Einführung

in die

Funktionentheorie

Teil III

Siegfried Petry

Fassung vom 05. Februar 2013

I n h a l t

1 Differenzierbarkeit einer Funktion einer komplexen Variablen

Eine Funktion f einer komplexen Variablen sei in einem Gebiet G der Zahlenebene definiert, und es sei z_0 eine Stelle im Inneren dieses Gebietes. Wenn der Differenzenquotient

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \quad \text{für } z \to z_0$$

oder – was dasselbe ist – der Differenzenquotient

$$\frac{f(z_0+\Delta z)}{\Delta z} \quad \text{für } \Delta z \to 0$$

stets gegen denselben Wert konvergiert, dann heißt die Funktion f an der Stelle z_0 differenzierbar. Der Grenzwert heißt Wert der Ableitung oder Wert des Differentialquotienten der Funktion f an der Stelle z_0. Gebräuchlich sind dafür folgende Bezeichnungen

$$f'(z_0) \text{ und } \left(\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dz}}\right)_{z_0}.$$

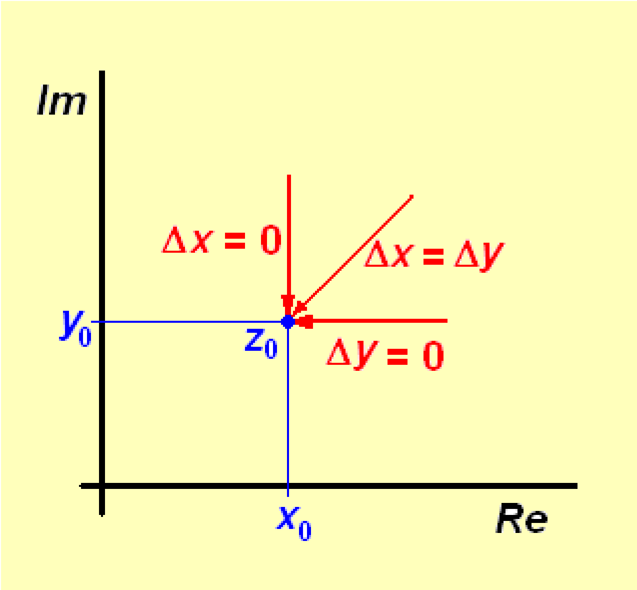
Beispiel einer Funktion, bei der dies nicht der Fall ist:

$$f(z)=|z|^2=x^2+y^2.$$

Hier ist

$$f(z+\Delta z)=(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2 \quad \text{und} \quad \Delta z=\Delta x+\Delta y,$$

$$\begin{aligned}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+y^2+2y\Delta y+(\Delta y)^2-x^2-y^2}{\Delta z}\\ &= \frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2+2y\Delta y+(\Delta y)^2}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}\end{aligned}$$



Für $\Delta x = 0$ (Annährung längs der Vertikalen) ist

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{2y}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\,2y,$$

für $\Delta y = 0$ (Annäherung längs der Horizontalen) ist

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = 2x,$$

für $\Delta y = \Delta x$ (Annäherung längs der unter 45° geneigten Geraden) ist

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{2x+2y}{1+\mathrm{i}}.$$

Die drei Grenzwerte sind nur dann gleich, wenn $x = y = 0$ ist. Also ist die Funktion in keinem Punkt außer *O* differenzierbar, und zwar ist $f'(0) = 0$.

Ist die Funktion *f* in einem Gebiet definiert und an jeder Stelle des Gebietes differenzierbar (kurz: »in diesem Gebiet differenzierbar«), dann ist auch die Ableitung der Funktion eine in diesem Gebiet definierte Funktion. Sie wird bezeichnet mit

$$f'(z), \quad \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f(z).$$

Jede in einem Punkt z_0 differenzierbare Funktion ist dort auch stetig, aber nicht jede dort stetige Funktion ist auch differenzierbar (siehe unten).

2 Die Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen eine Funktion einer komplexen Variablen differenzierbar ist.

Eine Funktion $f(z)$ sei in einem Gebiet ***G*** definiert und in einem Punkt z_0 im Innern dieses Gebietes differenzierbar. Es ist

$$z = x + \mathrm{i}\,y \quad \text{und} \quad z_0 = x_0 + \mathrm{i}\,y_0.$$

Im Allgemeinen besteht die Funktion $f(z)$ aus einem reellen Teil *u* und einem imaginären Teil *v*:

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}\,y) = u + \mathrm{i}\,v = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y),$$

wobei *u* und *v* reelle Funktionen von *z* und somit auch von *x* und *y* sind. Außerdem seien *u* und *v* im Punkt z_0 nach beiden Variablen partiell differenzierbar.

Beispiel: $f(z) = z^2 = (x+\mathrm{i}\,y)^2 = \underbrace{x^2-y^2}_{u} + \mathrm{i}\,\underbrace{2xy}_{v}.$

Wenn die Funktion $f(z)$ an der Stelle z_0 differenzierbar ist, so heißt das, dass der Differenzenquotient

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

für Δz gegen 0 stets einem Grenzwert G zustrebt (konvergiert). Gemäß der Definition der Konvergenz bedeutet dies, dass es für jede (noch so kleine) positive reelle Zahl δ eine reelle Zahl ε gibt, sodass

$$\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-G\right|<\delta$$

wird, wenn $|\Delta z|<\varepsilon$ ist.

Wir bezeichnen nun die von Δz abhängige, gegen 0 strebende (komplexe) Differenz zwischen dem Differenzenquotienten und G mit Δ:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-G=\Delta \tag{1}$$

und stellen auch $\boldsymbol{\Delta}$ und G als komplexe Zahlen dar:

$$\Delta=\Delta_1+\mathrm{i}\,\Delta_2 \qquad \Delta_1, \Delta_2 \text{ reell}$$
$$G=G_1+\mathrm{i}\,G_2 \qquad G_1, G_2 \text{ reell}$$

Setzen wir ferner

$$f(z_0)=u_0+\mathrm{i}\,v_0 \;\text{ und }\; f(z_0+\Delta z)=(u_0+\Delta u)+\mathrm{i}(v_0+\Delta v),$$

so wird aus Gleichung (1):

$$\frac{\left[(u_0+\Delta u)+\mathrm{i}(v_0+\Delta v)\right]-(u_0+\mathrm{i}\,v_0)}{\Delta z}-(G_1+\mathrm{i}\,G_2)=\Delta_1+\mathrm{i}\,\Delta_2.$$

Wir multiplizieren nun diese Gleichung mit $\Delta z = \Delta x + \mathrm{i}\,\Delta y$ und trennen dann die Gleichung in Realteil und Imaginärteil:

$$u_0+\Delta u+\mathrm{i}(v_0+\Delta v)-u_0-\mathrm{i}\,v_0=(\Delta x+\mathrm{i}\,\Delta y)(G_1+\mathrm{i}\,G_2+\Delta_1+\mathrm{i}\,\Delta_2).$$

Realteil:

$$\Delta u=\Delta x G_1-\Delta y G_2+\Delta x\Delta_1-\Delta y\Delta_2 \tag{2}$$

Imaginärteil:

$$\Delta v=\Delta x G_2+\Delta y G_1+\Delta x\Delta_2+\Delta y\Delta_1 \tag{3}$$

Setzt man in (2) $\Delta y = 0$, lässt also nur Veränderungen in x-Richtung zu, und teilt dann durch Δx, so erhält man den partiellen Differenzenquotienten für y = konst.

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{y=\text{konst.}}=G_1+\Delta_1.$$

Für $\Delta x \to 0$ geht auch $\Delta_1 \to 0$, und man erhält die partielle Ableitung nach x

$$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv u_x=G_1.$$

Setzt man dagegen in (2) $\Delta x = 0$, so erhält man analog für $\Delta y \to 0$ die partielle Ableitung nach y

$$\frac{\partial u}{\partial y}\equiv u_y=-G_2.$$

Entsprechend findet man aus (3)

$$\frac{\partial v}{\partial x} \equiv v_x = G_2, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv v_y = G_1.$$

Durch Vergleich der entsprechenden Gleichungen ergeben sich die **Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann:**

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x.$$

Sind die eingangs genannten Voraussetzungen nicht nur in einem Punkt z_0 sondern im ganzen Gebiet $\boldsymbol{G}$ erfüllt, so gelten diese Gleichungen auch im ganzen Gebiet.

Aus (1) folgt für $\Delta z \to 0$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \equiv f'(z) = G \equiv G_1 + \mathrm{i}\,G_2.$$

Setzt man für G_1 und G_2 die oben ermittelten Werte in allen möglichen Kombinationen ein, so erhält man für $f'(z)$ vier verschiedene Terme:

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_1 = u_x + \mathrm{i}\,v_x, \quad \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_2 = u_x - \mathrm{i}\,u_y, \quad \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_3 = v_y - \mathrm{i}\,u_y, \quad \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right)_4 = v_y + \mathrm{i}\,v_x.$$

Da die Funktionen u und v voneinander unabhängig sind, können sich vier verschiedene Werte ergeben, was bedeuten würde, dass die betrachtete Funktion nicht differenzierbar wäre. Notwendige Voraussetzung für die Differenzierbarkeit der Funktion im betrachteten Gebiet ist also die Gleichheit dieser vier Werte. Sie sind aber genau dann gleich, wenn die Differentialgleichungen von Cauchy-Riemann erfüllt sind. Das bedeutet, dass die Funktionen u und v nicht unabhängig voneinander gewählt werden dürfen, wenn $f(z)$ differenzierbar sein soll. Aber auch jede dieser beiden Funktionen für sich ist noch weiteren Bedingungen unterworfen. Davon handelt das nächste Kapitel.

3 Die Laplacesche Differentialgleichung

Wenn eine Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen in einem Gebiet $\boldsymbol{G}$ einmal differenzierbar ist, so ist sie – anders als bei Funktionen reeller Veränderlicher – dort auch ein zweites Mal differenzierbar. (Der Beweis ist erst mit Hilfe der Integralrechnung möglich.) Aus der Existenz von $f'(z)$ in einem Gebiet folgt also die Existenz von $f''(z)$ in diesem Gebiet, daraus wieder die Existenz von $f'''(z)$ usw. Also gilt:

Jede in einem Gebiet einmal differenzierbare Funktion einer komplexen Veränderlichen ist dort beliebig oft differenzierbar.

Wir betrachten nun wieder eine in einem Gebiert $\boldsymbol{G}$ differenzierbare Funktion

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}\,y) = u(x, y) + \mathrm{i}\,v(x, y)$$

und nehmen an, dass in $\boldsymbol{G}$ sowohl die partiellen Ableitungen erster Ordnung als auch alle partiellen Ableitungen höherer Ordnung der Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ existieren (was durchaus nicht selbstverständlich ist, da es sich ja hier um Funktionen reeller Veränderlicher handelt.). Dann erhält man aus den in $\boldsymbol{G}$ geltenden Gleichungen

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x$$

durch nochmaliges partielles Differenzieren die Gleichungen

$$u_{xx} = v_{yx} \quad \text{und} \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Da nach dem Satz von SCHWARZ

$$v_{yx} = v_{xy}$$

ist, gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Analog findet man

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Es gilt daher der (noch nicht vollständig bewiesene) Satz:

Eine reelle Funktion $u(x, y)$ kann nur dann der *reelle oder der imaginäre Teil* einer in einem Gebiet ***G*** differenzierbaren Funktion $f(z) = f(x + \mathrm{i}\, y)$ sein, wenn u in ***G*** alle partiellen Ableitungen erster und höherer Ordnung besitzt und wenn dort überall

$$u_{xx} + u_{yy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ist. Für die Summe der zweiten partiellen Ableitung schreibt man auch kurz Δu, wobei Δ der **Laplacesche Operator** ist. Die Gleichung

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

heißt die **Laplacesche Differentialgleichung.**

4 Differentiationsregeln

4.1 Potenzfunktionen

Bei der Potenzfunktion einer komplexen Variablen

$$f(z) = z^n = \left(x + \mathrm{i}\, y\right)^n \qquad n \text{ positiv ganzzahlig}$$

ist

$$f(z+\Delta z) = (z+\Delta z)^n = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} \Delta z + \binom{n}{2} z^{n-2} \left(\Delta z\right)^2 + \cdots + \left(\Delta z\right)^n$$

und daher

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \binom{n}{1} z^{n-1} + \binom{n}{2} z^{n-2} \Delta z + \cdots + \left(\Delta z\right)^{n-1}$$

und

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = n\, z^{n-1}.$$

Offensichtlich kann der Grenzwert berechnet werden, ohne dass irgendwelche Annahmen über den Weg des Grenzgangs gemacht werden müssen. Das bedeutet, dass der Grenzwert vom Weg unabhängig ist. Folglich ist die Funktion in der ganzen z-Ebene differenzierbar.

Es fällt auf, dass bei der Berechnung der Ableitung nirgends berücksichtigt werden muss, dass z eine komplexe Variable ist. Das bedeutet, dass auch die folgenden Differentiationsregeln einfach von den Funktionen reeller Variablen übernommen werden können. Insbesondere können Summen von Potenzfunktionen gliedweise differenziert werden. Dies gilt im Inneren ihres Konvergenzkreises auch für Potenzreihen.

4.2 Potenzreihen

Hat die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z_k + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

einen von null verschiedenen Konvergenzradius, so stellt sie im Inneren ihres Konvergenzbereichs eine Funktion $f(z)$ dar. Diese Funktion hat dort Ableitungen jeder Ordnung, die durch gliedweise Differentiation berechnet werden. Also ist

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \qquad f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n z^{n-2}$$

und

$$f^{(k)}(z) = \sum n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}.$$

Da

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = k!\binom{n}{k}$$

ist, kann man dafür auch schreiben

$$f^{(n)}(z) = k!\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k} a_n\, z^{n-k}.$$

Ersetzt man hierin $(n - k)$ durch n und dementsprechend n durch $(n + k)$, so ergibt sich die zum Rechnen bequemere Formel:

$$f^{(k)}(z) = k!\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n}{k} a_{k+n}\, z^{n}.$$

Hat eine Potenzreihe den Mittelpunkt z_0 (statt wie oben den Mittelpunkt 0), so ist

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_k (z - z_0)^k + \cdots.$$

Durch die Koordinatentransformation $\zeta = z - z_0$ kann die Gleichung auf die oben angegebene Form gebracht werden. Durch Rücktransformation ergibt sich für die k-te Ableitung dann

$$f^{(k)}(z) = k!\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n}{k} a_{k+n}\, \left(z - z_0\right)^{n}.$$

Potenzfunktionen und die durch Potenzreihen dargestellten Funktionen sind also im Inneren ihres Konvergenzbereichs reguläre (oder analytische) Funktionen.

4.3 Exponentialfunktion, trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Die Funktionen e^z, sin z, cos z, sinh z und cosh z werden auch im Komplexen durch beständig konvergente Potenzreihen dargestellt. Sie sind daher in der ganzen z-Ebene regulär (oder analytisch). Durch gliedweise Differentiation der Potenzreihen findet man

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^z, \quad \frac{\mathrm{d}\left(\sin z\right)}{\mathrm{d}z} = \cos z, \quad \frac{\mathrm{d}(\cos z)}{\mathrm{d}z} = -\sin z, \quad \frac{\mathrm{d}(\sinh z)}{\mathrm{d}z} = \cosh z, \quad \frac{\mathrm{d}(\cosh z)}{\mathrm{d}z} = \sinh z.$$

Weitere wichtige Ableitungen gewinnt man über die Umkehrfunktionen.

4.4 Umkehrfunktionen und die Ableitungen weiterer Funktionen

In einem Gebiet ***G*** sei eine reguläre (und somit differenzierbare und stetige) Funktion $w = f(z)$ definiert, und jeder zum Definitionsbereich der Funktion gehörige Funktionswert trete nur einmal auf.

Dann gibt es zu jedem auftretenden Funktionswert w genau eine Zahl z derart, dass $w = f(z)$ ist. Somit kann die Variable z als eine Funktion der Variablen w aufgefasst werden, wobei dann w die unabhängige und z die abhängige Variable ist. Auch »Definitionsbereich« und »Wertebereich« vertauschen dann ihre Rollen.

Die so definierte Funktion $z = g(w)$ heißt die Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu $w = f(z)$.

Der Differenzenquotient der inversen Funktion ist

$$\frac{\Delta z}{\Delta w} = \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}},$$

und der Differentialquotient ist

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}w} \equiv g'(z) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)} \qquad f'(z) \neq 0$$

Die Umkehrfunktion $g(z)$ ist also in ihrem Definitionsbereich und für $f'(z) \neq 0$ ebenfalls differenzierbar.

Unter Benutzung der Umkehrfunktion können nun weitere Funktionen differenziert werden.

Beispiel: Die Funktion

$$w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$$

ist für $-\pi < y \leq \pi$ in der ganzen z-Ebene umkehrbar eindeutig. Ihre Umkehrfunktion ist

$$z = \ln^* w,$$

der »Hauptwert« des natürlichen Logarithmus. Wegen

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}} = \frac{1}{\mathrm{e}^z} = \frac{1}{w}$$

ist

$$\frac{\mathrm{d}(\ln^* w)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{w}.$$

Durch Vertauschung der Variablen ergibt sich die übliche Schreibweise

$$\frac{\mathrm{d}(\ln^* z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}.$$

5 Konforme Abbildung durch analytische Funktionen

Gegeben sei eine analytische Funktion $w = f(z)$ der komplexen Variablen $z = x + \mathrm{i}\, y$:

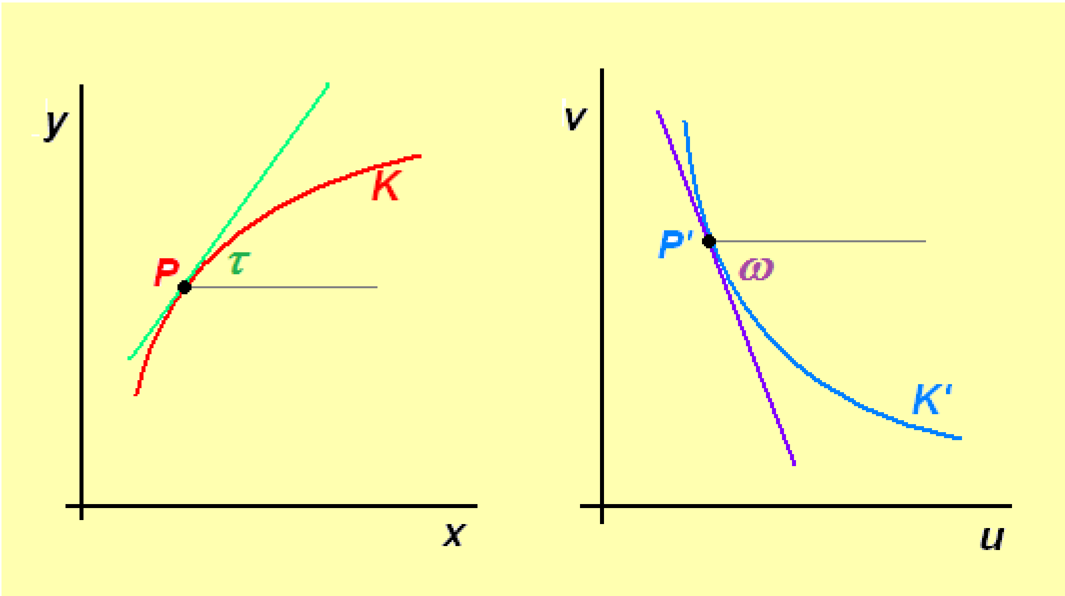
$$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y),$$

wobei wie immer u und v Funktionen der reellen Variablen x und y sind.

Nun durchlaufe z in der z-Ebene eine Kurve K, die durch die Gleichung $y = g(x)$ beschrieben sei (z. B. $y = x^2$). Dann durchläuft die abhängige Variable w in ihrer Ebene eine Kurve K', die beschrieben werden kann durch die Gleichung

$$w_{K'} = u\left[x, g(x)\right] + \mathrm{i}\, v\left[x, g(x)\right].$$

Die Kurve K' wird als das Bild oder als die Abbildung der Kurve K bezeichnet.



Die Steigung der Kurventangente in irgendeinem Punkt P mit $z_P = \zeta$ der Kurve $y = g(x)$ ist dann

$$\tan\tau = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\varsigma} = g'(\varsigma).$$

Dabei bedeutet der Index ζ, dass der Grenzwert an der Stelle $z = \zeta$ zu bilden ist.

Die Steigung der Bildkurve K' im Bildpunkt P' von P (unter der Voraussetzung, dass der auftretende Grenzwert existiert) ist

$$\tan\omega = \lim_{\Delta u \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right)_{\varsigma} = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_{\varsigma}$$

Nun ist

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y,$$

und

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y,$$

also ist

$$\tan\omega = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y}{u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y} = \frac{v_x\,\mathrm{d}x + v_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{u_x\,\mathrm{d}x + u_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,g'}{u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,g'},$$

wobei alle Ableitungen an der Stelle $z = \zeta$ zu bilden sind. Wegen der Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist

$$\tan\omega = \frac{v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,g'}{u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,g'} = \frac{-u_y + u_x g'}{u_x + u_y g'} = \frac{-\frac{u_y}{u_x} + \tan\tau}{1 + \frac{u_y}{u_x}\tan\tau}.$$

Da dieser Quotient im Allgemeinen existiert, hat die Steigung der Bildkurve einen definierten Wert. (Das Nullwerden des Nenners weist auf eine vertikale Tangente hin.)

Nun kann – da der Tangens jeden beliebigen Wert annehmen kann – jederzeit ein Winkel α so bestimmt werden, dass

$$\tan\alpha = \frac{u_y}{u_x}$$

ist, wobei

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

ist. Man kann dann schreiben

$$\tan\omega = \frac{-\tan\alpha + \tan\tau}{1 + \tan\alpha\,\tan\tau} = \tan(\tau - \alpha).$$

Die Differenz $\tau - \alpha$ kann zwischen $-\pi$ und π liegen. Folglich ist

$$\omega = \begin{cases} \tau - \alpha, & \text{wenn } -\frac{\pi}{2} < \tau - \alpha \le \frac{\pi}{2} \\ \tau - \alpha + \pi, & \text{wenn } \tau - \alpha < -\frac{\pi}{2} \\ \tau - \alpha - \pi, & \text{wenn } \tau - \alpha > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

oder

$$\omega = \tau - \alpha + k\pi \quad k = -1,\ 0,\ 1$$

wobei k so zu wählen ist, dass

$$-\frac{\pi}{2} < \omega \le \frac{\pi}{2}$$

ist. Wir betrachten nun eine weitere durch den Punkt P gehende Kurve, deren Steigung in P gleich $\tan\tau_1$ sei. Die Steigung ihrer Bildkurve im entsprechenden Bildpunkt ist dann

$$\tan\omega_1 = \tan(\tau_1 - \alpha)$$

und folglich

$$\omega_1 = \tau_1 - \alpha + k_1\pi \quad k_1 = -1,\ 0,\ 1$$

wobei für k_1 (und für die folgenden k_i) dasselbe gilt wie für k, und α den gleichen Wert wie oben haben soll. Die beiden Tangenten der Bildebene bilden dann miteinander den Winkel

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega + k_2\pi = (\tau_1 - \alpha + k_1\pi) - (\tau - \alpha + k\pi) = \tau_1 - \tau + k_3\pi = \Delta\tau.$$

Das heißt, die Tangenten bilden in beiden Ebenen den gleichen Winkel miteinander. Eine Abbildung mit dieser Eigenschaft heißt winkeltreu. Die betrachtete reguläre Funktion $w = f(z)$ erzeugt also eine winkeltreue Abbildung von Teilen der z-Ebene in die w-Ebene.

Betrachten wir nun ein Dreieck PQR in der Ursprungsebene und seine Abbildung $P'Q'R'$. Die Abbildungen der Dreiecksseiten sind im Allgemeinen nicht gerade, sondern gekrümmte Kurvenstücke. Die Winkel zwischen den Tangenten dieser Kurven in den drei Eckpunkten stimmen jedoch mit den entsprechenden Dreieckswinkeln in der z-Ebene überein.

Je kleiner man das ursprüngliche Dreieck macht, desto mehr nähert sich seine Abbildung einem Dreieck mit geraden Seiten an. Wegen der Gleichheit der Winkel sind diese beiden Dreiecke ähnlich und stimmen daher auch in den Seitenverhältnissen überein. Die winkeltreue Abbildung ist daher »im Kleinen« auch maßstabstreu. Eine solche Abbildung heißt **konforme Abbildung**.

Eine analytische Funktion erzeugt also eine konforme Abbildung.

Für eine hinreichend kleine Strecke Δz und ihre Abbildung Δw gilt wegen

$$\Delta w \approx \mathrm{d}w = f'(\zeta)\,\mathrm{d}z \equiv f'(\zeta)\Delta z.$$

Also ist der

$$\text{Abbildungsmaßstab } \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| \approx \left|f'(\zeta)\right|.$$