Die physikalische Rumpelkammer

5 Totale (vollständige) und andere Differentiale in der Thermodynamik

Die »Aufklärung«, die in der Höheren Mathematik (Abteilung Infinitesimalrechnung) hinsichtlich der Begriffe »infinitesimal«, »unendlich klein«, »verschwindend klein« und ähnlichen schon vor 100 Jahren stattgefunden und zu deren Ausrottung geführt hat, ist an der physikalischen Literatur nahezu spurlos vorübergegangen. Darüber wird in einem eigenen Artikel noch zu berichten sein. Hier geht es ganz im Gegenteil um merkwürdige Skrupel hinsichtlich der peinlich genauen Unterscheidung zwischen vollständigen und anderen Differentialen. Hier ein Beispiel, das für viele steht:

„In *geschlossenen* Systemen muss U (die innere Energie, S.P.) sich ändern, wenn mit der Außenwelt Arbeit (W) oder Wärme (Q) ausgetauscht wird ... Also gilt $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$, oder, präziser[1)]: $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$.“

Fußnote„1) Weil U Zustandsfunktion ist, ist dU totales Differential, nicht aber die Änderungen von Q und W.“

(Zitat aus: Leute, Physik und ihre Anwendungen in Technik und Umwelt, München 1995, S.150)

Es soll hier davon abgesehen werden, dass geschlossene Systeme per definitionem solche sind, die *keine* Energie mit der Umgebung austauschen. Worauf es mir hier ankommt, ist Folgendes:

1. Wenn mit der Umgebung die Arbeit ΔW und die Wärme ΔQ ausgetauscht werden, dann ist allerdings die Gleichung

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

völlig exakt und bedarf keiner Präzisierung.

2. Wohl aber wünscht man sich eine präzisere Erklärung dafür, dass aus dem ΔU plötzlich ein dU wird, was mathematisch etwas ganz Anderes ist. Zur Erinnerung: ΔU ist die Änderung des Wertes der Funktion $U = U(Q, W)$, wenn sich die unabhängigen Variablen Q und W um ΔQ bzw. ΔW ändern. Dagegen ist das Differential dU der Anstieg der Tangentenebene des Graphen (hier: der Fläche) der Funktion U bei den Änderungen ΔQ und ΔW, die nur wegen der Symmetrie dann mit dQ ($\equiv \Delta$Q) und dW ($\equiv \Delta$W) bezeichnet werden:

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial Q}\mathrm{d}Q + \frac{\partial U}{\partial W}\mathrm{d}W,$$

sind. Wegen $U = Q + W$ ist

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{\partial U}{\partial W} = 1$$

und daher

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}W.$$

Aus dem Zusammenhang wird völlig klar, dass dQ und dW die Veränderungen der unabhängigen Variablen Q und W sind und dass dU das (selbstverständlich vollständige) Differential der Funktion U ist.

Das zur Begründung für die Bezeichnungen δQ und δW angeführte Argument, diese Größen seien keine vollständigen Differentiale, ist absurd, weil ohnehin niemand auf die Idee käme, dass sie es wären. Den Unterschied zwischen vollständigen und unvollständigen Differentialen (und Differentialquotienten) gibt es nämlich nur bei der abhängigen Variablen, also hier bei U.