Einführung

in die

Funktionentheorie

Teil I und II

Siegfried Petry

Fassung vom 4. Februar 2013

I n h a l t

1. Teil

1. T e i l

1. Einleitung

Die Funktionentheorie ist die Lehre von den Funktionen mit komplexen Variablen und somit eine Erweiterung und Verallgemeinerung der Analysis. Dementsprechend wird die Lehre von den komplexen Zahlen hier vorausgesetzt. Wie die Analysis beginnt auch die Funktionentheorie mit der Untersuchung der Zahlenfolgen, hier also der Folgen komplexer Zahlen.

Die Lehre von den Zahlenfolgen gehört schon »im Reellen« nicht gerade zu den unterhaltsamsten und aufregendsten Gebieten der Mathematik, und daran ändert sich auch nichts, wenn man sie auf komplexe Zahlen ausdehnt. Aber erst durch die theoretische Durchdringung der Zahlenfolgen ist eine gründliche und sichere Grundlegung der Analysis (Differential- und Integralrechnung) und der Funktionentheorie (Analysis komplexer Funktionen) möglich geworden. Auch haben dadurch die Analysis und die Funktionentheorie erst die begriffliche Schärfe und die Konsistenz der Beweisführung gewonnen, die seit EUKLID für die älteren Gebiete der Mathematik kennzeichnend sind und als unerlässlich gelten.

Um den Umfang dieses Buches nicht zu groß werden zu lassen, habe ich schweren Herzens auf die Beweise der Lehrsätze verzichtet, obwohl ich weiß, dass dadurch ein Teil fehlt, der für die Schulung mathematischen Denkens unverzichtbar ist. Ich erwäge jedoch, bei Interesse und entsprechender Nachfrage die Beweise in einem Anhang zusammenzustellen.

Das Studium der komplexen Zahlen hat gezeigt, dass man mit ihnen wie mit reellen Zahlen rechnen kann. Dabei gibt es lediglich zwei Ausnahmen:

- Bei Potenzen mit irrationalen Exponenten gelten die bekannten Rechenregeln nicht, und
- die Kleiner/Größer-als-Relation kann nur auf die Beträge

$$r_n = |z_n|$$

  der komplexen Zahlen angewendet werden.

Im Übrigen aber gilt, dass es bei allen mit Buchstabengrößen angestellten Berechnungen gleichgültig ist, ob ein darin auftretender Buchstabe z eine reelle oder eine komplexe Zahl darstellt.

So gelten z. B. der binomische Lehrsatz, die Lehre von den Determinanten und die Verfahren zur Lösung von Systemen linearer Gleichungen unverändert auch »im Komplexen«.

Dies lässt vermuten, dass auch andere Gebiete der Mathematik auf komplexe Zahlen ausgedehnt werden können. Dass dies tatsächlich der Fall ist, wird in diesem Buch zunächst für die unendlichen Zahlenfolgen und Reihen gezeigt. Damit wird – wie sich erweisen wird – der Mathematik ein neues und überaus fruchtbares Gebiet erschlossen, das auch von großer praktischer Bedeutung ist.

Oft ist mit der Zulassung komplexer Zahlen auch eine erhebliche Vereinfachung und Abrundung der Theorie verbunden. Beispiele dafür sind die (nun) unbeschränkte Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Algebra und die Tatsache, dass das Wurzelziehen ausnahmslos möglich ist, wenn man das Zahlensystem um die komplexen Zahlen erweitert.

Schließlich werden sich im Folgenden überraschende Zusammenhänge zwischen wichtigen Zahlen (e und π) sowie zwischen ganz unterschiedlichen Funktionen zeigen.

2 Unendliche Zahlenfolgen mit komplexen Gliedern

2.1 Definition Zahlenfolge

Wenn durch irgendeine Vorschrift jeder natürlichen Zahl 1, 2, 3, ... eine bestimmte Zahl z_1, z_2, z_3, ... zugeordnet ist, so bilden diese Zahlen eine (unendliche) Zahlenfolge.

Eine Zahlenfolge (kurz auch Folge genannt) wird bezeichnet mit

$$\left(x_1, x_2, \ldots\right) \quad \text{oder} \quad \left(x_n\right).$$

Beispiele für komplexe Zahlenfolgen sind:

$$\left(z_n\right) = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{n}\right), \quad \left(z_n\right) = \left(\left(1+\mathrm{i}\right)^n\right), \quad \left(z_n\right) = \left(\frac{1+n\,\mathrm{i}}{n!}\right).$$

Eine Zahlenfolge (z_n) heißt beschränkt, wenn es eine positive Zahl S gibt, sodass für alle n

$$\left|z_n\right| \leq S$$

ist. S heißt dann eine Schranke für die Beträge der Glieder der Folge.

Zur Veranschaulichung einer Zahlenfolge kann die dazu gehörige Punktfolge in der komplexen Zahlenebene dienen.

2.2 Nullfolgen

2.2.1 Definition Nullfolge

Eine Zahlenfolge wie z. B.

$$\left(1+\mathrm{i}, \quad \frac{1+\mathrm{i}}{2}, \quad \frac{1+\mathrm{i}}{3}, \ldots\right) = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{n}\right),$$

deren Glieder mit wachsender Nummer n sich unbeschränkt der Null nähern, heißt eine Nullfolge. Doch was bedeutet »sich unbeschränkt der Null nähern«? Es gibt einige sehr viel schlechtere Beschreibungsweisen des damit gemeinten Sachverhalts, aber nur eine bessere, die wirklich aussagekräftig ist und sich durchgesetzt hat. Diese lautet:

Eine Zahlenfolge (z_n) heißt Nullfolge, wenn sich für jede positive Zahl ε immer eine Zahl n_0 angeben lässt, sodass für alle $n \geq n_0$

$$|z_n| < \varepsilon$$

ist.

Im obigen Beispiel ist

$$\left|z_n\right| = \frac{\sqrt{2}}{n},$$

und es ist stets

$$\frac{\sqrt{2}}{n_0} < \varepsilon, \text{ wenn } n_0 > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \text{ ist.}$$

Diese Gleichung liefert für jeden positiven Wert von ε – und sei er noch so klein – eine Zahl n_0, von der an stets

$$|z_n| < \varepsilon$$

ist. Die zu den Zahlen z_n mit $n \geq n_0$ gehörigen Punkte der Zahlenebene liegen alle innerhalb einer »ε-Umgebung« von O, das heißt, innerhalb eines Kreises um O mit dem Radius ε.

2.2.2 Sätze über Nullfolgen

Es gelten im Wesentlichen die gleichen Sätze wie für reelle Nullfolgen. Sie lassen sich mit etwas »Epsilontik« leicht beweisen.

1. Jede Nullfolge ist eine beschränkte Zahlenfolge.

2. Ist (z_n) eine Nullfolge und (y_n) irgendeine beschränkte Zahlenfolge, so ist auch die Folge (z'_n) mit den Gliedern

$$z'_n = y_n \cdot z_n$$

eine Nullfolge.

3. Es sei (z_n) eine Nullfolge und (z'_n) eine zu untersuchende Zahlenfolge. Ferner sei die Ungleichung

$$|z'_n| \leq K \cdot |z_n|,$$

wobei K eine bestimmte positive Zahl ist, für alle $n \geq n_0$ erfüllt, dann ist auch (z'_n)eine Nullfolge.

4. Sind (z_n) und (z'_n) zwei Nullfolgen, so sind auch die Folgen mit den Gliedern

$$z_n \pm z'_n \quad \text{und} \quad z_n \cdot z'_n$$

Nullfolgen. Dafür sagt man kurz: Nullfolgen dürfen gliedweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden.

2.2.3 Definition Konvergenz einer Zahlenfolge

Eine Zahlenfolge (z_n), zu der es eine Zahl ζ von der Art gibt, dass die Folge $(z_n - \varsigma)$ eine Nullfolge ist, heißt konvergent mit dem Grenzwert (oder Limes) ζ. Diesen Sachverhalt beschreibt man auch so: Es geht z_n gegen ζ, wenn n gegen unendlich geht, oder

$$z_n \to \varsigma \text{ wenn (oder: für) } n \to \infty \text{ oder } \lim_{n\to\infty} z_n = \varsigma.$$

Ersetzt man oben den Begriff »Nullfolge« durch dessen Definition, so kann man auch sagen:
Eine Zahlenfolge (z_n) konvergiert gegen ζ, wenn man für jede beliebig kleine positive Zahl ε eine Zahl n_0 angeben lässt, sodass für alle $n \geq n_0$

$$|z_n - \varsigma| < \varepsilon$$

ist.

2.2.4 Sätze über konvergente Zahlenfolgen

1. Wenn eine Zahlenfolge gegen eine Zahl ζ konvergiert, kann sie nicht gleichzeitig gegen eine andere Zahl η konvergieren (Eindeutigkeit der Konvergenz).

2. Eine konvergente Zahlenfolge ist stets eine beschränkte Zahlenfolge.

3. Sind (z_n) und (z'_n) konvergente Folgen mit den Grenzwerten ζ bzw. ζ', so sind auch die Folgen $(z_n + z'_n)$ und $(z_n - z'_n)$ konvergent mit den Grenzwerten $\zeta + \zeta'$ bzw. $\zeta - \zeta'$. Also: Aus

$$z_n \to \varsigma \quad \text{und} \quad z'_n \to \varsigma' \quad \text{folgt} \quad z_n \pm z'_n \to \varsigma \pm \varsigma'.$$

4. Unter den gleichen Voraussetzungen wie oben gilt ferner

$$z_n \cdot z'_n \to \varsigma \cdot \varsigma',$$

und wenn außerdem alle $z'_n \neq 0$ und $\zeta' \neq 0$ sind, geht

$$\frac{z_n}{z'_n} \to \frac{\varsigma}{\varsigma'}.$$

5. Jede durch Umordnen einer konvergenten Zahlenfolge (z_n) entstandene Zahlenfolge und jede Teilfolge (z'_n) von (z_n) ist ebenfalls konvergent und hat denselben Grenzwert wie diese.

6. Eine Zahlenfolge (z_n) werde in zwei Teilfolgen (z'_n) und (z''_n) zerlegt. Wenn diese beiden konvergent sind und denselben Grenzwert ζ haben, so ist auch (z_n) konvergent mit dem Grenzwert ζ.

7. Ist (z_n) eine konvergente Zahlenfolge mit dem Grenzwert ζ und geht die Folge (z'_n) aus ihr durch endlich viele Änderungen hervor, so ist auch (z'_n) konvergent mit dem Grenzwert ζ.

2.2.5 Divergente Zahlenfolgen, Konvergenzkriterien

Jede Zahlenfolge (z_n), die nicht gegen einen bestimmten (endlichen) Wert ζ konvergiert, heißt divergent.

1. Eine Zahlenfolge

$$(z_n) = (x_n + \mathrm{i}\, y_n),$$

wobei (x_n) und (y_n) reelle Zahlenfolgen sind, ist genau dann konvergent, wenn sowohl (x_n) als auch (y_n) konvergent sind. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty}(z_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n) + \mathrm{i}\lim_{n\to\infty}(y_n).$$

2. Eine Zahlenfolge (z_n) ist genau dann konvergent, wenn sich für jede noch so kleine positive Zahl ε eine Zahl n_0 angeben lässt, sodass

$$|z_{n'} - z_n| < \varepsilon$$

ist, wenn n und $n' \geq n_0$ sind.

3 Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern

3.1 Allgemeines

Unter einer unendlichen Reihe versteht man – wie im Reellen – eine Summe mit unbeschränkt vielen Summanden, die nach einer bestimmten Vorschrift (Bildungsgesetz) berechnet wurden. Diese Summanden sind jetzt komplexe Zahlen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$$

Da eine Summe mit unbeschränkt vielen Summanden nicht berechnet werden kann, ist dieser Ausdruck zunächst unbestimmt. Zur Behebung dieser Schwierigkeit wird der Begriff der Teilsumme der unendlichen Reihe eingeführt. Die Teilsummen sind der Reihe nach:

$$s_1 = z_1, \quad s_2 = z_1 + z_2, \quad s_3 = z_1 + z_2 + z_3 = s_2 + z_3, \cdots \; s_n = s_{n-1} + z_n.$$

Sodann wird die Folge der Teilsummen auf ihre Konvergenz hin untersucht und gegebenenfalls ihr Grenzwert bestimmt. (Auf diese Weise wird das Problem der Summation von unbeschränkt vielen Summanden auf die Grenzwertbestimmung einer Zahlenfolge zurückgeführt.) Wenn die Folge der Teilsummen

$$(s_n) = (s_1,\ s_2,\ s_3, \dots)$$

gegen einen Grenzwert S konvergiert, dann bezeichnet man die unendliche Reihe als konvergent, anderenfalls als divergent. Im ersten Fall nennt man den Grenzwert S der Folge den **»Wert der unendlichen Reihe«** und schreibt dies:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Eine unendliche Reihe komplexer Zahlen besteht aus einer unendlichen Reihe reeller Zahlen (den Realteilen der Glieder der Reihe) und aus einer unendlichen Reihe imaginärer Zahlen (den mit i multiplizierten Imaginärteilen der Glieder):

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{i} \cdot \operatorname{Im} z_n.$$

Daher gilt: Eine Reihe mit komplexen Gliedern ist genau dann konvergent, wenn die aus den reellen bzw. aus den imaginären Teilen ihrer Glieder gebildeten Reihen konvergent sind. Wenn die Werte der beiden Teilreihen s bzw. s' sind, hat die ursprüngliche Reihe den Wert $S = s + \mathrm{i}\, s'$.

Ein analoger Satz gilt für die **absolute Konvergenz** einer Reihe mit komplexen Gliedern. (Eine Reihe mit komplexen Gliedern heißt absolut konvergent, wenn auch die Reihe konvergiert, deren Glieder gleich dem Betrag der entsprechenden Glieder der ursprünglichen Reihe sind. – Die neue Reihe hat lauter positive reelle Glieder.)

3.2 Komplexe Potenzreihen

Eine komplexe Potenzreihe ist eine Reihe von der Art

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n = a_0 + a_1\left(z - z_0\right) + a_2\left(z - z_0\right)^2 + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten a_n sowie z und z_0 beliebige komplexe Zahlen sind. Dabei werden die Koeffizienten a_n sowie die Zahl z_0 als konstant angesehen, z dagegen als variabel. Diese Reihe wird auch als Potenzreihe in $(z - z_0)$ bezeichnet oder als Potenzreihe mit dem Mittelpunkt z_0.

Ob eine Potenzreihe (oder die Folge ihrer Teilsummen) konvergiert, hängt einerseits von den Koeffizienten a_n, andererseits im Allgemeinen auch von z ab. Ein Wert (oder ein Punkt) z, für den die Potenzreihe konvergiert, heißt Konvergenzpunkt; ein Wert, für den sie divergiert, heißt Divergenzpunkt der Reihe. Es gibt Reihen, die überall (d. h. für alle Werte z oder in jedem Punkt der Zahlenebene) konvergieren und solche, die nirgends (außer in z_0) konvergieren.

Für jede Reihe der oben angegebenen Art, die weder überall noch nirgends (außer in z_0) konvergiert, gibt es eine bestimmte positive Zahl r derart, dass die Reihe für jedes z, für das

$$\left|z - z_0\right| < r$$

Absolut konvergiert, für jedes z, für das

$$\left|z - z_0\right| > r$$

ist, divergiert.

Die den Zahlen z entsprechenden Punkte liegen innerhalb bzw. außerhalb des Kreises um z_0 mit dem Radius r. Dieser Kreis heißt der **Konvergenzkreis** der Reihe, sein Radius heißt **Konvergenzradius**.

Für die Punkte auf dem Rand des Konvergenzkreises sind keine allgemeinen Aussagen möglich. Sie erfordern von Fall zu Fall eine eigene Untersuchung.

Der Wert einer Potenzreihe ist eine Funktion der Variablen z; ihr Definitionsbereich ist der Konvergenzkreis der Reihe. Darüber mehr im 2. Teil.

2. T e i l

1 Definitionen

1.1 Funktionen einer komplexen Variablen

Einer Menge *M* von komplexen Zahlen *z* sei durch eine bestimmte Rechenvorschrift *f* je genau eine komplexe Zahl *w* zugeordnet. Dann bezeichnet man die Größe *w* als eine Funktion der Größe *z* und schreibt dies:

$$w = f(z).$$

Die Menge *M* heißt Definitionsbereich *D* der Funktion *f*(*z*). Die Menge aller Zahlen, welche die »abhängige Variable« *w* annimmt, wenn die »unabhängige Variable« *z* alle Werte des Definitionsbereichs durchläuft, heißt Wertebereich *W* der Funktion. Die Zahl *w*, die durch die Funktion einer Zahl *z* zugeordnet ist, heißt der zu *z* gehörige Funktionswert *w*(*z*).

Es sei *f*(*z*) eine Funktion von *z* und *w* der Funktionswert von *z*, also *w* = *f*(*z*). Setzen wir

$$z = x + \mathrm{i}\, y \quad \text{und} \quad w = u + \mathrm{i}\, v,$$

so sind *u* und *v* reelle Funktionen der beiden reellen Variablen *x* und *y*:

Man nennt *u* den reellen und *v* den imaginären Teil der Funktion *f*(*z*). (Der zweite Name ist nicht ganz korrekt, denn der »imaginäre Teil« ist ja eine reelle Funktion – genauso wie der »Imaginärteil« einer komplexen Zahl eine reelle Zahl ist. Aber diese Namenskonventionen sind bequem und haben sich daher durchgesetzt.)

Da wir es bei Funktionen einer komplexen Veränderlichen mit vier Variablen (*x*, *y*, *u*, *v*) zu tun haben, ist eine bequeme Veranschaulichung, wie wir sie von reellen Funktionen mit zwei oder auch drei Variablen kennen, nicht möglich. Bei Funktionen einer komplexen Variablen sind die Funktionswerte ebenfalls komplexe Zahlen, die sich als Punkte in der *UV*-Ebene darstellen lassen. Diese Punkte müssen dann auf irgendeine Weise mit den jeweils dazugehörigen Punkten der *XY*-Ebene verknüpft werden. Dies kann etwa dadurch geschehen, dass man für eine Anzahl von Kurven in der *XY*-Ebene (z. B. für die Geraden eines Gitternetzes) die dazugehörigen Bildkurven in der *UV*-Ebene konstruiert und zusätzlich eine Auswahl einander entsprechenden Punkten markiert.

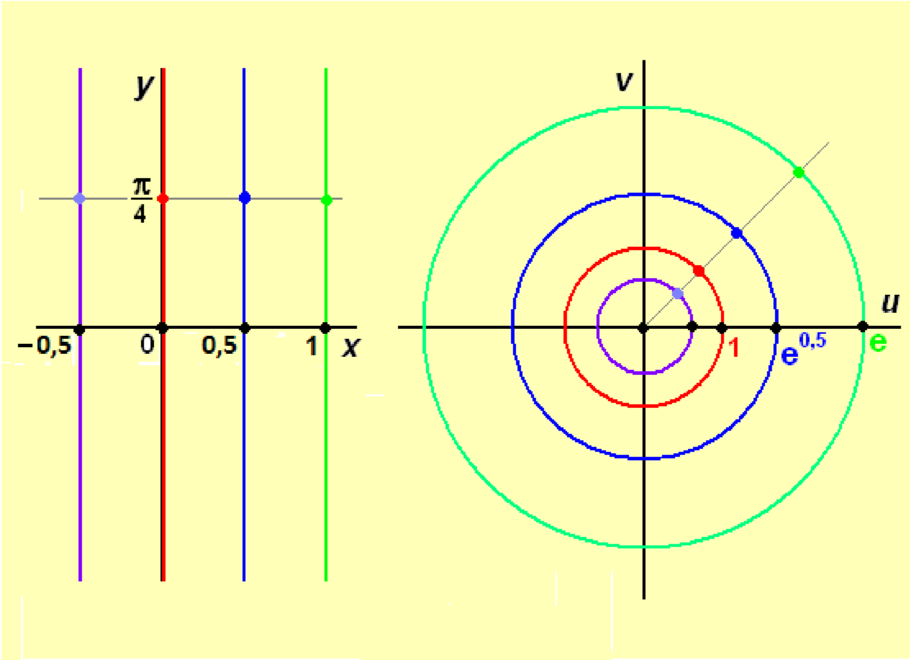
Beispiel:

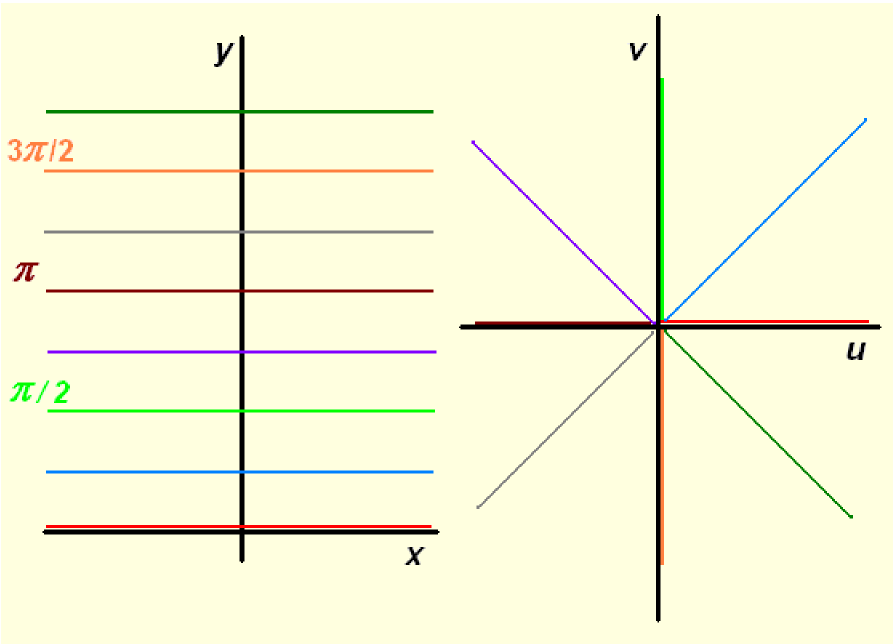
$$w = f(z) = e^{z} = e^{x+\mathrm{i}\, y} = e^{x} \cdot e^{\mathrm{i}\, y} = e^{x}(\cos y + \mathrm{i} \sin y).$$

Hier ist

$$u = e^{x} \cos y, \;\; v = e^{x} \sin y \quad \text{und daher} \quad u^{2} + v^{2} = e^{2x} \quad \text{und} \quad v = (\tan y) u.$$

Die Geraden *x* = konst. der *xy*-Ebene werden als Kreise mit dem Radius e^{x} in die *uv*-Ebene abgebildet, und die Geraden *y* = konst. als Gerade durch den Ursprung mit der Steigung *y*.





1.2 Grenzwert einer Funktion einer komplexen Variablen

Wie bei den reellen Funktionen spielt auch hier der Begriff des Grenzwerts eine wichtige Rolle, und er wird hier analog wie dort definiert:

Dem Definitionsbereich D einer Funktion $f(z)$ werde eine Zahlenfolge (z_n) entnommen, die dem Grenzwert ζ zustrebt und deren Glieder sämtlich von ζ verschieden seien. Wenn für a l l e solche Zahlenfolgen die Folge (w_n) der dazu gehörigen Funktionswerte $w_n = f(z_n)$ demselben Grenzwert ω zustrebt, dann sagt man, es sei der Grenzwert von $f(z)$ für z gegen ζ gleich ω, und schreibt dies:

$$\lim_{z \to \zeta} w = \lim_{z \to \zeta} f(z) = \omega$$

Dieser Sachverhalt kann auch so ausgedrückt werden:

Für jede noch so kleine positive Zahl ε lässt sich stets eine andere positive Zahl δ angeben, so dass für

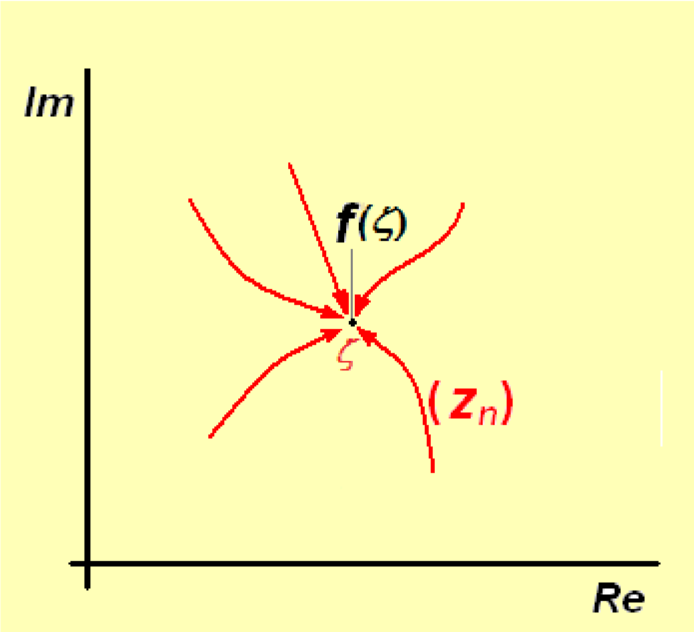
$$|z-\varsigma| < \delta \text{ stets } |f(z)-\omega| < \varepsilon \text{ ist.} \quad (z \in D)$$

1.3 Stetigkeit einer Funktion

Eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z ist an der Stelle $z = \zeta$ stetig, wenn stets

$$\lim_{z\to\varsigma} f(z) = f(\varsigma)$$

ist. (»Stets« bedeutet hier: für jeden beliebigen Weg der Annäherung an den Wert ζ.)



Anders ausgedrückt: An einer Stelle, an der die Funktion stetig ist, fällt der Grenzwert der Funktion bei Annäherung an die Stelle ζ stets mit dem Funktionswert an der Stelle ζ zusammen.

Ist eine Funktion an jeder Stelle des Definitionsbereichs D stetig, so sagt man, sie sei im ganzen Definitionsbereich stetig.

Wie bei den reellen Funktionen gilt:

- Jedes Polynom einer komplexen Veränderlichen z ist in der ganzen z-Ebene stetig.
- Eine rationale Funktion von z ist überall dort stetig, wo sie definiert ist.
- Eine Funktion $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$ ist genau an den Stellen stetig, an denen die reellen Funktionen u und v stetig sind.

2 Potenzreihen als Funktionen einer komplexen Variablen

Eine (komplexe) Potenzreihe (siehe 1. Teil)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z-z_0\right)^n = a_0 + a_1 \left(z-z_0\right) + a_2 \left(z-z_0\right)^2 + \cdots$$

mit dem Mittelpunkt z_0 und einem Konvergenzradius $r > 0$ hat für jeder Stelle z im Innern ihres Konvergenzkreises einen bestimmten Wert. Also wird durch die Potenzreihe jedem Wert z im Innern des Konvergenzkreises ein bestimmter Zahlenwert w zugeordnet. Genau dies ist aber das Kennzeichen einer Funktion. Also definiert die Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises eine bestimmte Funktion $w = f(z)$.

Von dieser Funktion sagt man, sie sei durch die Potenzreihe dargestellt oder (in besonderen Fällen) sie sei in die Potenzreihe entwickelt.

Die durch Potenzreihen dargestellten oder darstellbaren Funktionen heißen **analytische Funktionen**.

Analytische Funktionen sind im Innern ihres Konvergenzkreises stetig und differenzierbar.

3 Polynomfunktionen einer komplexen Variablen

Eine Funktion, die durch einen Ausdruck der Form

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

gegeben ist, heißt Polynomfunktion. Man kann Polynomfunktionen auffassen als Potenzreihen, bei denen nur endlich viele Koeffizienten von null verschieden sind.

3.1 Der Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

dessen Grad $n \geq 1$ ist, hat mindestens eine Nullstelle. Das heißt: Wenn n eine natürliche Zahl ist und $a_0, a_1, \ldots, a_n$ beliebige komplexe Zahlen sind und $n \geq 1$ ist, gibt es mindestens eine komplexe Zahl ζ, für die

$$p(\varsigma) = a_0 + a_1 \varsigma + a_2 \varsigma^2 + \cdots + a_n \varsigma^n = 0$$

ist.

3.2 Zerlegung ganzer rationaler Funktionen in Linearfaktoren

Gegeben eine ganze rationale Funktion n-ten Grades der komplexen Veränderlichen z

$$f(z) = p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

und es sei z_1 eine Nullstelle des Polynoms. Dann ist, wie man leicht zeigen kann, dieses Polynom durch $(z - z_1)$ ohne Rest teilbar. Die Division ergibt ein neues Polynom $p_1(z)$ von $(n - 1)$. Grad, sodass

$$p(z) = \left(z - z_1\right) \cdot p_1\left(z\right),$$

wobei der Koeffizient des höchsten Gliedes z^{n-1} wiederum a_n ist.

Wenn $n > 1$ ist, so ist $(n - 1) > 0$, und man kann auf p_1 wiederum den Fundamentalsatz anwenden, wonach auch dieses Polynom mindestens eine Nullstelle z_2 hat, woraus folgt

$$p_1 = (z - z_2) \cdot p_2(z),$$

und so weiter. Schließlich erhält man für das ursprüngliche Polynom (und die ursprüngliche ganze rationale Funktion) die »Produktdarstellung«

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Also gilt: Jedes Polynom n-ten Grades ($n \geq 1$) kann als Produkt von n Polynomen 1. Grades (sog. **Linearfaktoren**) und des Koeffizienten a_n dargestellt werden.

Daraus folgt sofort, dass ein Polynom n-ten Grades genau n Nullstellen hat, die aber nicht alle verschieden sein müssen. Vielmehr können jeweils mehrere der Nullstellen und damit jeweils mehrere der Linearfaktoren gleich sein. Bezeichnen wir die voneinander verschiedenen Nullstellen mit ζ_1, ζ_2,..., ζ_k und die Häufigkeit ihres Auftretens der Reihe nach mit ν_1, ν_2,...,ν_k, so können wir die Produktdarstellen des Polynoms so schreiben:

$$p(z) = a_n (z - \varsigma_1)^{\nu_1} (z - \varsigma_2)^{\nu_2} \cdots (z - \varsigma_k)^{\nu_k}.$$

3.3 Reelle Polynome einer komplexen Variablen

Ein Polynom einer komplexen Veränderlichen, dessen Koeffizienten a_k alle reell sind, wird ein **reelles Polynom** genannt.

Hat ein reelles Polynom $p(z)$ eine nicht reelle Nullstelle

$$z_1 = x_1 + \mathrm{i}\, y_1 \qquad y_1 \neq 0$$

so ist auch die zu z_1 konjugiert komplexe Zahl

$$\overline{z}_1 = x_1 - \mathrm{i}\, y_1$$

eine Nullstelle von $p(z)$. Dies kann so begründet werden, dass beim Ausmultiplizieren der Linearfaktoren die Entstehung eines nicht reellen Koeffizienten nur dann verhindert wird, wenn komplexe Nullstellen paarweise konjugiert komplex auftreten.

Das reelle Polynom $p(z)$ ist dann durch das reelle Polynom zweiten Grades

$$\left[z - (x_1 + \mathrm{i}\, y_1)\right]\left[z - (x_1 - \mathrm{i}\, y_1)\right] = (z - x_1)^2 + y_1^2$$

ohne Rest teilbar. Der Quotient ist dann wiederum ein reelles Polynom, usw. Folglich gilt:

Jedes reelle Polynom einer Veränderlichen, dessen Grad größer als 1 ist, kann in ein Produkt reeller Polynome ersten oder zweiten Grades zerlegt werden.

4 Rationale Funktionen einer komplexen Variablen

Es seinen $p(z)$ und $q(z)$ zwei Polynome in z:

$$
\begin{aligned}
p(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad && a_n \neq 0, \quad n \geq 0 \\
q(z) &= b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \qquad && b_m \neq 0, \quad m \geq 0
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

eine Funktion, die außerhalb der (endlich vielen) Nullstellen von $q(z)$ definiert ist. Eine solche Funktion heißt **rationale Funktion.** Für $n \geq m$ heißt die Funktion unecht gebrochen, anderenfalls echt gebrochen.

Haben $p(z)$ und $q(z)$ einen Linearfaktor $(z - z_k)$ oder mehrere gemeinsam, so kann der Bruch durch diese Linearfaktoren gekürzt werden. Die entstehende Funktion $g(z)$ hat überall dieselben Werte wie $f(z)$, außer in den Nullstellen z_k, in denen $f(z)$ im Gegensatz zu $g(z)$ nicht definiert ist.

Für rationale Funktionen gelten folgende Sätze:

1. Jede unecht gebrochene Funktion kann als Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen rationalen Funktion dargestellt werden.

2. Jede echt gebrochene Funktion kann als Summe von endlich vielen Teilbrüchen (Partialbrüchen) dargestellt werden.

3. Die Teilbruchzerlegung ist, abgesehen von der Reihenfolge der Brüche, nur auf *eine Weise* möglich.

5 Transzendente Funktionen einer komplexen Variablen

5.1 Die Exponentialfunktion

Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

worin x eine reelle Variable ist, ist beständig konvergent und definiert daher eine für alle Werte x stetige Funktion. In der Analysis wird gezeigt, dass diese Funktion mit der Exponentialfunktion e^x identisch ist. Sie wird nun dazu benutzt, die Exponentialfunktion für komplexe Variable zu definieren. Da eine Potenz mit komplexem Exponenten zunächst keinerlei Bedeutung hat, dürfte man diese ganz beliebig definieren. Eine solche Definition sollte jedoch nicht willkürlich geschehen, sondern die Zweckmäßigkeit und die Kontinuität berücksichtigen. Das bedeutet in diesem Fall, dass die Definition der Exponentialfunktion mit komplexem Exponenten für den Sonderfall eines reellen Exponenten (der ja auch eine komplexe Zahl ist) mit der Definition für reelle Exponenten übereinstimmt und dass die bisher gültigen Rechengesetze allenfalls erweitert, aber nicht außer Kraft gesetzt werden. Diese (und weitere Gesichtspunkte) berücksichtigt folgende Definition: Es ist

$$e^z \overset{\text{Def}}{=} 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Zunächst erkennt man, dass die Definition für den Fall, dass z eine reelle Zahl ist, mit der eingangs angegebenen Definition übereinstimmt. Ferner lässt sich zeigen, dass das Additionstheorem für die Exponentialfunktion weiterhin gilt, d. h. es ist

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}.$$

Ferner wird verabredet, dass für eine reelle Zahl a gelten soll:

$$a^z=\left(e^{\ln a}\right)^z=e^{z\cdot\ln a}.$$

Für eine reelle Zahl y folgt aus der Definition

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!}=1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\cdots\\
&=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+-\cdots \quad +i\left(\frac{y}{1!}-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+-\cdots\right)\\
&=\cos y+i\sin y,
\end{aligned}$$

oder in der meist benutzten Form

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Speziell folgt daraus

$$e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i,\quad e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{2\pi i}=1.$$

Setzt man $z = x + i\,y$, so ist

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right).$$

Aus dieser Gleichung kann der Wert von e^z für jedes z berechnet werden.

In der trigonometrischen (oder goniometrischen) Form geschrieben, ist

$$e^z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right).$$

Durch Vergleich der letzten beiden Gleichungen ergibt sich dann

$$r=\left|e^z\right|=e^x=e^{\operatorname{Re} z},\quad \varphi=y=\operatorname{Im} z.$$

Nach den Potenzregeln ist

$$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}\quad\text{und wegen}\quad e^{2\pi i}=e^{k2\pi i}=1$$

ist

$$e^{z+k2\pi i}=e^z,$$

wobei k irgendeine ganze (möglicherweise auch negative) Zahl ist. Die Exponentialfunktion ist also periodisch mit der Periode 2π. Daher folgt aus

$$e^u=e^v,$$

dass

$$u = v + k \cdot 2\pi$$

ist.

5.2 Die trigonometrischen Funktionen

Analog zur Exponentialfunktion werden auch die Funktionen sin *z* und cos *z* für komplexe Argumente *z* durch die aus dem Reellen bekannten Potenzreihen definiert:

$$\cos z \overset{\text{Def}}{=} 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots,$$

$$\sin z \overset{\text{Def}}{=} z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots.$$

Ferner wird definiert

$$\tan z \overset{\text{Def}}{=} \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cos z \neq 0$$

und

$$\cot z \overset{\text{Def}}{=} \frac{\cos z}{\sin z} \qquad \sin z \neq 0$$

Ähnliche Überlegungen und Untersuchungen wie oben bei der Exponentialfunktion bestätigen die Zweckmäßigkeit dieser Definitionen. Insbesondere lässt sich aus den Definitionen herleiten:

Die Eulerschen Formeln gelten auch für komplexe Zahlen *z*:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos z - \mathrm{i}\sin z$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) \qquad \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$$

Die erste und die zweite Gleichung folgen aus den Reihen der auftretenden Funktionen. Die dritte und vierte Gleichung ergeben sich durch Addition bzw. Subtraktion der ersten beiden.

Auch die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus gelten für komplexe Zahlen *w* und *z*:

$$\sin(w \pm z) = \sin w \cdot \cos z \pm \cos w \cdot \sin z$$

$$\cos(w \pm z) = \cos w \cdot \cos z \mp \sin w \cdot \sin z$$

Ebenso gilt

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

Durch Anwendung des Additionstheorems auf sin *z* = sin (*x* ± *i y*) erhält man zunächst

$$\sin(x \pm \mathrm{i}\,y) = \sin x \cdot \cos(\mathrm{i}\,y) \pm \cos x \cdot \sin(\mathrm{i}\,y).$$

Ersetzt man dann cos (i*y)* und sin (i*y)* durch die entsprechenden Exponentialfunktionen, wobei man *z* = 0 + *iy* setzt, so ergibt sich

$$\sin(x \pm \mathrm{i}\,y) = \sin x \cdot \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}\right) \pm \mathrm{i}\cos x \cdot \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}\right),$$

und dann – unter Vorgriff auf die Hyperbelfunktionen (siehe nächstes Kapitel) –

$$\sin\left(x \pm \mathrm{i}\, y\right) = \sin x \cdot \cosh y \pm \mathrm{i} \cos x \cdot \sinh y,$$

und ebenso

$$\cos\left(x \pm \mathrm{i}\, y\right) = \cos x \cdot \cosh y \mp \mathrm{i} \sin x \cdot \sinh y.$$

5.3 Die Hyperbelfunktionen

Ebenso wie bei den trigonometrischen Funktionen werden bei den Hyperbelfunktionen die Definitionen einfach auf komplexe Argumente übertragen:

$$\sinh z \overset{\text{Def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \cosh z \overset{\text{Def}}{=} \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}. \tag{5.1}$$

Daraus folgt dann

$$\sinh z = \frac{1}{\mathrm{i}} \sin(\mathrm{i}\, z) = -\mathrm{i} \sinh(\mathrm{i}\, z), \qquad \cosh z = \cos(\mathrm{i}\, z). \tag{5.2}$$

Über die Reihenentwicklung der jeweils rechts stehenden trigonometrischen Funktionen ergeben sich die beständig konvergenten Potenzreihen

$$\sinh z = \frac{z}{1!} + \frac{z^{3}}{3!} + \frac{z^{5}}{5!} + \cdots \qquad \cosh z = 1 + \frac{z^{2}}{2!} + \frac{z^{4}}{4!} + \cdots.$$

Aus (5.2) folgt insbesondere

$$\sinh(2\pi \mathrm{i}) = \frac{1}{\mathrm{i}} \sin(-2\pi) = 0, \qquad \cosh(2\pi \mathrm{i}) = \cos(-2\pi) = 1. \tag{5.3}$$

Mit Hilfe der Definitionsgleichungen (5.1) können die Additionstheoreme bestätigt werden:

$$\sinh\left(z_1 \pm z_2\right) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$
$$\cosh\left(z_1 \pm z_2\right) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$$

Setzt man darin $z_1 = z$ und $z_2 = 2\pi\mathrm{i}$, so erhält man mit Hilfe von (5.3) die Periodizitätseigenschaften

$$\sinh(z + 2\pi \mathrm{i}) = \sinh z, \qquad \cosh(z + 2\pi \mathrm{i}) = \cosh z,$$

und außerdem

$$\cosh^{2} z - \sinh^{2} z = 1.$$

5.4 Die Logarithmusfunktion

Es sei z wieder eine von 0 verschiedene komplexe Zahl und

$$|z| = r, \qquad \arg z = \varphi.$$

Dann gilt für die unendlich vielen Zahlen

$$w_k = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + k 2\pi), \qquad k \text{ ganzzahlig},$$

aber auch nur für diese

$$e^{w_k} = e^{\ln r + i(\varphi + k2\pi)} = e^{\ln r} \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i2k\pi} = r\,e^{i\varphi} = z.$$

Jede dieser Zahlen w_k (aber auch nur diese) soll ein natürlicher Logarithmus von z genannt und durch ln z bezeichnet werden.

Jede von 0 verschiedene komplexe Zahl z hat demnach unendlich viele Logarithmen. Alle diese Logarithmen stimmen im Realteil überein; ihre Imaginärteile unterscheiden sich nur um ganzzahlige Vielfache von 2π. Die Bildpunkte dieser Zahlen in der komplexen Zahlenebene liegen alle auf einer Parallelen im Abstand ± r zur senkrechten Achse und haben den Abstand 2π voneinander. Für genau einen dieser Punkte – er sei w^* genannt – gilt:

$$-\pi < \mathrm{Im}\left(w^*\right) \le \pi.$$

Diese Zahl w^* wird der Hauptwert $\ln^* z$ des natürlichen Logarithmus der Zahl z genannt. Für die anderen Werte gilt dann

$$\ln z = \ln^* z + k2\pi i, \qquad k \text{ ganzzahlig.}$$

Insbesondere ist

$$\ln^*(-1) = \pi i, \quad \ln^* i = \frac{\pi}{2} i, \quad \ln^*(-i) = -\frac{\pi}{2} i$$

und bei geeigneter Wahl der Werte

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \qquad \ln\frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2, \qquad z_1 \ne 0, \quad z_2 \ne 0.$$