Die physikalische Rumpelkammer

10 Die »unendlich kleinen Größen« in der Physik

Die physikalische Literatur ist noch immer das Asyl der aus der Mathematik schon lange vertriebenen »unendlich kleinen« und »verschwindend kleinen« Größen. Während »verschwindend klein« immerhin noch sinnvoll und sprachlich korrekt ist, fehlen dem »unendlich klein« beide Eigenschaften.

Zeit also, für diese geheimnisvollen Größen auch in der Physik einen Ersatz zu finden.

1 Differenzen und Differentiale

Die »geheimnisvollen Größen« werden in der mathematischen Analysis »Differentiale« genannt und treten dort erstmals bei der Ableitung einer Funktion $f(x)$ auf. Diese Ableitung ist (unter bestimmten, in der Physik praktisch immer gegebenen Voraussetzungen) wiederum eine Funktion von x, welche $f'(x)$ genannt wird und wie folgt definiert ist:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Die Funktion $f'(x)$ und ihre Werte an bestimmten Stellen x_i sind also definiert als Grenzwerte eines Bruchs, dessen Zähler und Nenner gemeinsam gegen null streben. Der Begriff »Grenzwert« ist in der Analysis von fundamentaler Bedeutung. Dort wird gezeigt, dass der Wert eines Bruches sich durchaus einem endlichen Wert, eben dem Grenzwert, nähern kann, wenn Zähler und Nenner des Bruches gegen null gehen.

Die beiden oben auftretenden identischen Brüche heißen **Differenzenquotienten,** weil im Zähler und im Nenner Differenzen stehen: oben die Differenz zweier Funktionswerte, unten die Differenz zweier Werte der Variablen x.

Zur Vereinfachung der Schreibweise – also aus Bequemlichkeit – hat man in der Analysis folgende Abkürzung eingeführt:

$$\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} \overset{\text{Def}}{\equiv} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \equiv f'(x).$$

Die im Zähler und Nenner des linken Bruchs stehenden Symbole(!), die zunächst für sich allein gar keine Bedeutung haben, heißen **Differentiale**. Ihr Quotient heißt **Differentialquotient.** Es sei nochmals betont, dass nur dieser Quotient eine (ihm erst durch Definition zugewiesene) Bedeutung hat, nämlich die eines Grenzwerts eines anderen Quotienten.

Nun ist es aber möglich und sinnvoll, den Differentialen df und dx nachträglich eine eigene Bedeutung zuzuordnen. Betrachten wir ein Kurvenstück (blau) und die Sekante (rot) zwischen zwei Punkten $P(x, y)$ und $Q(x+\Delta x, y + \Delta y)$. Für den Tangens des Steigungswinkels φ der Sekante gilt

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

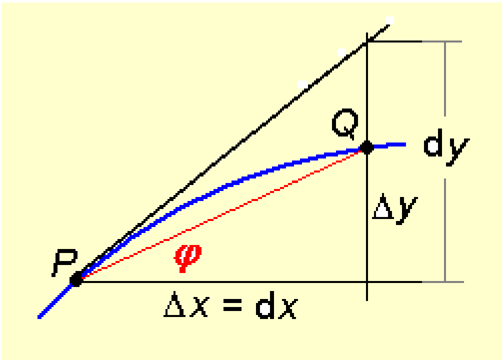
Diese Größe wird *Steigung der Sekante PQ* genannt. Der Grenzwert, dem diese Größe für Δx gegen null zustrebt, heißt *Steigung der Kurve* im Punkt P:

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan \varphi \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \equiv \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} \equiv \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x}.$$

Die Gerade durch P mit der Steigung tan α heißt *Tangente der Kurve* im Punkt P.
Wegen

$$\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} \equiv \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} \equiv \tan \alpha$$

kann, wenn man $\mathrm{d}x \equiv \Delta x$ setzt, dy als die Steigung der Tangente über dem Intervall dx = Δx interpretieren. Auf diese Weise erhalten die Differentiale dx und dy eigenständige, sinnvolle und nützliche Bedeutungen.



Für hinreichend kleines dx gilt dann Näherung

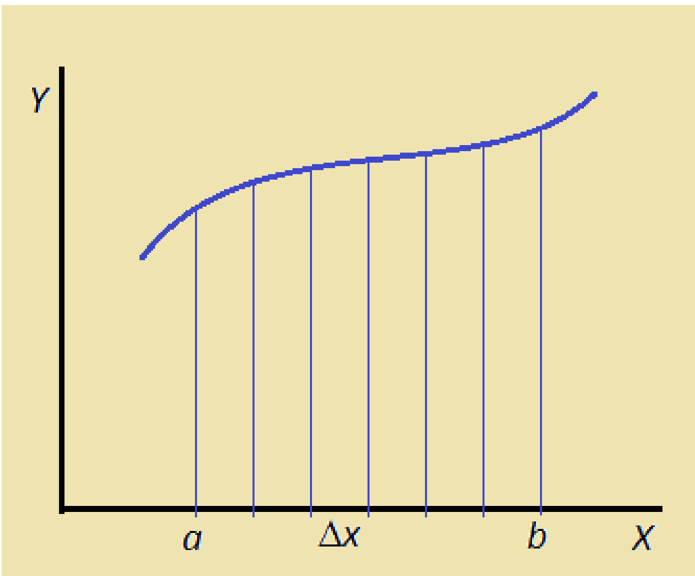
$$\Delta f \approx \mathrm{d} f = f'(x)\,\mathrm{d}x \equiv f'(x)\,\Delta x.$$

Dabei wird die Kurve durch ihre Tangente angenähert. Was »hinreichend klein« bedeutet, wird durch die verlangte Genauigkeit der Näherung bestimmt.

Das Differential dx begegnet uns aber auch noch in einem ganz anderen Zusammenhang:

2 Das Riemannsche Flächenintegral

Hier geht es darum, den Größenwert $A(a\ldots b)$ der Fläche zu bestimmen, die von der Kurve $y = f(x)$, von der X-Achse und den in zwei Punkten der X-Achse errichteten Parallelen zur Y-Achse (Ordinaten) begrenzt wird. (In der Physik stellen die Koordinaten sehr oft andere Größen als Längen dar; dann repräsentiert die Fläche A eine andere Größe.)



Zur Lösung dieser Aufgabe denkt man sich das Intervall <a, b> in n gleiche Teile Δx zerlegt und wählt in jedem Intervall einen dort anzutreffenden Wert f_i (i = 1, 2, … n) der Funktion $f(x)$, der mit der Intervallbreite Δx multipliziert wird. In der Analysis wird gezeigt, dass die Summe all dieser Produkte, also die Größe

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

für $n \rightarrow \infty$ (und damit $\Delta x \rightarrow 0$) einem Grenzwert zustrebt, welcher gleich dem gesuchten Wert A ist:

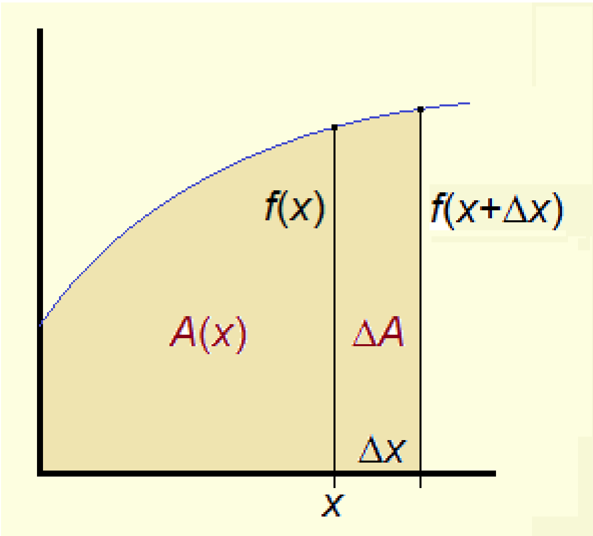
$$A(a...b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot \Delta x.$$

Zur Vereinfachung wird der rechts stehende Grenzwert mit einem eigenen Symbol bezeichnet, welches **bestimmtes Integral** heißt:

$$A(a...b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot \Delta x \overset{\text{Def}}{=} \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x. \qquad \textbf{(1)}$$

Doch mit dem Beweis, dass A der Grenzwert einer Summe ist, und mit der Einführung eines neuen Symbols für diesen Grenzwert ist die Frage noch nicht beantwortet, wie dieser Grenzwert gefunden und damit die Fläche berechnet werden kann. Das soll nun geschehen:

Es sei $y = f(x)$ der Graph einer im betrachteten Bereich stetigen und monoton steigenden oder konstanten Funktion $f(x)$.



Der Größenwert A der Fläche unter der Kurve zwischen den Ordinaten in 0 und x ist eine Funktion von x: $A = A(x)$. Für den Größenwert ΔA des Streifens mit der Breite Δx gilt

$$f(x)\Delta x \le \Delta A \le f(x+\Delta x)\Delta x \quad \Rightarrow \quad f(x) \le \frac{\Delta A}{\Delta x} \le f(x+\Delta x).$$

Für $\Delta x \rightarrow 0$ bleibt $f(x)$ unverändert, während der mittlere und der rechte Term der rechts stehenden Ungleichung (bzw. Gleichung) einem Grenzwert zustreben:

$$f(x) \le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} \equiv \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} \le \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x),$$

woraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(x). \qquad \textbf{(2)}$$

Das bedeutet: Die Ableitung der gesuchten Flächenfunktion $A(x)$ ist gleich der Funktion $f(x)$, und folglich ist $A(x)$ eine so genannte Stammfunktion $F(x) = F_0(x) + C$ von $f(x)$, wobei $F_0(x)$ die Stammfunktion ohne additive Konstante und C eine Konstante ist.

$$A(x) = F(x) = F_0(x) + C.$$

Da die betrachtete Fläche einen bestimmten Wert hat, kann hier die Konstante C nicht beliebig und frei wählbar sein. Zur Bestimmung von C gehen wir wie folgt vor: Für $x = 0$ ist $A(x) = A(0) = F(0) = 0$, woraus folgt

$$C = -F_0(0) \quad \text{und} \quad A(x) = F_0(x) - F_0(0).$$

Für den Größenwert der Fläche unter der Kurve zwischen den Ordinaten in den Punkten $x = a$ und $x = b$ mit $b > a$ ergibt sich daraus zu

$$A(a...b) = A(b) - A(a) = F_0(b) - F_0(a).$$

Der Vergleich mit Gleichung (1) ergibt

$$A(a...b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F_0(b) - F_0(a).$$

Damit hat das bestimmte Integral die praktische Bedeutung einer Rechenvorschrift gewonnen. Sie lautet: Man bestimme die Stammfunktion $F_0(x)$ der Funktion $f(x)$ und bilde die Differenz $F_0(b) - F_0(a)$. Es bleibt noch die Aufgabe, die Stammfunktion $F_0(x)$ zu finden. Dies ist die Aufgabe der *Integralrechnung*, einem Teilgebiet der Analysis.

Aus Gleichung (2) folgt für das Differential von A

$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die darin auftretenden Differentiale sind wiederum keine »unendlich kleinen Größen«, sondern haben die im Abschnitt 1 erklärte Bedeutung. Für $\mathrm{d}x \to 0$ geht auch $\mathrm{d}A \to 0$, ist dabei aber stets $f(x)$-mal so groß wie $\mathrm{d}x$.

3 Zwischenbilanz

1. Ein Differentialquotient ist zunächst nur ein Symbol und die Abkürzung für den Grenzwert eines Differenzenquotienten.
2. Es ist möglich, den Differentialen eine eigenständige Bedeutung zu geben. (Siehe Abschnitt 1.) Dabei sind sie endliche, nicht »verschwindend kleine« oder gar »unendlich kleine« Größen. In dieser Bedeutung sind Differentiale wichtig für Näherungsrechnungen. (Dabei wäre es sinnlos, sie »verschwinden« zu lassen.)

3. Darüber hinaus ist das Rechnen mit Differentialen nur sinnvoll

   - bei Differentialquotienten, also bei Grenzwerten von Differenzenquotienten,
   - innerhalb von Integralen als Grenzwerten von Summen,
   - bei Umformungen von Differentialen, die in den unter 1. und 2. genannten Zusammenhängen auftreten, z. B. bei der Substitution einer Variablen. Darauf wird später eingegangen.

4 Das unbestimmte Integral

Oben wurde gezeigt, dass im Riemannschen Flächenintegral dem Integralzeichen die Bedeutung einer Rechenvorschrift zugeordnet wird, die verlangt, dass zunächst eine Stammfunktion $F(x)$ des Integranden $f(x)$ zu bestimmen ist. So lag es denn in der Analysis – zu deren Aufgaben unter Anderem die Bestimmung von Stammfunktionen gehört – nahe, die Rechenvorschrift »Bestimme eine Stammfunktion von $f(x)$« ebenfalls durch das Integralzeichen zu kennzeichnen – zum Unterschied allerdings ohne Angabe unterer und oberer Grenzen:

Das Symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bedeutet also die Aufgabe, eine Stammfunktion $F(x)$ des »Integranden« $f(x)$ zu bestimmen. Ist sie gefunden, so ist (siehe oben)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \equiv F(x) = F_0(x) + C.$$

Dieses Integral heißt wegen der Unbestimmtheit von C »unbestimmtes Integral«.

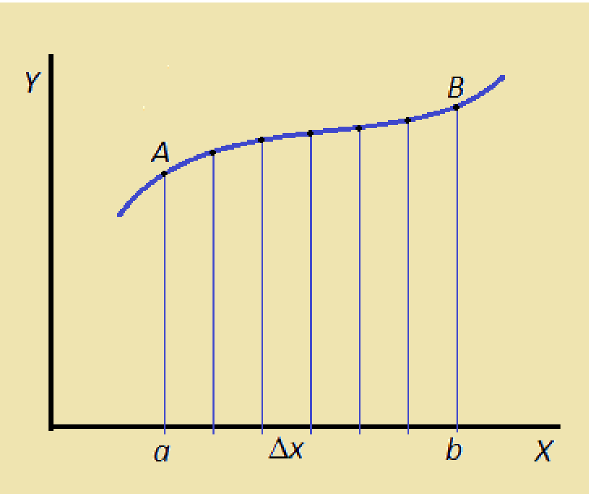
Wegen $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$ ist das Differential $\mathrm{d}F = f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}F = F$.

Wie erkennbar, ist $F(x)$ auch die »allgemeine Lösung« der »Differentialgleichung« $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$.

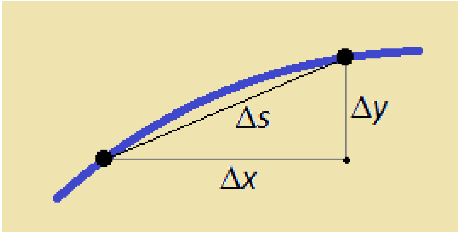
5 Die Bogenlänge einer Kurve

Das folgende Beispiel soll zeigen, wie eine Aufgabe aus der Geometrie mathematisch korrekt und ohne Rückgriff auf »unendlich kleine Größen« gelöste werden kann.

Wir betrachten zunächst eine ebene Kurve, die durch die Gleichung $y = f(x)$ beschrieben ist. Gesucht ist die Länge des Kurvenstücks zwischen den Punkten A und B.



Wieder teilen wir das Intervall <a, b> in n gleiche Teile Δx und ersetzen jedes Teilstück der Kurve durch die Sekante Δs_i.



In der Analysis wird gezeigt, dass für die gesuchte Bogenlänge gilt:

$$\overset{\frown}{AB} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Diese Grenzwerte können als bestimmte Integrale geschrieben werden, wobei Differenzen Δs_i, Δx_i und Δy_i durch die entsprechenden Differentiale (ohne Indices) ersetzt werden:

$$\overset{\frown}{AB} = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}.$$

In der Analysis wird auch gezeigt, dass elementare Rechenoperationen mit Differentialen wie mit algebraischen Zahlen (Platzhaltern für reelle Zahlen) ausgeführt werden können. So kann z. B. das letzte Integral wie folgt umgeformt werden:

$$\int_{x=a}^{x=b} \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

Anmerkung: Aus der Definitionsgleichung des unbestimmten Integrals folgt, dass

$$\int \mathrm{d}s = s + C.$$

Damit ergibt sich

$$\overset{\frown}{AB} = \int_A^B \mathrm{d}s = s\Big|_A^B = s_B - s_A,$$

wobei s_A und s_B die von einem beliebigen Punkt aus gemessenen Bogenlängen sind. Das Differential

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$$

ist somit auch das Differential der Bogenlänge (und nicht nur das der Sekante).

Bei einer Raumkurve ist das Differential der Bogenlänge analog dazu

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}.$$

Gibt es zu jedem Wert x im Definitionsbereich genau einen Wert y und zu jedem Wertepaar (x, y) genau einen Wert z, ist folglich $y = y(x)$ und $z = z(x, y)$, dann sind die Differentiale

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = y'(x)\,\mathrm{d}x \;\text{ und }\; \mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

und daher

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ist die Raumkurve durch eine Parameterdarstellung beschrieben:

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad z = z(\lambda),$$

dann ist

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Das Bogenlängen-Integral

$$s_{\overset{\frown}{AB}} = \int_A^B \mathrm{d}s$$

ist das einfachste Beispiel eines »Linienintegrals«, das im Allgemeinen so aussieht:

$$\int_A^B f(s)\,\mathrm{d}s,$$

wobei $f(s)$ irgendeine Funktion von s ist. Ein Beispiel dafür ist das Arbeitsintegral. Wenn eine konstante Kraft vom Betrag F über die (nicht notwendig gerade) Strecke s an einem Körper wirkt und die Kraft dabei immer die Richtung der Bewegung hat, dann verrichtet sie dabei die Arbeit $W = F\,s$. Verändert sich der Betrag der Kraft und der Winkel α, den sie mit der Richtung der Bewegung bildet, so ist das Differential der Kraft

$$\mathrm{d}W = F(s)\cos\alpha(s)\,\mathrm{d}s$$

und die auf der Strecke $\overset{\frown}{AB}$ verrichtete Arbeit

$$W_{AB} = \int_A^B F(s)\cos\alpha(s)\,\mathrm{d}s$$

und in Vektorschreibweise

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

wobei $\boldsymbol{r}$ der Ortsvektor der Kurvenpunkte und $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sein Differential und zugleich das Differential der Bogenlänge ist.

Ein weiteres, im Detail ausgearbeitetes Beispiel aus der Physik findet sich in »Der elektrische Strom – Teil I« im Abschnitt »Das Gesetz von Biot-Savart«.