradient des Potentials φ einer elektrischen Kugelladung Q.
Für das Potential gilt (siehe oben):

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Die partiellen Ableitungen werden am einfachsten nach der Kettenregel gebildet:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}x \quad \text{usw.}$$

und so erhält man schließlich

$$\operatorname{grad}\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{E}.$$

Entsprechend gilt für das Gravitationsfeld

$$\operatorname{grad}\varphi = -\boldsymbol{g}.$$

6 Rechengesetze für Gradienten

Es seien U, U_1 und U_2 skalare Ortsfunktionen, und k eine reelle Zahl. Dann gelten, wie man leicht zeigen kann, folgende Rechengesetze:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad} k = 0,\\
&\operatorname{grad}(kU) = k \operatorname{grad} U,\\
&\operatorname{grad}(U_1 \pm U_2) = \operatorname{grad} U_1 \pm \operatorname{grad} U_2,\\
&\operatorname{grad}(U_1 U_2) = (\operatorname{grad} U_1)U_2 + U_1(\operatorname{grad} U_2),\\
&\operatorname{grad} U^n = nU^{n-1} \operatorname{grad} U,\\
&\operatorname{grad} f(U) = \frac{\mathrm{d} f(U)}{\mathrm{d}U} \operatorname{grad} U.
\end{aligned}$$

7 Vektorfeld und Potentialfeld

In der Theoretischen Physik wird gezeigt, dass in jedem Potentialfeld der Feldvektor $\boldsymbol{v}$ gleich dem negativen Gradienten des Potentials φ ist. Wir fragen nun, welche Bedingungen eine vektorielle Feldfunktion $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ erfüllen muss, damit zu dem Vektorfeld ein Potentialfeld mit der Feldfunktion $\varphi(\boldsymbol{r})$ gehört, sodass

$$\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} \varphi$$

oder

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{e}_1 + v_y \boldsymbol{e}_2 + v_z \boldsymbol{e}_3 = -\operatorname{grad} \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \boldsymbol{e}_3 \right)$$

ist. Es muss dann sein:

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Diese Forderung ist keineswegs selbstverständlich oder trivial, denn v_x, v_y und v_z können im Allgemeinen drei von einander völlig unabhängige Funktionen sein.

Nach dem Satz von SCHWARZ gilt für die 2. Ableitungen einer jeden Funktion $\varphi(x, y, z)$, wenn diese an der betrachteten Stelle stetig sind:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}.$$

Das heißt: Bei der Bildung der zweiten partiellen Ableitung nach verschiedenen Variablen ist die Reihenfolge der Ableitungen beliebig. Wenn also v_x, v_y, v_z die entsprechenden Ableitungen einer Funktion φ sein sollen, dann muss gelten:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Dann und nur dann ist ($v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y + v_z\,\mathrm{d}z$) das vollständige Differential $\mathrm{d}\varphi$ einer Funktion φ, und nur dann kann daraus durch Integration eine Funktion φ bestimmt werden, deren negativer Gradient der Vektor $\boldsymbol{v}$ ist.

Später wird sich zeigen, dass die oben beschriebene Bedingung identisch ist mit der Forderung, dass das Feld mit dem Feldvektor $\boldsymbol{v}$ wirbelfrei ist, (d. h., dass überall rot $\boldsymbol{v} = 0$ ist.)

Beispiel: Für die Feldstärke des elektrischen Feldes eines unendlich langen, mit konstanter Ladungsdichte geladenen Drahtes, der auf der Z-Achse liegt, gilt

$$E \sim \frac{1}{\rho} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{E} = k\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho^2} = k\frac{x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2}{x^2+y^2},$$

wobei k ein Proportionalitätsfaktor und $\boldsymbol{\rho}$ der (waagerechte) Entfernungsvektor des betrachteten Punktes von der Z-Achse ist. Es ist demnach

$$E_x = k\frac{x}{x^2+y^2}, \quad E_y = k\frac{y}{x^2+y^2}, \quad E_z = 0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = k\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Die grundlegende Bedingung für die Existenz eines Potentialfeldes ist damit erfüllt. Ferner gilt

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -E_x = -k\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -E_y = -k\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -E_z = 0.$$

Somit ist

$$\operatorname{grad}\varphi = -k\frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_1 - k\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{E}.$$

Das vollständige Differential der gesuchten Funktion $\varphi(x, y)$ ist daher

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y = -k\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - k\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

Die Integration liefert

$$\varphi = -\frac{k}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + C = k\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + C = k\ln\frac{1}{\rho} + C.$$

Bei positiver Ladung des Drahtes ist $k > 0$. Somit geht für $\rho \to \infty$ das Potential gegen $-\infty$ und kann nicht durch geeignete Wahl von C gleich null gesetzt werden. Wohl aber kann für einen beliebigen Punkt in endlicher Entfernung das Potential beliebig definiert werden. Zum Beispiel sei für $\{\rho\} = 1$ der Zahlenwert des Potentials gleich 0. Dies ist der Fall für $C = 0$. Dann geht das Potential für $r \to 0$ gegen ∞ und für $r \to \infty$ gegen $-\infty$.

Dieses seltsame Verhalten ist darin begründet, dass bei einem Feld, dessen Feldstärke proportional $1/r$ ist, der Arbeitsaufwand für die Bewegung einer Ladung aus dem Unendlichen an irgendeinen Punkt des Feldes stets unendlich ist.

8 Der Vektorgradient

Mit dem Gradienten grad U kann das Differential dU einer *skalaren* Ortsfunktion U berechnet werden.

Es soll nun untersucht werden, ob eine zum Gradienten analoge Funktion auch für ein Vektorfeld definiert werden kann. Dazu berechnen wir mit Hilfe des Gradienten die Differentiale der skalaren Komponenten v_x, v_y, v_z des Vektors $\boldsymbol{v}$:

$$\mathrm{d}v_x = (\mathrm{grad}\ v_x)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}v_y = (\mathrm{grad}\ v_y)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}v_z = (\mathrm{grad}\ v_z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\partial v_z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Damit ergibt sich das Differential d$\boldsymbol{v}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}v_x\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}v_y\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}v_z\boldsymbol{e}_3 = \left(\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot \mathrm{grad}\ v_x\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot \mathrm{grad}\ v_y\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot \mathrm{grad}\ v_z\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Wir definieren nun den **Vektorgradienten** des Vektors $\boldsymbol{v}$ (kurz: Vektorgradient $\boldsymbol{v}$, geschrieben grad $\boldsymbol{v}$) durch folgende Matrix:

$$\mathrm{grad}\ \boldsymbol{v} \stackrel{\mathrm{Def}}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Dann ist nach den Regeln der Matrizenrechnung das so genannte Vorprodukt aus d$\boldsymbol{s}$ und grad $\boldsymbol{v}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot \mathrm{grad}\ \boldsymbol{v} = &\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_1 \\ &+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_2 \\ &+\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Dies ist genau die gesuchte Änderung d$\boldsymbol{v}$. Also gilt:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot \mathrm{grad}\,\boldsymbol{v}.$$

Beispiel 1

Ein Vektorfeld sei definiert durch $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}$. (Man denke sich also an jeden Punkt $P(x, y, z)$ des Feldes seinen Ortsvektor angeheftet.) Der Vektorgradient dieses Feldes ist dann

$$\operatorname{grad} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x}{\partial y} & \dfrac{\partial y}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} \operatorname{grad} \boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{d}x\, \boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}y\, \boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}z\, \boldsymbol{e}_3 = \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Interpretation: Wenn man vom Punkt P um die Strecke d$\boldsymbol{s}$ im Feld voranschreitet, ändert sich der Ortsvektor um d$\boldsymbol{s}$.

Wegen der Linearität des vorletzten Terms ist auch

$$\boldsymbol{a} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}.$$

Beispiel 2

Der Vektor der elektrischen Feldstärke im Punkt $P(x, y, z)$ des Feldes einer Punktladung Q, die sich im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems befindet, ist

$$\boldsymbol{E} = c\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{c}{r^3}\left(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3\right) \quad \text{mit} \quad c = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Die Komponenten von $\boldsymbol{E}$ sind

$$E_x = c\frac{x}{r^3}, \quad E_y = c\frac{y}{r^3}, \quad E_z = c\frac{y}{r^3},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = c\frac{r^3 - x\dfrac{\partial r^3}{\partial x}}{r^6} = c\frac{r^3 - x\,3r\,x}{r^6} c\frac{r^2 - 3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{-3c\dfrac{\partial r^3}{\partial y}}{r^6} = -3c\frac{x\,y}{r^5}, \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -3c\frac{x\,z}{r^5},$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -3c\frac{x\,y}{r^5}, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial y} = c\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -3c\frac{y\,z}{r^5},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -3c\frac{x\,z}{r^5}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} = -3c\frac{y\,z}{r^5}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z} = c\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

Dann ist

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial E_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial E_x}{\partial z}\mathrm{d}z = c\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}\mathrm{d}x - 3c\frac{x\,y}{r^5}\mathrm{d}y - 3c\frac{x\,z}{r^5}\mathrm{d}z \quad \text{usw.}$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{E} = &\left(c\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}\mathrm{d}x - 3c\frac{x\,y}{r^5}\mathrm{d}y - 3c\frac{x\,z}{r^5}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_1\\ &+\left(-3c\frac{x\,y}{r^5}\mathrm{d}x + c\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}\mathrm{d}y - 3c\frac{y\,z}{r^5}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_2\\ &+\left(-3c\frac{x\,z}{r^5}\mathrm{d}x - 3c\frac{y\,z}{r^5}\mathrm{d}y + c\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$