Imaginäre und komplexe Zahlen

Siegfried Petry

Fassung vom 1. Februar 2013

I n h a l t

1 Grundlagen und Voraussetzungen: Reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen besteht aus den rationalen und den irrationalen Zahlen.

Die Menge der rationalen Zahlen umfasst alle Zahlen, die sich als gemeine Brüche m/n (m und n ganzzahlig) darstellen lassen. Dazu gehören: Die ganzen Zahlen, die endlichen Dezimalbrüche und die unendlichen periodischen Dezimalbrüche.

Die Menge der irrationalen Zahlen umfasst alle unendlichen, nicht periodischen Dezimalbrüche. Zu den irrationalen Zahlen gehören z. B. die Wurzeln aus positiven Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, die Eulersche Zahl e, die Zahl π, fast alle Logarithmen und fast alle Werte der trigonometrischen Funktionen.

Die reellen Zahlen sind eineindeutig (das bedeutet: umkehrbar eindeutig) auf die Zahlengerade abbildbar. Das heißt: Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt der Zahlengeraden und jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl.

Das System der reellen Zahlen kann insofern als vollständig und nicht weiter ergänzungsbedürftig bezeichnet werden, als jedem Punkt der Zahlengeraden eine reelle Zahl zugeordnet ist. Innerhalb der Menge der reellen Zahlen sind alle vier Grundrechenarten unbeschränkt ausführbar (außer der Division durch 0) und es gibt eine Größer/kleiner-als-Relation. Die Menge der reellen Zahlen ist daher ein »geordneter Zahlenkörper«.

Die vier Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) lassen sich auch graphisch ausführen, wenn man der reellen Zahlen nicht je einen Punkt P_n auf der Zahlengeraden, zuordnet, sondern die gerichtete Strecke $\overrightarrow{OP}_n$ (also einen Vektor) zuordnet, wobei O der »Ursprung« (von lat. origo) der Zahlengeraden ist. Der Punkt O repräsentiert dabei die Zahl 0 bzw. eine Strecke der Länge null. Diese Maßnahme berücksichtigt auch konsequent, dass in der Analytischen Geometrie und in der Analysis die Koordinaten von Punkten stets als Strecken behandelt werden. Auch für die Abbildung imaginärer und komplexer Zahlen (siehe unten) bewährt sich dieses Vorgehen.

2 Imaginäre Zahlen

Andererseits kann man das System der reellen Zahlen aber auch als unvollständig betrachten, weil es in ihm z. B. keine Lösung der rein quadratischen Gleichung

$$x^2 = -1$$

gibt, denn es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat gleich –1 ist. Eine lediglich formale Lösung der Gleichung lautet

$$x = \pm\sqrt{-1},$$

wobei aber dem Symbol $\sqrt{-1}$ keine reelle Zahl entspricht.

Wir können nun probeweise $\sqrt{-1}$ als eine neuartige Zahl i betrachten, deren Quadrat gleich –1 ist, und untersuchen, ob wir brauchbare, widerspruchsfreie Ergebnisse erhalten, wenn wir auf diese »Zahl« die bekannten Rechengesetze für reelle Zahlen anwenden. Diese Zahl wird (historisch bedingt) die **imaginäre Einheit i** (auch j) genannt. Es ist also

$$\sqrt{-1} =: \mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{i}^2 = -1.$$

Dann lauten die Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$

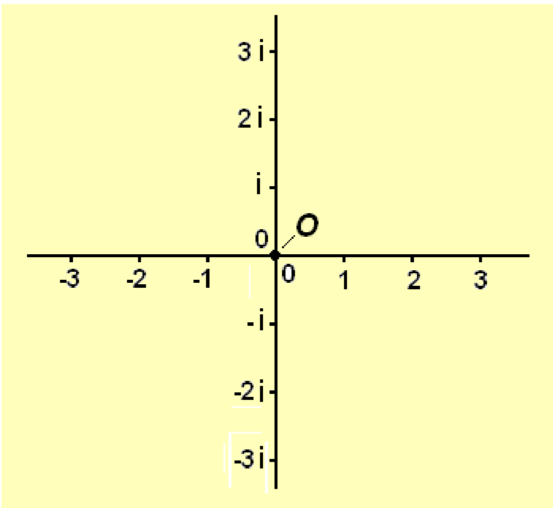
$$x_{1,\,2} = \pm\, \mathrm{i}.$$

Mit i beginnend erhalten wir durch fortwährende Addition bzw. Subtraktion von i die »imaginären Zahlen«

...-3i, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i,...

wenn wir i wie eine Buchstabengröße der Algebra behandeln ($a + a = 2a$, $a - a = 0$ usw.). Die so erhaltenen Zahlen stellen die imaginären Gegenstücke zu den reellen ganzen Zahlen dar. Wir erkennen, dass die Zahl 0 sowohl als reelle wie als imaginäre Zahl aufgefasst werden kann.

Als nächstes können wir die imaginären ganzen Zahlen auf eine eigene, die **imaginäre Zahlengerade** abbilden. Dabei ist es zweckmäßig, die »imaginäre Einheitsstrecke« gleich der reellen Einheitsstrecke zu machen. Da die beiden Zahlengeraden die Null gemeinsam haben, müssen sie einander in *O* schneiden. Schon aus Symmetriegründen ist es zweckmäßig, die beiden Zahlengeraden senkrecht zueinander anzubringen. Die von den beiden Zahlengerade aufgespannte Ebene heißt **GAUSSsche Zahlenebene.**



Allgemein kann jede imaginäre Zahl $n\mathrm{i}$ als Produkt der reellen (rationalen oder irrationalen) Zahl n mit der Zahl i betrachtet werden. Ihren Bildpunkt findet man durch Übertragung der Strecke, welche der Zahl n entspricht, von der reellen Zahlengeraden auf die imaginäre.

Mit den imaginären Zahlen können nun auch die Lösungen der rein quadratischen Gleichungen

$$x^2 = -a^2$$

(a reell) angegeben werden. Sie lauten

$$x_{1,\,2} = \pm\, a\,\mathrm{i}.$$

Nach den Regeln der Algebra (die nach obiger Verabredung weiterhin gelten sollen) folgt für die **Addition und Subtraktion imaginärer Zahlen**

$$a\,\mathrm{i} \pm b\,\mathrm{i} = (a \pm b)\,\mathrm{i}.$$

Die »graphische Addition bzw. Subtraktion« auf der imaginären Zahlengeraden führt konsequenter Weise zum selben Ergebnis, wenn die imaginären Zahlen nicht als Punkte, sondern als nach oben oder unten weisende Strecken (Vektoren) dargestellt werden.

Für die Multiplikation und Division zweier imaginärer Zahlen berechnen wir zunächst das Produkt und den Quotienten zweier imaginärer Einheiten i. Es ist (siehe oben)

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}^2 = -1$$

und nach der einschlägigen Regel der Algebra

$$\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = 1.$$

Damit ergeben sich

$$a\,\mathrm{i} \cdot b\,\mathrm{i} = a\,b\,\mathrm{i}^2 = -a\,b \quad \text{und} \quad \frac{a\,\mathrm{i}}{b\,\mathrm{i}} = \frac{a}{b}.$$

wobei *a* und *b* reelle Zahlen sind.

Ergebnis: Produkt und Quotient zweier imaginärer Zahlen sind reelle Zahlen

Durch wiederholte Multiplikation findet man die positiven ganzzahligen Potenzen von i:

$$\mathrm{i}^2 = -1, \quad \mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^3 \cdot \mathrm{i} = 1, \quad \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i} \quad \text{usw.}$$

Wenn wir verabreden, dass – wie in der Algebra reeller Zahlen – für positive ganzzahlige *n*

$$\mathrm{i}^{-n} \equiv \frac{1}{\mathrm{i}^n}$$

sein soll, ergeben sich die negativen ganzzahligen Potenzen von i wie folgt:

$$\mathrm{i}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{i}^2} = \frac{1}{-1} = -1, \quad \mathrm{i}^{-3} = \frac{1}{\mathrm{i}^3} = -\frac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^{-4} = \frac{1}{\mathrm{i}^4} = 1 \quad \text{usw.}$$

Die Berechnung der Wurzeln aus i ist erst später möglich.

3 Komplexe Zahlen

Betrachten wir nun eine gemischt quadratische Gleichung

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

Auf die bekannte Weise (nämlich durch quadratische Ergänzung) findet man die Lösungen

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\sqrt{-1} = 2 \pm 3\,\mathrm{i}.$$

Die Lösungen sind weder reelle noch imaginäre Zahlen, sondern die Summen aus einer reellen und einer imaginären Zahl. Wir nennen solche Zahlen **komplexe Zahlen**.

Die allgemeinen Darstellungsformen einer komplexen Zahl sind

$$z = a + b\,\mathrm{i} = [a; b].$$

wobei *a* und *b* reelle Zahlen sind.

Die Zahl *a* heißt Realteil Re von *z*, die Zahl *b* heißt (obwohl sie eine reelle Zahl ist) Imaginärteil Im von *z*:

$$a = \mathrm{Re}\, z, \quad b = \mathrm{Im}\, z.$$

Mit Hilfe komplexer Zahlen können uneingeschränkt die Lösungen gemischt quadratischer Gleichung angeben werden. Aus:

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

folgt

$$x_{1,\,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Für

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

ergeben sich zwei bzw. eine reelle Lösung. Für

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

schreibt man die Lösungen in der Form

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

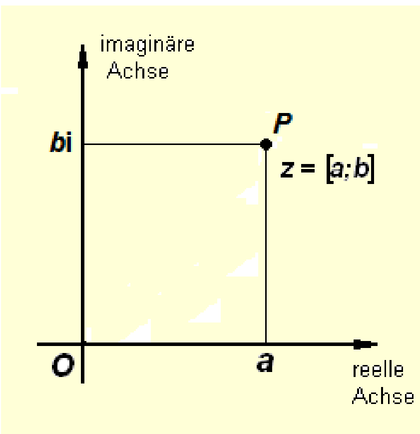
wobei der Radikand jetzt positiv ist. Die Lösungen sind **»konjugiert komplex«,** d. h. sie unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen ihres Imaginärteils.

4 Darstellung komplexer Zahlen in der Zahlenebene

Für die graphische Darstellung komplexer Zahlen bietet sich die **»komplexe Zahlenebene«** (»GAUSSsche Ebene«)an, die von der reellen und der imaginären Zahlengeraden aufgespannt wird. (Diese Darstellung ist zunächst nur eine willkürliche Vereinbarung. Ihre Berechtigung erhält sie erst durch den Nachweis ihrer Zweckmäßigkeit. Dieser wird im Folgenden erbracht.)

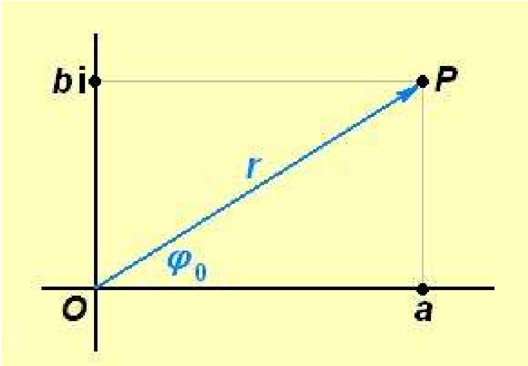
Die komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ kann dabei auf verschiedene Arten dargestellt werden:

1. Durch einen Punkt P mit den Koordinaten a und bi. wobei diese zur Unterscheidung von den Koordinaten der Analytischen Geometrie in eckige Klammern gesetzt werden und der Faktor i



weggelassen wird.

2. Durch den zweidimensionalen Vektor $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}$. Der Betrag r dieses Vektors heißt auch **Betrag** $|z|$



der komplexen Zahl z. In der obigen Abbildung bildet $\boldsymbol{r}$ mit der positiven reellen Achse den Winkel φ_0. Der Vektor $\boldsymbol{r}$ nimmt aber dieselbe Lage auch dann ein, wenn er gegenüber der reellen Achse um den Winkel $\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \quad k = 1, 2, 3, \ldots$ gedreht ist. Die Winkel φ heißen **Argument** von z (arg z), der Winkel φ_0 heißt Hauptwert des Arguments von z. Dabei gilt

$$0 \le \varphi_0 < 2\pi \quad \text{und} \quad \arg z = \varphi = \varphi_0 + k\ 2\pi.$$

Ferner ist

$$r^2 = a^2 + b^2, \quad \tan\varphi = \tan\varphi_0 = \frac{b}{a}.$$

Der Quadrant von φ_0 wird durch die Vorzeichen von a und b bestimmt.

Wegen

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

kann die komplexe Zahl z auch so beschrieben werden:

$$z = a + b\,\mathrm{i} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Mit Hilfe der »Eulerschen Formel«

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

ergibt sich daraus eine weitere Darstellungsform:

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_0 + k2\pi)} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}.$$

Zur Eulerschen Formel:

Die Bedeutung des Symbols $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ (Eulersche Zahl e mit imaginärem Exponenten) wird durch die Verabredung definiert, dass die bekannte Potenzreihe

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

auch für imaginäre Exponenten gelten soll:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \overset{\text{Def.}}{=} 1 + \frac{\mathrm{i}x}{1!} + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}x)^3}{3!} + \cdots = 1 + \mathrm{i}\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{i}\frac{x^5}{5!} - - + + \cdots$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots}_{\cos x} \quad + \mathrm{i} \underbrace{\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \right)}_{\sin x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x.$$

---

5 Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben zwei komplexe Zahlen

$$z_1 = a_1 + b_1\,\mathrm{i}, \quad z_2 = a_2 + b_2\,\mathrm{i}\,.$$

5.1 Summe und Differenz komplexer Zahlen

Für die Summe bzw. Differenz der beiden Zahlen findet man, wenn man i wie irgendeine Buchstabengröße behandelt, nach den Regeln der Algebra

$$z_1 \pm z_2 = a_1 + b_1\mathrm{i} \pm a_2 \pm b_2\mathrm{i} = \left(a_1 \pm a_2\right) + \left(b_1 \pm b_2\right)\mathrm{i}\,.$$

Daraus folgt, dass komplexe Zahlen in der Gaussschen Zahlenebene wie Vektoren addiert und subtrahiert werden.

5.2 Das Produkt komplexer Zahlen

Es ist

$$z_1 \cdot z_2 = \left(a_1 + b_1\,\mathrm{i}\right)\left(a_2 + b_2\,\mathrm{i}\right) = \left(a_1 a_2 - b_1 b_2\right) + \left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right)\mathrm{i}\,.$$

Dieser Wert des Produkts hat keine unmittelbar erkennbare anschauliche Bedeutung. Stellt man dagegen die Komponenten der komplexen Zahlen in der so genannten trigonometrischen Form

$$z = r\,(a \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi)$$

dar, so erhält man

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 = r_1 r_2 \left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right) = r_1 r_2 \cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) \quad \text{und}$$
$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = r_1 r_2 \left(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2\right) = r_1 r_2 \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)$$

und damit

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + \mathrm{i} \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right].$$

Also ist

$$\left|z_1 \cdot z_2\right| = \left|z_1\right| \cdot \left|z_2\right| \quad \text{und} \quad \varphi_{z_1 \cdot z_2} = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Der Betrag des Produkts ist also gleich dem Produkt der Beträge, das Argument ist gleich der Summe der Argumente der beiden Faktoren.

Dasselbe geht viel einfacher mit der so genannten Exponentialform $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ der komplexen Zahlen:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = r_1\,r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)}.$$

Allerdings ist dies kein Beweis im strengen Sinn, sondern lediglich die Bestätigung dafür, dass die oben getroffenen Verabredungen hinsichtlich der Gültigkeit der algebraischen Gesetze und der Potenzreihe für e^{ix} zu widerspruchsfreien Ergebnissen führen und daher sinnvoll sind. Darüber hinaus erweisen sich die Eulerschen Gleichungen als höchst nützlich.

Durch wiederholte Anwendung ergibt sich, dass die Produktregel auch für mehr beliebig viele Faktoren gilt:

$$|z_P| \equiv |z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \; \ldots \; \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi_p = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n .$$

5.3 Der Quotient komplexer Zahlen

Analog findet man für $z_2 \neq 0$:

$$|z_q| \equiv \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{und} \quad \varphi_q = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

Setzt man darin $z_1 = 1$ und $z_2 = z$, so erhält man für den Kehrwert einer komplexen Zahl:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z_1|}\left[\cos(0-\varphi) + \mathrm{i}\sin(0-\varphi)\right] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi},$$

und speziell für $z = \mathrm{i}$

$$\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i} .$$

5.4 Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

Wir verabreden zunächst für positive ganzzahlige Werte von n:

1. Unter der n-ten Potenz z^n einer komplexen Zahl verstehen wir das Produkt aus n gleichen Faktoren z.
2. Es sei $z^{-n} \overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{z^n}$.

Aus (siehe 5.2 Das Produkt komplexer Zahlen)

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi_p = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n .$$

folgt dann für lauter gleiche Faktoren z:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = r^n \, \mathrm{e}^{n\varphi} .$$

Wie man leicht erkennt, gilt diese Beziehung auch für negative ganzzahlige Werte von n. Ferner folgt daraus

$$z^m \cdot z^n = z^{m+n}, \quad \left(z^m\right)^n = z^{m \cdot n}, \quad z_1^m \cdot z_2^m = (z_1 \cdot z_2)^m, \quad \frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}, \quad \frac{z_1^m}{z_2^m} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^m .$$

Es gelten also die gleichen Potenzgesetze wie für reelle Zahlen

5.5 Der binomische Lehrsatz

Aus den Rechenregeln für Potenzen und den Multiplikationsregeln für zwei Klammerterme folgt sofort, dass der binomische Lehrsatz für positive ganzzahlige Exponenten auch für komplexe Zahlen gilt:

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \cdots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \cdots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

5.6 Die Moivreschen Formeln

Aus der Gleichung (siehe 5.4)

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi)$$

folgt für

$$|z| = 1: \qquad (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi.$$

Andererseits liefert der binomische Lehrsatz für positive ganzzahlige Exponenten:

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + \mathrm{i}\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi \cdot \sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi \cdot \sin^2\varphi - \mathrm{i}\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi \cdot \sin^3\varphi$$
$$+ \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi \cdot \sin^4\varphi + \cdots + \mathrm{i}^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

Wenn man die rechten Seiten der beiden Gleichungen vergleicht und berücksichtigt, dass die Realteile und die Imaginärteile jeweils gleich sein müssen, erhält man die **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi \cdot \sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi \cdot \sin^4\varphi - + \cdots$$
$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi \cdot \sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi \cdot \sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi \cdot \sin^5\varphi - + \cdots,$$

wobei die rechten Seiten so weit zu ergänzen sind, bis die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ null werden. Dies geschieht, wenn $k > n$ wird.

5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen

Die Lösungen der Gleichung

$$x^n = z \qquad n: \text{ positiv ganzzahlig}$$

heißen die n-ten Wurzel aus der komplexen Zahl z:

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

Setzen wir

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \quad \text{und} \quad x = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi),$$

so muss wegen $x^n = z$

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

und folglich

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

sein. Bei der Division durch n ist jedoch zu beachten, dass das Argument φ periodisch ist mit der Periode 2π, also

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Folglich findet man für ψ genau n verschiedene Werte, nämlich

$$\psi = \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\cdot 2\pi}{n}, \dots \frac{\varphi + (n-1)\cdot 2\pi}{n}.$$

Von $k = n$ an werden lediglich die vorderen Werte (vom zweiten an) wiederholt. Das Gleiche gilt für negative Werte von k. Also ist:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \cdots (n-1)$$

Jeder dieser Werte wird eine n-te Wurzel der komplexen Zahl z genannt. Die diesen n Werten entsprechenden Punkte der Zahlenebene liegen alle auf einem Kreis um 0 und sind die Ecken eines regulären n-Ecks.

Für die Quadratwurzeln aus

$$\mathrm{i} = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

ergeben sich die Werte

$$\sqrt{\mathrm{i}} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi/2 + k\cdot 2\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi/2 + k\cdot 2\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\pi/2 + k\cdot 2\pi}{2}} \qquad k = 0, 1$$

und somit

$$\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)_1 = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},$$

$$\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right)_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}.$$

Analog findet man für

$$\sqrt{-\mathrm{i}} = \sqrt{\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}}$$

die Werte

$$\left(\sqrt{-\mathrm{i}}\right)_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}},$$

$$\left(\sqrt{-\mathrm{i}}\right)_2 = \cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{4}}.$$

Insbesondere ist die Quadratwurzel aus der komplexen Zahl

$$z = a + b\,\mathrm{i}$$

in der arithmetischen Form

$$\sqrt{a+b\,\mathrm{i}} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\cdot \operatorname{sgn} b\right].$$

sgn *b* bedeutet »Vorzeichen von *b*«.

Wenn wir nun noch verabreden, dass wie bei reellen Zahlen

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

sein soll, wobei *n* eine positive ganze und *m* eine beliebige ganze Zahl ist, dann sind damit die Potenzen komplexer Zahlen mit rationalen Exponenten definiert. Es bleibt als vorläufig letzter Schritt die Zulassung und Erklärung **irrationaler** Exponenten (siehe Kap. 5.8). Zuvor behandeln wir jedoch noch den

Spezialfall: Komplexe *n*-te Einheitswurzeln x_e

Aus

$$x_e^n = 1 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 \quad\Rightarrow\quad x_{e_k} = \cos\frac{k\cdot 2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{k\cdot 2\pi}{n} \quad \text{und aus}$$

$$x_e^n = -1 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi \quad\Rightarrow\quad x_{e_k} = \cos\frac{\pi + k\cdot 2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + k\cdot 2\pi}{n},$$

mit $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Beispiele:

$$x_e^3 = 1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_{e_0} = 1 \\ x_{e_1} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3} \\ x_{e_2} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3} \end{cases} \qquad x_e^3 = -1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_{e_0} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3} \\ x_{e_1} = -1 \\ x_{e_2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x_e^4 = 1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_{e_0} = 1 \\ x_{e_1} = \mathrm{i} \\ x_{e_2} = -1 \\ x_{e_3} = -\mathrm{i} \end{cases} \qquad x_e^4 = -1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_{e_0} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2} \\ x_{e_1} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2} \\ x_{e_2} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2} \\ x_{e_3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Die Lösungen der binomischen Gleichung $x^n = a$

Mit Hilfe der *n*-ten Einheitswurzeln lassen sich die Lösungen dieser Gleichung so darstellen:

$$x_k = \begin{cases} \sqrt[n]{a}\cdot x_{e_k} & \text{für } a > 0, \text{ wobei } x_{e_k} \text{ die Lösungen der Gleichung } x_e^n = 1 \text{ sind,} \\ \sqrt[n]{-a}\cdot x_{e_k} & \text{für } a < 0, \text{ wobei } x_{e_k} \text{ die Lösungen der Gleichung } x_e^n = -1 \text{ sind.} \end{cases}$$

5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

Es sei z eine beliebige, von 0 verschiedene komplexe Zahl:

$$z = r\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right) = r\left[\cos\left(\varphi_0 + k\cdot 2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\varphi_0 + k\cdot 2\pi\right)\right] = \mathrm{e}^{\varphi_0 + k2\pi} \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$$

Dann soll unter z^v (v reell) jede der folgenden komplexen Zahlen verstanden werden:

$$z^v = r^v\left[\cos v\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right) + \mathrm{i}\sin v\left(\varphi + k\cdot 2\pi\right)\right] = r^\nu\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(\varphi + k2\pi)}\,.$$

Hinweis: Für die so allgemein definierten Potenzen komplexer Zahlen gelten die Grundregeln für das Rechnen mit Potenzen (siehe Kap. 5.4), nicht mehr.