Einführung
in die
Theoretische Physik

2.Teil: Dynamik

Siegfried Petry

12. Januar 2013

I n h a l t :

Dynamik

1 Einleitung

Der Gegenstand der Dynamik ist die Bewegung von Körpern unter der Wirkung einer Kraft. Dabei gehört es zu den Grundaufgaben der Dynamik, den Begriff »Kraft« und andere Begriffe zunächst einmal zu definieren. (Zur axiomatischen Grundlegung der Dynamik siehe auch den Artikel »Trägheit, Masse, Kraft« auf dieser Website.) Hier beginne ich mit den so genannten Newtonschen Axiomen.

2 Newtons Grundgesetze der Mechanik

2.1 Das Trägheitsgesetz

Die wortgetreue Übersetzung des lateinischen Originaltexts von Newton lautet:

Erklärung 3. Die Materie besitzt das Vermögen zu widerstehen; deshalb verharrt jeder Körper, soweit es an ihm ist, in einem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung. (Sir Isaac Newtons Mathematische Principien der Naturlehre, Berlin, 1872)

Heute wird das Gesetz so ausgedrückt:

Ein jeder äußeren Einwirkung entzogener Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung.

Dieses Gesetz wird auch als 1. Newtonsches Axiom bezeichnet, weil es kein beweisbares oder beobachtbares Gesetz ist, sondern eine geniale Extrapolation. Es gibt nämlich keinen Körper, der jeder äußeren Einwirkung entzogen ist. Jeder Körper unterliegt der Anziehung der Erde und anderer Himmelskörper. Legt man einen Körper zur Kompensierung seines Gewichts auf eine Unterlage, bekommt man es sofort mit der Reibungskraft zu tun, es sei denn, man benutzt eine Luftkissenfahrbahn oder eine Magnetschwebebahn – aber sowie der Körper sich bewegt, macht sich der Luftwiderstand bemerkbar. Hängt man den Körper dagegen frei an einem Seil auf, so ist seine Gewichtskraft nur so lange ganz kompensiert, wie er genau senkrecht hängt. Es ist also unmöglich, äußere Einflüsse auszuschalten. Daher ist es kein Wunder, dass die Naturphilosophen des Altertums und die des Mittelalters – die von Reibungskräften nichts wussten – glaubten, ein sich selbst überlassener Körper komme stets nach einiger Zeit zur Ruhe. Erst Kepler und Galilei haben diesen Irrtum durch das Studium der Bewegung von Himmelskörpern (Planeten und Monden) überwunden.

2.2 Kraft, Masse und Beschleunigung

Definition: Die Ursache der Änderung des Bewegungszustandes eines Körpers ist eine Kraft.

Im Original: *Erklärung 4. Eine angebrachte Kraft ist das gegen einen Körper ausgeübte Bestreben, seinen Zustand zu ändern, entweder den der Ruhe oder den der gleichförmigen Bewegung.*

Auch dies ist kein Gesetz, sondern die Definition des Begriffs »Kraft«.

Es hat sich gezeigt, dass das Phänomen, das Kraft genannt wird, auch noch andere Wirkungen haben kann: Eine Kraft kann einen Körper verformen (plastisch oder elastisch), sie kann Reibungswiderstand überwinden und sie kann einen Körper gegen die Wirkung seines Gewichts in der Schwebe halten oder mit konstanter Geschwindigkeit nach oben bewegen. Diese Wirkungen sind Gegenstand späterer Betrachtungen, sie sollten bis dahin jedoch nicht ganz aus dem Auge verloren werden.

Experimentelle Befunde:

1. Eine konstante Kraft (erkennbar etwa durch eine immer gleich stark gedehnte Schraubenfeder) erzeugt an ein und demselben Körper eine konstante Beschleunigung.

2. Die von einer konstanten Kraft erzeugte Beschleunigung hängt von einer Eigenschaft des Körpers ab, die wir seine »Masse« nennen. (Die charakteristischen Eigenschaften der Masse sind »Trägheit« und »Schwere«.) Die Masseneinheit 1 Kilogramm wird dargestellt durch den Internationalen Kilogrammprototyp. Dies ist die Definition der Maßeinheit für die Masse. Neben dieser Definition der Einheit sind bei jeder physikalischen Größenart noch die Definition des Vielfachen sowie eine Messvorschrift nötig. Erstere lautet in diesem Fall: Ein Körper, der durch die Vereinigung von zwei Massen mit je 1 kg entsteht, hat die Masse 2 kg, usw. Als Messvorschrift gilt die Verabredung, dass Massen mittels einer Balkenwaage verglichen werden. Damit sind wir im Prinzip in der Lage, Körper von beliebiger definierter Masse herzustellen, so genannte Massensätze.

Mit Hilfe eines solchen Massensatzes kann man zeigen: Der Betrag a der Beschleunigung, die von derselben Kraft an Körpern unterschiedlicher Masse hervorgebracht wird, ist deren Masse umgekehrt proportional:

$$a \ prop. \frac{1}{m} \quad oder \quad a = k\frac{1}{m} \quad \Rightarrow \quad a\,m = k,$$

wobei k eine Proportionalitätskonstante ist.

3. Das Produkt aus a und m ist proportional dem Betrag der beschleunigenden Kraft[1]:

$$a\ m = k_1 F\ .$$

Die Maßeinheit der Kraft (1 Newton) ist so definiert, dass der Proportionalitätsfaktor k_1 den Wert 1 annimmt. Dann gilt:

$$F = m\,a.$$

Da die Beschleunigung immer die Richtung der wirkenden Kraft hat (Ausnahme: Bei hohen Geschwindigkeiten sind wegen der Trägheit der Energie die Richtungen nicht immer gleich), gilt auch für die Vektoren $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

Diese Gleichung heißt noch immer 2. Newtonsches Axiom, obwohl sie inzwischen als Messvorschrift für Kräfte dient und obwohl Newton sie nie so formuliert hat.

Aus der Definitionsgleichung der Kraft (»Kraftgleichung«) ergibt sich auch deren Maßeinheit kg m/s^2. 1 kg m/s^2 wird als 1 Newton (N) bezeichnet. *1 Newton ist jene Kraft, die erforderlich ist, einem Körper von der Masse 1 kg die Beschleunigung von 1 m/s^2 zu erteilen.*

Die »Kraftgleichung« kann in verschiedenen Formen geschrieben werden.

1. In Vektorform:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2}$$

[1] Dazu wird eine Definition des Vielfachen für eine Kraft benötigt. Siehe dazu wieder »Trägheit, Masse und Kraft« auf dieser Website.

2. In Komponenten und kartesischen Koordinaten:

$$F_x = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \quad F_y = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \quad F_z = m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}. \qquad \textbf{(3)}$$

Dabei sind die zweiten Ableitungen der Ortskoordinaten nach der Zeit die Bahnbeschleunigungen in Richtung der Koordinatenachsen.

3. In ebenen Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} &\text{Radialkomponente:} && F_r = m\left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] \\ &\text{Transversalkomponente:} && F_t = m\left[2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

Die in eckigen Klammern stehenden Terme sind die Radialbeschleunigung bzw. die Transversalbeschleunigung. Siehe den Artikel »Kinematik« auf dieser Website unter »Beschleunigung«.

Bei bekannter Kraft und bekannter Masse können daraus durch Integration die entsprechenden Bewegungsgleichungen gewonnen werden.

Beispiel: Eine Rakete erfahre durch den Ausstoß von Materie nach hinten eine konstante Antriebskraft vom Betrag F. Die Masse der Rakete ohne Brennstoff sei m_R, die Masse des Brennstoffs zur Zeit $t = 0$ sei m_B, die Geschwindigkeit des Massenverlusts durch Ausstoß der Verbrennungsgase sei $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = k$. Unter Vernachlässigung der Luftreibung soll die Bahngeschwindigkeit der Rakete in Abhängigkeit von der Zeit berechnet werden.

Aus $a = F/m$ folgt mit $m = m_R + m_B - kt$:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F}{m_R + m_B - k\,t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v = \frac{F}{m_R + m_B - k\,t}\mathrm{d}t$$

und

$$v(t) = \int \frac{F}{m_R + m_B - k\,t}\mathrm{d}t = \frac{F}{k}\ln\frac{m_R + m_B}{m_R + m_B - k\,t} + C.$$

Für $t = 0$ ergibt sich $C = v(0)$, also:

$$v(t) = \frac{F}{k}\ln\frac{m_R + m_B}{m_R + m_B - k\,t} + v(0).$$

Der Brennstoff ist verbraucht, wenn $k\,t = m_B$. Dann hat die Rakete ihre Endgeschwindigkeit v_E erreicht:

$$v_E = \frac{F}{k}\ln\frac{m_R + m_B}{m_R} + v(0) = \frac{F}{k}\ln\left(1 + \frac{m_B}{m_R}\right) + v(0).$$

Benutzen wir (vorgreifend auf den Impulssatz) noch, dass $F = k\,v_G$ ist, wobei v_G die Ausströmgeschwindigkeit der Verbrennungsgase ist, dann erhalten wir:

$$v_E = v_G \ln\left(1 + \frac{m_B}{m_R}\right) + v(0).$$

Die Veränderung der Masse im Laufe der Zeit hat die Berechnung zwar etwas komplizierter, aber nicht prinzipiell unmöglich gemacht. Dies rührt daher, dass das »Kraftgesetz« eine Differentialgleichung ist, in der nur Momentanwerte auftreten: der Momentanwert der Kraft, der Momentanwert der Masse, der Momentanwert der Beschleunigung. Es ist daher keine grundsätzlich unüberwindliche Schwierigkeit, eine der drei Größen zu berechnen, wenn die beiden anderen zwar veränderlich, aber als Funktion der Zeit gegeben sind.

2.3 Das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung (actio = reactio)

Dies ist das 3. Newtonsche Axiom:

Übt ein Körper A auf einen Körper B die Kraft $\boldsymbol{F}$ aus, so übt B auf A die entgegengesetzte Kraft $-\boldsymbol{F}$ aus.

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist es unmöglich, eine Kraft auszuüben, wenn keine Gegenkraft vorhanden ist, die »dagegenhält«. (Man nennt das auch offene Türen einrennen.) Dennoch gibt es da Probleme:

1. Tauziehen: Wenn beide Mannschaften nach Newton stets gleich stark am Tau ziehen, wieso kann es dann einen Sieger geben?

2. Newtons Esel: Newtons Esel hatte vom 3. Axiom seines Herrn erfahren und weigerte sich fortan, seinen Karren zu ziehen: »Was soll ich mich anstrengen und an dem Karren ziehen? Er zieht stets gleich stark dagegen – wie sollte ich ihn dann in Bewegung bringen können?« Newton soll – ganz unwissenschaftlich – den Esel mit einem Stock dazu gebracht haben, es dennoch zu versuchen. Wie wäre hier zu argumentieren?

3 Bewegungsgröße, Impuls und Kraftstoß

Aus $\boldsymbol{F} = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ folgt $\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ und für m = konst.: $\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\,\boldsymbol{v})$.

Die Größe $m\,\boldsymbol{v}$ wurde von Newton »Bewegung« genannt.

Erklärung 2. Die Größe der Bewegung wird durch die Geschwindigkeit und die Größe der Materie vereint gemessen.
Die Bewegung des Ganzen ist die Summe der Bewegungen der einzelnen Teile. Daher ist sie eine doppelte in einem doppelt so großen Körper bei gleicher Geschwindigkeit und eine vierfache in einem doppelt so großen Körper bei doppelter Geschwindigkeit. (A. a. O.)

Später wurde $m\,\boldsymbol{v}$ – und das ist angemessener – als »Bewegungsgröße« bezeichnet. Noch später hat sich die Bezeichnung »Impuls« (Formelzeichen $\boldsymbol{p}$) durchgesetzt, obwohl diese zunächst einer anderen Größe vorbehalten war, die nun namenlos wurde. Ich komme gleich darauf zurück.

Damit kann man nun – immer noch die Konstanz der Masse vorausgesetzt – schreiben:

$$\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{p}.$$

Stellen wir uns nun vor, dass auf den Körper im Zeitintervall t_1 bis t_2 eine veränderliche Kraft $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$ einwirkt, so gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \Delta\boldsymbol{p}_{2,1} = m(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = m\,\Delta\boldsymbol{v}_{2,1}.$$

Das Zeitintegral der Kraft, das früher Impuls genannt wurde, nenne ich **Kraftstoß**. Dann gilt:

Die Impulsänderung des Körpers ist gleich dem auf ihn ausgeübten Kraftstoß.

Dieser Satz ist nicht zuletzt für die Berechnung von Stoßvorgängen interessant. Stoßen zwei Körper zusammen, so üben sie wegen »actio = reactio« jederzeit entgegengesetzt gleiche Kräfte auf einander aus und damit im betrachteten Zeitintervall auch entgegengesetzt gleiche Kraftstöße. Folglich sind die Impulsänderungen, welche die beiden Körper dadurch erfahren, entgegengesetzt gleich. Die Summe ihrer Impulsänderungen ist null, und ihr Gesamtimpuls bleibt bei dem Stoß unverändert (»Impulserhaltungssatz«).

(Vorschau: Der Impulserhaltungssatz gehört zu den wichtigen Erhaltungssätzen der Physik. Seine besondere Bedeutung beruht darauf, dass er auch dann noch gilt, wenn der mechanische Energieerhaltungssatz nicht gilt, weil ein Teil der mechanischen Energie in Wärme umgesetzt wird. So können mit dem Impulserhaltungssatz z. B. auch nicht-elastische Stoßvorgänge berechnet werden.)

Ich möchte nun noch näher auf den Fall eingehen, dass sich die Masse des Körpers während der Einwirkung einer Kraft verändert. Hierzu wird meist etwas leichtfertig behauptet, es sei dann das Kraftgesetz $\boldsymbol{F} = m\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$ zu ersetzen durch das Gesetz $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}(m\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t\, \boldsymbol{v} + m\, \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$. – Dies soll nun etwas genauer betrachtet werden.

Nehmen wir an, der Impuls eines Körper verändere sich in der Zeitspanne Δt unter der Einwirkung einer Kraft bei gleichzeitiger Zunahme seiner Masse von $\boldsymbol{p}_1 = m_1\boldsymbol{v}_1$ nach $\boldsymbol{p}_2 = m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + \Delta m)(\boldsymbol{v}_1 + \Delta\boldsymbol{v}) = m_1\boldsymbol{v}_1 + (m_1 + \Delta m)\Delta\boldsymbol{v} + \Delta m\boldsymbol{v}_1$. Dann ist die Impulsänderung $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = m_1\Delta\boldsymbol{v} + \Delta m(\boldsymbol{v}_1 + \Delta\boldsymbol{v})$. Der erste Term auf der rechten Seite ist die Impulszunahme der ursprünglichen Masse des Körpers infolge der Geschwindigkeitsänderung, der zweite Term ist der Impuls der hinzugekommenen Masse bei der Geschwindigkeit am Ende des betrachteten Intervalls, wobei deren Impulserhöhung so in die Bilanz eingeht, als wäre die Masse Δm von 0 auf $\boldsymbol{v}_1 + \Delta\boldsymbol{v}$ beschleunigt worden. Das heißt aber: Die Gleichung gilt nur, wenn Δm zuvor die Geschwindigkeit 0 hatte (oder aber gar nicht vorhanden war, wie etwa bei der so genannten relativistischen Massenzunahme). Ein Beispiel dafür ist das Beladen eines Förderbandes mit Materie, die von oben auf das Band fällt. Die Gleichung gilt dagegen nicht, wenn z. B. ein Raumschiff im Weltraum Materieteilchen »aufsammelt«, die selbst eine Geschwindigkeit haben.

Entsprechendes gilt, wenn der Körper Masse verliert, also Δm negativ ist.

Es ist also eine gewisse Vorsicht im Umgang mit Gleichung $F = \mathrm{d}(m\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t$ geboten.

4 Arbeit, Energie und Leistung

4.1 Arbeit

Wir müssen zunächst wieder eine Anleihe bei der Experimentalphysik machen: Eine Kraft $\boldsymbol{F}$ wirke an einem bestimmten Punkt (»Angriffspunkt«) auf einen Körper ein. Wie wir oben gesehen haben, ist dies überhaupt nur möglich, wenn dort auf irgendeine Weise eine gleich große Gegenkraft $-\boldsymbol{F}$ entstehen kann. Wir haben es daher immer, wenn eine Kraft im Spiel ist, mit *zwei* Kräften zu tun. Dabei ist die Kraft $\boldsymbol{F}$ die aktive Kraft (actio), die durch irgendeine Ursache auf den Körper ausgeübt wird, die andere Kraft $-\boldsymbol{F}$ ist die reaktive Kraft (reactio), mit der der Körper auf die angreifende Kraft reagiert. Nun gibt es eine Reihe von Möglichkeiten:

• Entweder wird der Körper, an dem die Kraft angreift, beschleunigt,
• er wird elastisch (d. h. reversibel) verformt (Beispiel: Eine Feder wird gespannt.),

• er wird plastisch (d. h. irreversibel) verformt (Beispiel: Die Karosserie eines Autos wird eingedellt.),
• er wird (nach kurzer Beschleunigung) mit konstanter Geschwindigkeit bewegt (Beispiel: Ein Pferd zieht einen Wagen.),
• er wird senkrecht (oder schräg) nach oben bewegt.

Frage: Was ist in den fünf verschiedenen Fällen die Gegenkraft, und wer oder was kommt für sie auf?

Allen diesen Fällen gemeinsam ist, dass sie nicht »von selbst« und gleichsam kostenlos ablaufen. In jedem Fall muss ein Etwas wirken, das Leibniz (1646-1716) eine »lebendige Kraft« genannt hat, die Körperkraft eines Lebewesens, die Kraft einer »Kraftmaschine« (besser: Arbeitsmaschine), oder die Kraft einer bewegten Substanz, z. B. Wasser oder Wind. Und in jedem Fall wird, wie wir heute sagen, im physikalischen Sinn eine »Arbeit verrichtet«, für die gleichsam als Gegenleistung irgendeine offensichtliche Veränderung eintritt, die nützlich oder unnütz oder auch schädlich sein kann, die aber in keinem Fall anders zu erreichen ist als eben durch Arbeitsaufwand.

Nach zahlreichen Versuchen und manchem Irrweg sind die Physiker schließlich übereingekommen, als Maß für die Größe der Arbeit das Produkt aus Kraft und Verschiebung anzusehen – solange die einwirkende Kraft und Verschiebung dieselbe Richtung haben und die Kraft konstant ist. Dann gilt also:

Arbeit *W* = Kraft *F* mal Verschiebung (oder Weg) *s*

Die SI-Einheit der Arbeit ist das Joule (J). 1 Joule = 1 Newtonmeter (Nm).

Hat die Kraft nicht dieselbe Richtung wie die Verschiebung, dann wirkt nur die Komponente der Kraft an der Arbeit mit, die in Richtung der Verschiebung liegt. Die senkrecht zur Verschiebung wirkende Kraftkomponente dagegen bringt keine der oben beschriebenen Veränderungen hervor, und daher wirkt sie ohne Arbeitsaufwand.

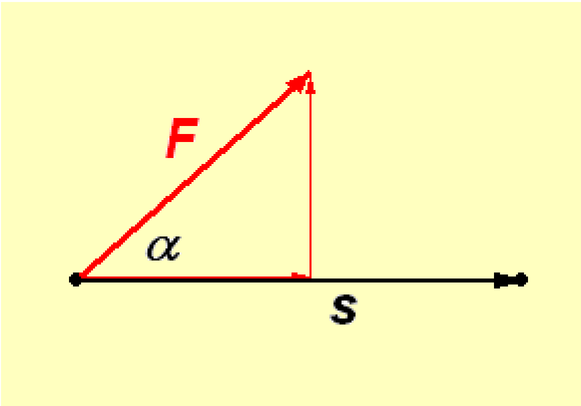

Abb. 1

Es ist daher

$$W = F\, s \cos\alpha.$$

Der Term auf der rechten Seite ist das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{s}$ und somit ist

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}. \tag{5}$$

Wir betrachten nun den Fall, dass die Verschiebung längs einer gekrümmten Raumkurve erfolgt und sich zudem der Winkel α und der Betrag F der Kraft während der Verschiebung von A nach B ändern.

Wir zerlegen dann das Kurvenstück (den Bogen) in n gleiche Teile und ersetzen jedes Bogenstück Δs_i (i = 1, 2, ... n) durch den Sekantenvektor $\Delta \boldsymbol{r}_i$.

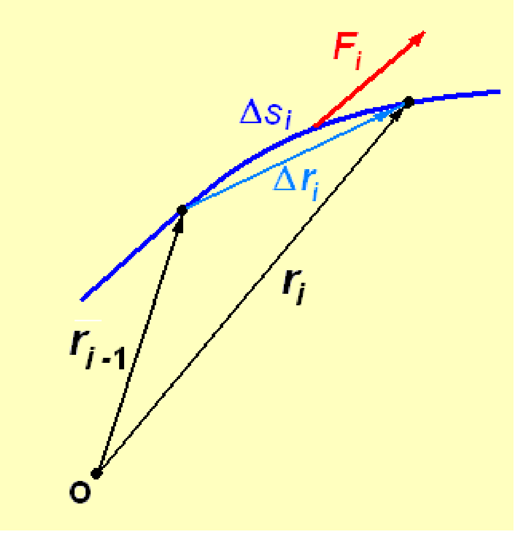

Abb. 2

Dann gilt für die auf dem ***i***-ten Bogenstück verrichtete Arbeit

$$\Delta W_i \approx \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i,$$

wobei $\boldsymbol{F}_i$ der Kraftvektor ist, der in einem beliebigen Punkt des Bogenstücks Δs_i wirkt. Für die gesamte Arbeit gilt dann

$$W_{AB} \approx \sum_1^n \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i.$$

Die Näherung wird beliebig genau, wenn man die Anzahl n der Teilstücke entsprechend vergrößert, das heißt, es ist

$$W_{AB} = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i,$$

wofür man schreibt

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_n} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \qquad \textbf{(6)}$$

Die Berechnung des Integrals setzt voraus, dass $\boldsymbol{F}$ als (integrierbare) Funktion von $\boldsymbol{r}$ gegeben ist: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$. Ist $\boldsymbol{F}$ durch seine kartesischen Komponenten beschrieben, die wiederum Funktionen kartesischer Koordinaten sind, also in der Form

$$\boldsymbol{F} = F_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_1 + F_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_2 + F_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_3,$$

so schreibt man $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ in der Form

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_3$$

und erhält für das Skalarprodukt $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ den Ausdruck

$$\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(F_x\boldsymbol{e}_1 + F_y\boldsymbol{e}_2 + F_z\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\left(\mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_3\right) = F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z.$$

Das »Arbeitsintegral« lässt sich dann in drei skalare Integrale zerlegen:

$$W_{AB}=\int_{x_A}^{x_B}F_x\,\mathrm{d}x+\int_{y_A}^{y_B}F_y\,\mathrm{d}y+\int_{z_A}^{z_B}F_z\,\mathrm{d}z.$$

Ist schließlich $\boldsymbol{F}$ als Funktion der Bogenlänge s der Kurve gegeben (wobei die Bogenlänge von einem beliebigen Punkt O aus gemessen wird), so erhält man mit $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}\boldsymbol{s}$

$$W_{AB}=\int_A^B\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{s_A}^{s_B}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Irritierend an diesem Integral ist, dass $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ das Differential eines – abgesehen von Geraden – nicht existierenden Vektors $\boldsymbol{s}$ ist. Dennoch ist es in mancher Hinsicht nützlich.

4.2 Beschleunigungsarbeit

Auf einen Körper der Masse m wirke längs einer beliebigen (geradlinigen oder gekrümmten) Wegstrecke eine Kraft $\boldsymbol{F}$ ein, deren Betrag und Richtung sich beliebig verändern kann. Diese Kraft erzeugt am Körper eine Beschleunigung $\boldsymbol{a}$, für deren momentanen Wert stets gilt:

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}.$$

Folglich ist die am Körper verrichtete Arbeit

$$W=\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}m\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=m\int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v},$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
W&=m\int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2}\left(v_x\boldsymbol{e}_1+v_y\boldsymbol{e}_2+v_z\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\left(\mathrm{d}v_x\boldsymbol{e}_1+\mathrm{d}v_y\boldsymbol{e}_2+\mathrm{d}v_z\boldsymbol{e}_3\right)\\
&=m\int_{\boldsymbol{v}_1}^{\boldsymbol{v}_2}\left(v_x\,\mathrm{d}v_x+v_y\,\mathrm{d}v_y+v_z\,\mathrm{d}v_z\right)=m\left(\int_{v_{x,1}}^{v_{x,2}}v_x\,\mathrm{d}v_x+\int_{v_{y,1}}^{v_{y,2}}v_y\,\mathrm{d}v_y+\int_{v_{z,1}}^{v_{z,2}}v_z\,\mathrm{d}v_z\right)\\
&=\frac{m}{2}\left(v_{x,2}^2-v_{x,1}^2+v_{y,2}^2-v_{y,1}^2+v_{z,2}^2-v_{z,1}^2\right)\\
&=\frac{m}{2}\left[\left(v_{x,2}^2+v_{y,2}^2+v_{z,2}^2\right)-\left(v_{x,1}^2+v_{y,1}^2+v_{z,1}^2\right)\right]\\
&=\frac{m}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right)=\frac{m}{2}\Delta(v^2),
\end{aligned}$$

und speziell für $v_1=0$ und $v_2=v$

$$W=\frac{m}{2}v^2.$$

Das bedeutet: Die aufzuwendende Arbeit W ist vom zeitlichen Verlauf der Beschleunigung (und dem der Kraft) unabhängig.

4.3 Exkurs: Verformungsarbeit

Um die Voraussetzungen für einen wichtigen Gedankenversuch zu schaffen, soll hier die Verformungsarbeit untersucht werden.

Ein Körper werde unter der Wirkung einer Kraft (plastisch oder elastisch) verformt. Er reagiert darauf mit einer Gegenkraft. Im Fall der plastischen Verformung eines (amorphen) Körpers ist die Reaktionskraft der innere Reibungswiderstand. Die aufgewendete Arbeit wird dabei in Wärme umgesetzt. Der Vorgang kann nicht rückgängig gemacht werden; er ist irreversibel.

Bei der elastischen Verformung eines (kristallinen) Körpers reagiert die Kristallstruktur des Körpers auf die Verformung mit einer elastischen Gegenkraft. Beim Verschwinden der äußeren, verformenden Kraft machen die inneren Kräfte die Verformung rückgängig.

In beiden Fällen verrichtet die äußere Kraft die Arbeit, weil die Verformung in Richtung der Kraft erfolgt.

Bei der elastischen Verformung gilt unterhalb der »Elastizitätsgrenze« das HOOKsche-Gesetz: Der Größenwert s der Verformung ist dem Größenwert F der Kraft proportional.

$$F = k\,s.$$

Die Proportionalitätskonstante k heißt Richtgröße, bei Federn auch Federkonstante.

Im stationären Zustand (d. h. wenn die Verformung zum Stillstand gekommen ist) sind äußere Kraft und elastische Gegenkraft gleich. Um die Verformung zu vergrößern, muss die angreifende Kraft ein wenig (beliebig wenig) größer sein als die elastische Gegenkraft. Der Überschuss dient dann zunächst der Beschleunigung der sich verformenden Teile des Körpers (z. B. der Schraubenfeder), bis sich ein neuer Gleichgewichtszustand einstellt.

Verringert man die angreifende Kraft ein wenig, so wird ein kleiner Teil der Verformung rückgängig gemacht, bis wieder Gleichgewicht herrscht. Der Vorgang kann also (im Gegensatz zur plastischen Verformung) in beiden Richtungen ablaufen, er ist *reversibel*.

Für die verrichtete Verformungsarbeit gilt dann:

$$W = \int_0^{s_E} F\,\mathrm{d}s = \int_0^{s_E} k\,s\,\mathrm{d}s = \frac{k}{2} s_E^2,$$

wobei s_E der Verformungsweg im Endzustand ist.

4.4 Energie

Wir machen nun folgenden Gedankenversuch Eine elastische Schraubenfeder mit der Federkonstanten k_1 werde am linken Ende fixiert und dann von Hand um die Strecke $0 - x_1$ zusammengedrückt und in dieser Stellung arretiert. Dazu ist die Arbeit

$$W = \frac{k_1}{2} x_1^2$$

aufzuwenden. Dann werde ein Körper der Masse m, der reibungsfrei auf der horizontalen Unterlage gelagert ist, vor die rechte Stirnfläche der Feder gebracht. Dann werde die Arretierung der Feder gelöst. (Die Masse der Feder wird im Folgenden vernachlässigt.)

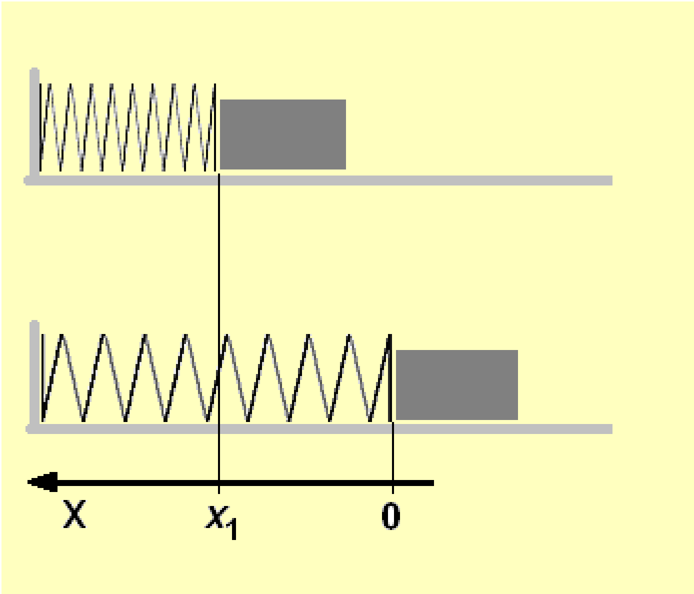

Abb. 3

Die Feder entspannt sich bis zum Punkt 0 und beschleunigt dabei den Körper. Dabei übt die Feder in jeder Phase auf den Körper eine Kraft von gleichem Betrag aus, wie sie selbst beim Zusammendrücken im gleichen Zustand erfahren hatte. Folglich verrichtet die Feder beim Entspannen an dem Körper eine Arbeit von gleichem Größenwert wie die, welche beim Zusammendrücken von außen aufgewendet wurde. Die aufgewendete Arbeit wurde also gleichsam in der Feder gespeichert und kann beim Entspannen von der Feder wieder abgegeben werden.

Dies wird auch durch folgende Rechnung bestätigt. Für die Geschwindigkeitszunahme dv des Körpers in der Zeit dt in irgendeinem Punkt $P(x)$ gilt:

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t = \frac{F}{m}\mathrm{d}t = \frac{k_1 x}{m}\mathrm{d}t = \frac{k_1 x}{m}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = -\frac{k_1 x}{m}\frac{\mathrm{d}x}{v},$$

wobei $v = -\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ die Geschwindigkeit des Körpers in der jeweiligen Phase ist. (Das Minuszeichen berücksichtigt, dass v entgegengesetzt zur $+X$-Achse gerichtet ist.)

Aus

$$\mathrm{d}v = -\frac{k_1 x}{m}\frac{\mathrm{d}x}{v} \quad \Rightarrow \quad v\,\mathrm{d}v = -\frac{k_1}{m}x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int_0^{v_E} v\,\mathrm{d}v = -\frac{k_1}{m}\int_{x_1}^{0} x\,\mathrm{d}x$$

und

$$\tfrac{1}{2}v_E^2 = \frac{k_1}{2m}x_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}v_E^2 = \frac{k_1}{2}x_1^2.$$

Das bedeutet: Der Körper wird auf eine Geschwindigkeit beschleunigt, die gerade so groß ist, dass die dazu benötigte Arbeit gleich der ursprünglich zum Spannen der Feder gebrauchte Arbeit ist. Die Feder hat also die in ihr gespeicherte Arbeit vollständig auf den Körper übertragen.

Im zweiten Teil des Versuchs trifft der Körper auf eine (entspannte) Feder mit der Federkonstanten k_2. Er wird dann auf die Geschwindigkeit null gebremst, während seine Trägheitskraft die Feder um die Strecke $0 - x_2$ spannt.

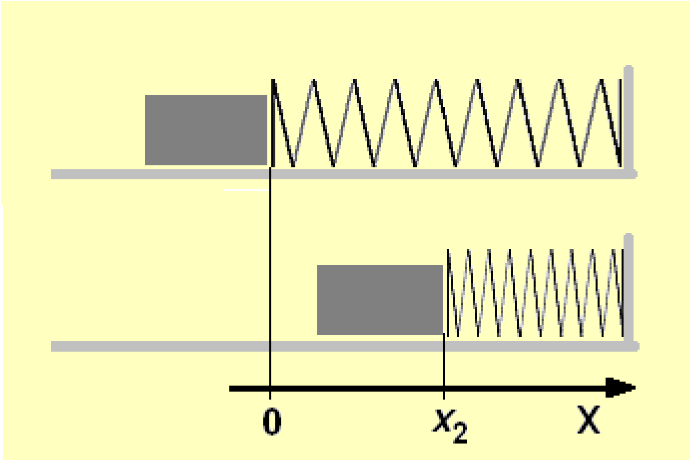

Abb. 4

Es gilt nun analog

$$\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t = \frac{F}{m}\mathrm{d}t = \frac{k_2 x}{m}\mathrm{d}t = -\frac{k_2 x}{m}\frac{\mathrm{d}\,x}{v},$$

$$v\,\mathrm{d}v = -\frac{k_2}{m}x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \int_{v_E}^{0} v\,\mathrm{d}v = -\frac{k_2}{m}\int_{0}^{x_2} x\,\mathrm{d}x,$$

und schließlich

$$\tfrac{1}{2}v_E^2 = \frac{k_2}{2m}x_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}v_E^2 = \frac{k_2}{2}x_2^2.$$

Die Feder wird also gerade so weit gespannt, dass die dazu benötigte Arbeit gleich der Arbeit ist, die zum Beschleunigen des Körpers erforderlich war. Diese wiederum ist – wie oben gezeigt wurde – gleich der zum Spannen der Feder investierte Arbeit.

Zusammenfassung: Die ursprünglich zum Spannen der Feder aufgewendete Arbeit wird zunächst vollständig zum Beschleunigen des Körpers verwendet. Danach wird die Arbeit – wiederum unverändert – zum Spannen der zweiten Feder benutzt. Der Größenwert der ursprünglich aufgewendeten Arbeit bleibt bei den beiden Umwandlungen unverändert. Der gesamte Vorgang kann umgekehrt und beliebig oft wiederholt werden. Die gespannte Feder und der bewegte Körper sind also fähig, ihrerseits Arbeit zu verrichten, und zwar in gleichem Ausmaß wie die zuvor an ihnen verrichtete Arbeit.

Die Fähigkeit der gespannten Feder und des bewegten Körpers, die an ihnen verrichtete Arbeit auf einen anderen Körper zu übertragen, heißt *Arbeitsfähigkeit* oder **Energie**.

Insbesondere wird die Energie eines elastisch verformten Körpers als **potentielle Energie** bezeichnet, die Energie eines bewegten Körpers als **kinetische Energie** oder **Bewegungsenergie**. Die zu Beginn des Gedankenversuchs aufgewendete Arbeit wurde also erst in potentielle Energie der Feder, dann in kinetische Energie des Körpers umgesetzt. Durch eine genauere Untersuchung des Vorgangs lässt sich zeigen, dass während der Energieübertragung (wenn also die Feder erst teilweise entspannt und der Körper erst teilweise beschleunigt wurde) die Summe aus der momentanen potentiellen Energie der Feder und der momentanen kinetischen Energie des Körpers konstant ist. Für die Arbeit oder Energie gilt also eine Art von Erhaltungsgesetz, das zu den wichtigsten Gesetzen der Physik gehört.

Die Energie wird in den gleichen Einheiten gemessen wie die Arbeit.

4.5 Leistung

Definition: Wird in der Zeit Δt die Arbeit ΔW verrichtet, so ist die **mittlere Leistung** in dieser Zeitspanne:

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

Für Δt gegen null erhält man daraus die (momentane) Leistung P zu dem betrachteten Zeitpunkt:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \qquad \textbf{(7)}$$

Die SI-Einheit der Leistung ist Joule/s = Watt (W).

5 Potentielle Energie, Potentialfelder

Bestimmte Kraftfelder (z. B. Gravitationsfelder und elektrostatische Felder) haben eine besondere Eigenschaft, die hier am Beispiel des Gravitationsfeldes beschrieben werden soll:

In einem Gravitationsfeld erfährt eine Masse vom Gravitationszentrum eine anziehende Kraft. Um die Masse vom Zentrum weg zu bewegen (sie zu »heben«), muss Arbeit von außen aufgewendet werden (»Hubarbeit«). Dafür gewinnt die Masse »potentielle Energie« (Energie der Lage). Bewegt sich dagegen die Masse auf das Zentrum zu, so nimmt ihre potentielle Energie ab; dafür wird die Masse beschleunigt und gewinnt im »freien Fall« (d. h. ohne Luftwiderstand) in gleichem Maße kinetische Energie. Also:

In dem betrachteten Feld ist (ohne Reibungskräfte) die Summe aus kinetischer und potentieller Energie eines Körpers konstant.

Bewegt man die Masse von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2, so ist die aufzuwendende Arbeit W vom Weg unabhängig. Bewegt man dann den Körper auf irgendeinem Weg zum Ausgangspunkt zurück, so ist die auf dem Rückweg verrichtete Arbeit gleich $-W$ und daher die gesamte Arbeit gleich null. Den beiden soeben beschriebenen Effekten liegt also dieselbe Eigenschaft des Feldes zugrunde.

Bewegt man die Masse im Feld auf einer *geschlossenen* Kurve herum, so ist dazu insgesamt keine Arbeit aufzuwenden.

Bewegt sich eine Masse aus dem Unendlichen zu einem bestimmten Punkt P im Feld, so wird dabei Energie frei; die von außen aufzuwendende Arbeit ist negativ. Die dabei frei werdende Energie ist ebenfalls vom Weg unabhängig, sie hängt jedoch von der Masse des Körpers ab, und zwar ist sie seiner Masse proportional. Dividiert man die (hier negative) Arbeit W durch die Masse m des Körpers, so ist das Ergebnis Φ eine Größe, die nur noch von der Lage des Punktes P abhängt. Diese Größe – die massebezogene Arbeit – heißt das **Potential** des Punktes P.

$$\Phi_P = \frac{W}{m} \qquad \textbf{(8)}$$

Das Potential der Punkte eines Gravitationsfeldes ist negativ.

Aus der Definition des Potentials folgt: Ein Körper der Masse m hat in einem Punkt P mit dem Potential Φ gegenüber dem Unendlichen die potentielle Energie

$$E_{pot} = m\,\Phi. \qquad \textbf{(9)}$$

Die (Gravitations-)Feldstärke g ist die massebezogene Kraft, die das Feld auf eine Masse ausübt:

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}. \tag{10}$$

Wird die Masse durch eine von *außen ausgeübte* Kraft um die Strecke d$\boldsymbol{r}$ verschoben, so ist die dabei verrichtete Arbeit dW = – $\boldsymbol{F}$·d$\boldsymbol{r}$ = – m $\boldsymbol{g}$·d$\boldsymbol{r}$ und dΦ = dW/m = – $\boldsymbol{g}$·d$\boldsymbol{r}$.

Felder, in denen jedem Punkt ein bestimmtes Potential zugeschrieben werden kann, heißen **Potentialfelder.**

Der Zusammenhang zwischen Feldstärke und Potential wird im Rahmen der »Vektoranalysis II« (auf dieser Website) ausführlich behandelt.

6 Zentralkräfte und Flächensatz

Eine Zentralkraft ist eine Kraft, die stets auf denselben Punkt hin gerichtet ist. Macht man diesen Punkt zum Koordinatenursprung, dann ist die Zentralkraft $\boldsymbol{F} = f(x, y, z)\,\boldsymbol{r}$, wobei f stets einen negativen Wert hat.

Für Zentralkräfte kann man einen wichtigen Satz ableiten, der neben dem Energiesatz ein weiteres Integral des dynamischen Grundgesetzes darstellt (also eine Differentialgleichung erster statt zweiter Ordnung). Wir multiplizieren dazu das dynamische Grundgesetz vektoriell mit $\boldsymbol{r}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \qquad \Big|\,\boldsymbol{r}\times \\ \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} &= m\,\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

Da $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{F}$ entgegengesetzt gerichtet (antiparallel) sind, ist ihr Vektorprodukt null. Folglich muss auch die rechte Seite der Gleichung null sein:

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Das besagt nur, dass die Beschleunigung zum Radiusvektor parallel oder antiparallel ist. – Das Integral dieser Gleichung ist

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{C},$$

wobei $\boldsymbol{C}$ irgendein konstanter Vektor ist.

Beweis: Differenziert man die letzte Gleichung nach den Regeln der Vektoranalysis, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 0,$$

wobei das erste Vektorprodukt null ist.

Das Vektorprodukt

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

hat eine anschauliche Bedeutung: Der Betrag von $\boldsymbol{r}$ x d$\boldsymbol{r}$ ist die doppelte Fläche des Dreiecks, das vom Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ in der Zeit dt überstrichen wird. Dividiert man diese Fläche durch dt, erhält man die auf die Zeit bezogene Fläche, das ist die so genannte **Flächengeschwindigkeit.** Die obige Gleichung besagt also, dass bei der Bewegung eines Körpers im Feld einer beliebigen Zentralkraft die Flächengeschwindigkeit konstant ist. Dies ist eine Verallgemeinerung des 2. Keplerschen Gesetzes.

Ferner: Das Vektorprodukt $\boldsymbol{r}$ x d$\boldsymbol{r}$/dt ist ein Vektor, der auf $\boldsymbol{r}$ und d$\boldsymbol{r}$/dt = $\boldsymbol{v}$ und damit auf der Bahnkurve des Körpers senkrecht steht. Da dieser Vektor ein konstanter Vektor $\boldsymbol{C}$ ist, hat die Flächennormale von $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}$ eine feste Richtung. Dies wiederum bedeutet, dass die Bahn eben ist.

Übrigens ist der Vektor m $\boldsymbol{r}$ x d$\boldsymbol{r}$/dt nichts anderes als der hier offensichtlich konstante Drehimpuls des bewegten Körpers.

7 Gravitationsgesetz und Planetenbewegung

Natürlich sind diese Überlegungen auch umkehrbar: Man geht von einem – vermuteten oder durch Beobachtungen begründeten – Gravitationsgesetz aus und leitet daraus das Verhalten von Himmelskörpern im Gravitationsfeld ab. Das Gravitationsgesetz lautet: Zwei schwere Massen m_1 und m_2 im Abstand r üben aufeinander eine anziehende Kraft aus, für deren Größenwert gilt:

$$F = f\,\frac{m_1\, m_2}{r^2}.$$

Dabei ist f die Gravitationskonstante f = 6,672 59 N m^2/kg^2.

Vektoriell geschrieben lautet das Gesetz:

$$\boldsymbol{F} = -f\,\frac{m_1\, m_2}{r^3}\,\boldsymbol{r}. \qquad \textbf{(11)}$$

Wenn man von der Anziehung der Planeten untereinander absieht und statt des gemeinsamen Schwerpunkts der Sonne und des gerade betrachteten Planeten den Mittelpunkt der Sonne als Drehzentrum und als Ursprung des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ annimmt, so gelten die folgenden Überlegungen.

Zur Vereinfachung bezeichne ich die Sonnenmasse mit M und die Planetenmasse mit m.

Die anziehende Kraft ist eine Zentralkraft, nämlich stets auf die Sonne gerichtet, und es gilt:

$$\boldsymbol{F} = -f\,\frac{M\, m}{r^3}\,\boldsymbol{r}.$$

Die Feldstärke des Feldes ist:

$$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = -f\,\frac{M}{r^3}\,\boldsymbol{r}.$$

Die Kraft $\boldsymbol{F}$ des Feldes erzeugt eine Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ der Masse m, worauf diese mit der Trägheitskraft

$$\boldsymbol{F}_T = -m\,\boldsymbol{a} = -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \qquad \textbf{(12)}$$

reagiert. Diese Kraft wiederum ist der angreifenden Kraft $\boldsymbol{F}$ entgegengesetzt gerichtet.

In der soeben benutzten Bewegungsgleichung stellt m die **träge Masse** des Planeten dar, im Gravitationsgesetz dagegen ist m seine **schwere Masse**. Es ist keineswegs selbstverständlich, dass diese beiden Massen gleich (oder einander proportional) sind. Nachdem alle Versuche gescheitert waren, experimentell einen Unterschied zwischen träger und schwerer Masse nachzuweisen, hat man sich in der Physik daran gewöhnt, beide Massen als gleich zu betrachten, obwohl es keinen erkennbaren Grund dafür gab. Albert EINSTEIN hat die Gleichheit von schwerer und träger Masse zur Grundlage seiner Allgemeinen Relativitätstheorie gemacht. Die vielfältige experimentelle Bestätigung dieser Theorie bestätigt auch die Richtigkeit ihrer Voraussetzungen und auch damit die Gleichheit von schwerer und träger Masse.

Aus

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_T$$

folgt dann

$$-f\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r} = -m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}. \qquad \textbf{(13)}$$

Die Lösung dieser vektoriellen Differentialgleichung 2. Ordnung wird einfacher, wenn wir auf die beiden uns bereits bekannten »Integrale« der Bewegungsgleichung zurückgreifen, auf den Energiesatz und den Flächensatz. Diese beiden Sätze sind nämlich Differentialgleichungen von lediglich 1. Ordnung. Der Energiesatz lautet:

$$\frac{m}{2}v^2 - f\frac{Mm}{r} = \text{konst.} = \frac{m}{2}v_0^2 - f\frac{Mm}{r_0}. \qquad \textbf{(14)}$$

Das bedeutet: Die Summe aus kinetischer und (negativer) potentieller Energie des Körpers im Gravitationsfeld ist konstant. (Dabei sind v_0 und r_0 die Geschwindigkeit bzw. der Radius in einer beliebigen Ausgangsposition, z. B. im Punkt kleinster oder größter Entfernung des Planeten von der Sonne.)

Der Flächensatz in Polarkoordinaten lautet:

$$\left|\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| = r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = C. \qquad \textbf{(15)}$$

Um den zeitlichen Ablauf der Bewegung zu berechnen, muss man durch nochmalige Integration aus diesen beiden Gleichungen r und φ als Funktionen der Zeit bestimmen. Wenn wir uns aber darauf beschränken, lediglich die Gleichung der Bahnkurve herzuleiten, dann genügt es, aus den beiden Gleichungen die Zeit zu eliminieren.

Es ist (siehe »Kinematik« auf dieser Website unter »Geschwindigkeit in ebenen Polarkoordinaten«)

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \textbf{(16)}$$

woraus folgt:

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Ferner ist

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

und nach dem Flächensatz

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{r^2}.$$

Damit ergibt sich aus dem Energiesatz:

$$\frac{C^2}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2fM}{r} = v_0^2 - \frac{2fM}{r_0}.$$

Durch Trennung der Variablen r und φ erhält man daraus:

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\frac{C}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{\left(v_0^2 - \frac{2fM}{r_0}\right) + \frac{2fM}{r} - \frac{C^2}{r^2}}}.$$

Wir substituieren $1/r = u$ (dann wird $-\mathrm{d}r/r^2 = \mathrm{d}u$) und integrieren auf beiden Seiten:

$$\varphi + K = -\int \frac{C\,\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(v_0^2 - \frac{2fM}{r_0}\right) + 2fMu - C^2u^2}}.$$

Mit dem Integral nehmen wir nun folgende Umformungen vor:

$$\int \frac{C\,\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(v_0^2 - \frac{2fM}{r_0}\right) + 2fMu - C^2u^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{C^2} - \frac{2fM}{C^2 r_0}\right) + \frac{2fM}{C^2}u - u^2}},$$

woraus mit entsprechenden Abkürzungen wird:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a + 2bu - u^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a - (u-b)^2 + b^2}} = \int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{\left(a + b^2\right) - w^2}}$$

$$= \arcsin \frac{w}{\sqrt{a+b^2}} = \arcsin \frac{-b}{\sqrt{a+b^2}} = \arcsin \frac{\frac{1}{r} - \frac{fM}{C^2}}{\sqrt{a+b^2}} = \arcsin \frac{\frac{1}{r} - \frac{fM}{C^2}}{\alpha}.$$

Damit ergibt sich

$$\varphi + K = -\arcsin \frac{\frac{1}{r} - \frac{fM}{C^2}}{\alpha} = \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{fM}{C^2}}{\alpha} - \frac{\pi}{2}.$$

Beziehen wir $\pi/2$ in die Konstante bei φ mit ein, so erhalten wir

$$\arccos\frac{\frac{1}{r}-\frac{fM}{C^2}}{\alpha}=\varphi+K,$$

$$\frac{\frac{1}{r}-\frac{fM}{C^2}}{\alpha}=\cos\left(\varphi+K\right),\quad \frac{1}{r}=\frac{fM}{C^2}+\alpha\cos\left(\varphi+K\right)$$

und schließlich

$$r=\frac{1}{\frac{fM}{C^2}+\alpha\cos\left(\varphi+K\right)}=\frac{\frac{C^2}{fM}}{1+\frac{C^2\alpha}{fM}\cos\left(\varphi+K\right)}=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\left(\varphi+K\right)}.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts in der Polarform, wobei der Pol des Koordinatensystems in einem der Brennpunkte liegt. Damit haben wir das 1. Keplersche Gesetz abgeleitet: Die Bahnen der Planeten (und die der Kometen) des Sonnensystems sind Kegelschnitte, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Legt man die Polarachse so, dass sie zum nächstgelegenen Scheitel (also zum Perihel) zeigt, wird $K = 0$ und die Gleichung vereinfacht sich weiter zu:

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \tag{17}$$

Dabei ist

$$p=\frac{C^2}{fM}\quad \text{und}\quad \varepsilon=\frac{C^2\alpha}{fM}=\frac{C}{fM}\sqrt{v_0^2-\frac{2fM}{r_0}+\frac{f^2M^2}{C^2}}.$$

Der Kegelschnitt mit dieser Gleichung ist

eine Ellipse für $\varepsilon < 1$,

eine Parabel für $\varepsilon = 1$,

eine Hyperbel für $\varepsilon > 1$.

Für $\varepsilon < 1$ ist

$$v_0^2-\frac{2fM}{r_0}+\frac{f^2M^2}{C^2}<\frac{f^2M^2}{C^2}\quad\Rightarrow\quad v_0^2<\frac{2fM}{r_0}\quad\Rightarrow\quad \frac{m}{2}v_0^2<\frac{fMm}{r_0}.$$

Die Bahnkurve ist also dann eine Ellipse, wenn die (konstante) Summe aus der kinetischen Energie des Körpers und seiner (negativen) potentiellen Energie negativ ist (siehe dazu den Energiesatz oben). Die Bahnkurve ist eine Parabel, wenn diese Summe null ist und eine Hyperbel, wenn die Summe positiv ist.

Anders gesagt: Im Fall der Ellipse ist die Gesamtenergie des Körpers negativ, im Fall der Parabel ist sie null, im Fall der Hyperbel positiv.

8 Relativ zueinander bewegte Bezugssysteme

8.1 Inertialsysteme

Die ersten beiden Grundgesetze der Dynamik – das so genannte erste und zweite Newtonsche Axiom – gelten nur in einer besonderen Kategorie von Bezugssystemen, den so genannten Inertialsystemen.

Ein Inertialsystem ist daran erkennbar, dass drei Körper, die in drei nicht komplanare Richtungen geworfen werden, sich wegen des Trägheitsprinzips relativ zu ihm auf Geraden bewegen. (Zur Erinnerung: Nicht komplanare Vektoren liegen nicht in einer Ebene.) Nach diesem Kriterium dürfen Inertialsysteme nicht beschleunigt sein, sie dürfen nicht rotieren und es darf in ihnen kein Gravitationsfeld existieren. Demnach ist ein auf der Erdoberfläche ruhendes Bezugssystem, selbst wenn man von der Rotation der Erde absieht, kein Inertialsystem. Wir werden später sehen, dass man auf der Erde ein Inertialsystem herstellen kann, indem man ein Bezugssystem (z. B. in einem Kasten) frei fallen lässt. Angesichts dieser Schwierigkeiten ist ein Inertialsystem eine Abstraktion, allerdings eine sehr wichtige und nützliche. Immerhin lassen sich mit einer Luftkissenfahrbahn, einem Luftkissentisch oder ähnlichen Anordnungen ein- bzw. zweidimensionale Inertialsysteme simulieren.

Besäße man ein Inertialsystem, dann wären alle anderen Bezugsysteme, die relativ zu dem ersten nicht beschleunigt sind, die nicht rotieren und in denen kein Gravitationsfeld existiert, ebenfalls Inertialsysteme, auch wenn sie sich relativ zum ersten System gleichförmig geradlinig bewegen.

8.2 Die GALILEI- Transformationen

Wir betrachten zwei relativ zueinander mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ bewegte Inertialsysteme, die aus zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen und einer hinreichend großen Zahl von synchron gehenden Uhren bestehen. (Der gleichmäßige Ablauf der Zeit in den beiden Bezugssystemen ist eine Annahme, die bis 1905 als selbstverständlich galt, durch die Spezielle Relativitätstheorie Albert Einsteins jedoch widerlegt wurde. Für Relativgeschwindigkeiten $\boldsymbol{u}$, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c sind, kann man sie jedoch näherungsweise noch immer gelten lassen.)

Zur Vereinfachung dürfen wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeingültigkeit annehmen, die Ursprünge der beiden Koordinatensystemen mögen zur Zeit $t = 0$ zusammenfallen. Dann lauten die so genannten GALILEI-Transformationen für den Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen in Vektorform

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}\,t, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{u}\,t. \tag{18}$$

Dabei sind $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ die Ortsvektoren eines (evtl. bewegten und beschleunigten) Punktes P in den beiden Systemen.

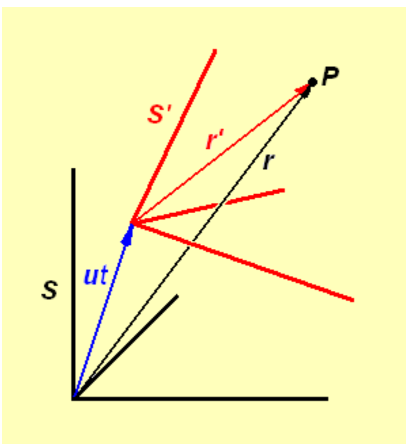

Abb. 5

Durch Differenzieren nach der Zeit ergibt sich aus der ersten Gleichung für die Geschwindigkeiten des Punktes in den beiden Systemen:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{u} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}.$$

Die beiden Geschwindigkeiten unterscheiden sich um den konstanten Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{u}$, die so genannte **Führungsgeschwindigkeit.** Diese ist identisch mit der Geschwindigkeit, die ein in *S'* ruhender Punkt relativ zu *S* hat.

Eine weitere Differentiation ergibt:

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}.$$

Die Beschleunigung des Punktes *P* ist also in beiden Systemen dieselbe.

8.3 Gleichförmig linear beschleunigte Bezugssysteme

Wir betrachten nun ein Inertialsystem *S* und ein relativ dazu gleichförmig linear beschleunigtes System *S'*. Zur Vereinfachung treffen wir die üblichen Verabredungen: Die Beschleunigung $\mathrm{d}\boldsymbol{u}/dt = \boldsymbol{a}_{S'}$ des Systems *S'* beginne zur Zeit $t = 0$, wenn die Ursprünge der beiden Systeme zusammenfallen.

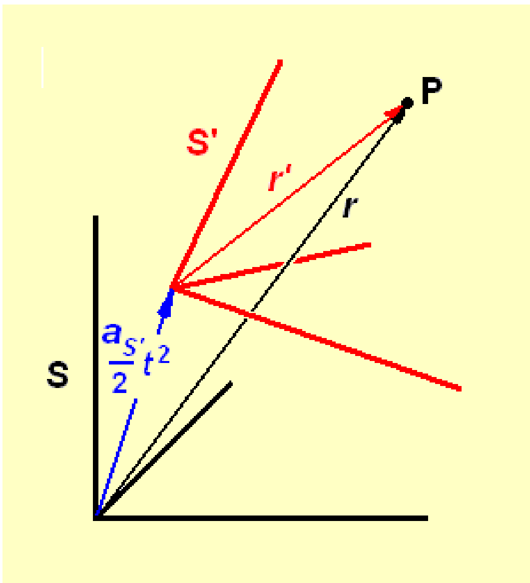

Abb. 6

Dann lautet die Transformationsgleichung für die Ortsvektoren:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{a}_{S'}}{2}t^2.$$

Durch zweimaliges Differenzieren nach der Zeit ergibt sich daraus nacheinander

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{a}_{S'}t \quad \text{und} \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{S'}.$$

Wie zu erwarten, ist nun auch die Beschleunigung des Punktes *P* in *S'* eine andere als in *S*, nämlich um die Beschleunigung des Systems *S'* kleiner.

Wenn der Punkt *P* ein Massenpunkt mit der Masse *m* ist, dann erfordert seine Beschleunigung im System *S* die Kraft

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Für einen Beobachter im System S' aber verhält sich der Massenpunkt so, als ob die Kraft

$$\boldsymbol{F}' = m\boldsymbol{a}' = m\left(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{S'}\right) = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{a}_{S'} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_{S'}$$

auf ihn einwirkte, also eine um $m\ \boldsymbol{a}_{S'}$ kleinere Kraft, obwohl auf den Massenpunkt nach wie vor die äußere (»eingeprägte«) Kraft $\boldsymbol{F}$ einwirkt. (Je nach Richtung von $\boldsymbol{a}_{S'}$ relativ zu $\boldsymbol{a}$ kann F' auch größer sein als F.)

Es lohnt sich, dieses Problem genau zu untersuchen. Bei irdischen Inertialsystemen ist die von außen wirkende (eingeprägte) Kraft häufig die Gewichtskraft $\boldsymbol{G}$ des Massenpunktes. Stellen wir uns nun vor, das System S' sei ein Abteil in einem Eisenbahnzug, das System S ein relativ zum Bahndamm ruhendes Inertialsystem. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: Der Massenpunkt sei im System S' frei – bis auf sein Gewicht –, also ein frei fallender Massenpunkt. Wenn der Zug mit konstanter Geschwindigkeit (also unbeschleunigt) fährt, fällt der Massenpunkt in S' senkrecht nach unten. Wenn der Zug dagegen in Richtung seiner Geschwindigkeit beschleunigt wird, bewegt sich der Massenpunkt auf einer nach hinten geneigten Geraden. Ein Beobachter in S' kann dies auf zweifache Weise interpretieren:

1. Er kann annehmen, auf den Massenpunkt wirke eine zusätzliche, nach hinten gerichtete Kraft vom Größenwert $m\ a_{S'}$, die nur von einem horizontal nach hinten gerichteten Gravitationsfeld herrühren kann. Ein Beobachter in S dagegen weiß, dass diese Interpretation falsch ist und dass diese vermeintliche Kraft nicht existiert. (Darum spricht man hier auch von einer »Scheinkraft«.)

2. Der Beobachter in S' kann aber auch schließen, dass der beobachtete Effekt nicht von einer zusätzlichen Kraft herrührt, sondern von einer Beschleunigung seines Bezugssystems. Damit hätte er Recht. Es gibt jedoch für ihn im Inneren seines Bezugssystems (d. h. ohne einen Blick nach draußen) keine Möglichkeit, zwischen den beiden Alternativen zu unterscheiden. Für ihn ist ein beschleunigtes Bezugssystem gleichwertig mit einem nicht beschleunigten Bezugssystem in einem (zusätzlichen) Gravitationsfeld.

Fall 2: Der Massenpunkt sei auf irgendeine Weise mit dem System S' verbunden: er hänge z. B. an einem Faden von der Decke herab oder er liege in der (in Fahrtrichtung gesehen) rückwärtigen Gepäckablage. Wenn der Zug nun beschleunigt wird, bewegt sich der Massenpunkt nach hinten (das »Pendel« hängt schief) bzw. er drückt auf die Rückwand. In beiden Fällen übt das Bezugssystem auf den Massenpunkt eine beschleunigende Kraft aus, und der Massenpunkt reagiert darauf mit einer Trägheitskraft. In diesem Fall sind beide Kräfte (actio und reactio) real und vom Größenwert $m\ a$. Für den Beobachter in S' gibt es dann immer noch die beiden Interpretationen, und noch immer hat er im Inneren des Systems keine Möglichkeit herauszufinden, welche die richtige ist.

Fall 3: Als nächstes untersuchen wir die Wirkung des Gravitationsfeldes in zwei verschiedenen Bezugssystemen und nehmen an, beide Bezugssysteme befänden sich in einem senkrecht nach unten gerichteten Gravitationsfeld, dessen Feldstärke den Größenwert $g = G\ /\ m_s$ habe, wobei G der Größenwert der Gewichtskraft und m_s die schwere Masse des Massenpunktes ist. Ein (abgesehen von seinem Gewicht) freier Massenpunkt erfährt dann im nicht beschleunigten System S durch sein Gewicht G eine nach abwärts gerichtete Beschleunigung vom Größenwert $a = G\ /\ m_t$, wobei m_t die träge Masse des Massenpunktes ist. Da erfahrungsgemäß stets $a = g$ ist, muss $m_t = m_s$ sein, und wir können künftig einfach von der Masse m sprechen.

Wir betrachten nun drei Massenpunkte mit den Massen m_i (i = 1,2,3), die zur Zeit $t = 0$ mit den Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_i$ vom (in dem Moment gemeinsamen) Ursprung der Systeme aus in drei nicht komplanare Richtungen geworfen werden. Ihre Bewegungsgleichungen im Systems S lauten dann:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{v}_i\, t - \frac{g}{2} t^2 \boldsymbol{e}_3, \quad i = 1, 2, 3$$

wobei $\boldsymbol{e}_3$ ein senkrecht nach oben gerichteter Einheitsvektor ist. Die Bahnkurven sind Wurfparabeln.

Das Bezugssystem *S'* dagegen falle frei nach unten, wobei es die Beschleunigung $-g\ \boldsymbol{e}_3$ erfährt. Die Transformationsgleichungen für die Ortsvektoren der drei Massenpunkte sind dann:

$$\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i + \frac{g}{2} t^2 \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{v}_i\, t - \frac{g}{2} t^2 \boldsymbol{e}_3 + \frac{g}{2} t^2 \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{v}_i\, t.$$

Im System *S'* bewegen sich die drei Massenpunkte also auf Geraden. Also ist *S'* ein Inertialsystem.

Folglich gilt:

Ein in einem Gravitationsfeld frei fallendes Bezugssystem ist ein Inertialsystem.

Auf ähnliche Weise kann man zeigen:

Ein im feldfreien Raum mit der Beschleunigung *a* beschleunigtes Bezugssystem ist gleichwertig mit einem nicht beschleunigten System, das sich in einem Gravitationsfeld mit der Feldstärke – *a* befindet.

Diese Aussagen (und die dahinter stehende Annahme, dass die träge Masse eines Körpers gleich seiner schweren Masse ist) bilden die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie.

8.4 Gleichförmig rotierende Bezugssysteme

In einem rotierenden Bezugssystem erfahren alle mit dem Bezugssystem verbundenen Punkte ständig eine zur Drehachse hin gerichtete Beschleunigung (»Zentripetalbeschleunigung«). Bei mit Masse versehenen Punkten ist dazu eine Kraft (»Zentripetalkraft«) erforderlich, die auf irgendeine Weise aufgebracht werden muss. Auf die Zentripetalbeschleunigung reagiert der Massenpunkt mit einer Trägheitskraft, die »Zentrifugalkraft« heißt und die der Zentripetalkraft entgegengesetzt gleich ist. Für einen mit dem Bezugssystem rotierenden Beobachter, der von der Rotation nichts weiß oder diese ignoriert, ist die Zentrifugalkraft (analog zu den Betrachtungen im Kapitel 8.3) eine »Scheinkraft«, die von einem radial nach außen gerichteten Schwerefeld herrühren könnte. (Dieses Feld hätte allerdings die merkwürdige Eigenschaft, proportional zum Abstand von der Drehachse stärker zu werden.) Andererseits könnte ein Beobachter in *S'* aus der Existenz dieser Kraft (und ihren Eigenschaften) schließen, dass sein Bezugssystem rotiert.

Die beiden verschiedenen Betrachtungsweisen sollen nun am Beispiel des Kettenkarussells erläutert werden.
1. Der Beobachter befindet sich in einem ruhenden Bezugssystem (Inertialsystem): Die Gewichtskraft ***G*** bringt zusammen mit der Seilspannung ***S*** die Zentripetalkraft ***Z*** auf**,** die von der Trägheitskraft ***T*** kompensiert wird, sodass der Massenpunkt insgesamt kräftefrei ist (siehe Abb. 7).

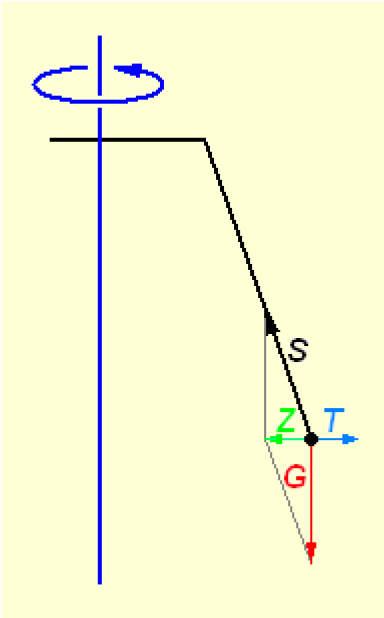

Abb. 7

Gleichberechtigt damit ist folgende Auffassung: Die Gewichtskraft wird in zwei (grün gezeichnete) Komponenten zerlegt (s. Abb. 8). Die eine Komponente ist die benötigte Zentripetalkraft, die andere Komponente spannt das Seil und wird von der Seilspannung kompensiert. ***T*** kompensiert ***Z***, sodass der Massenpunkt wieder kräftefrei ist.

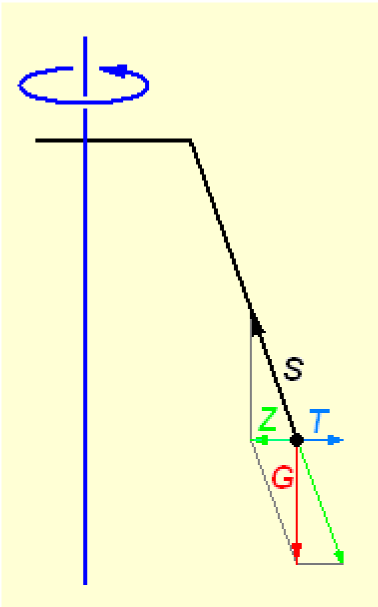

Abb. 8

2. Der Beobachter befindet sich im rotierenden System: Hier ist der Massenpunkt nicht beschleunigt. Es existiert eine Scheinkraft $\boldsymbol{F}_S$, die zusammen mit der Gewichtskraft eine (grün gezeichnete) Resultante bildet, welche von der Seilspannung kompensiert wird (siehe Abb. 9).

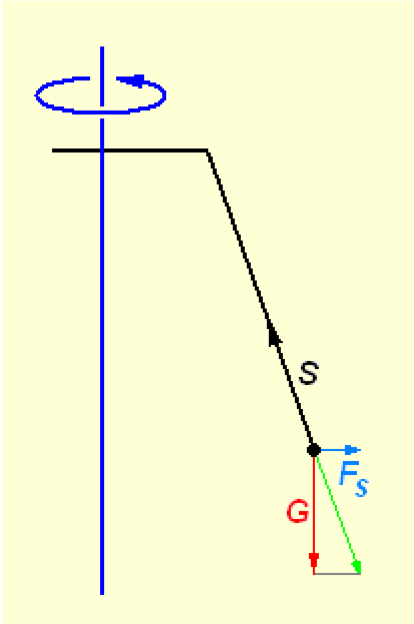

Abb. 9

Als nächstes betrachten wir ein durch drei aufeinander senkrechte Einheitsvektoren $\boldsymbol{e'}_1$, $\boldsymbol{e'}_2$, $\boldsymbol{e'}_3$ definiertes Bezugssystem S', das relativ zum Inertialsystem S mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, wobei die Drehachse durch den gemeinsamen Ursprung der beiden Systeme gehen soll. Ihre Richtung ist durch den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ beschrieben.

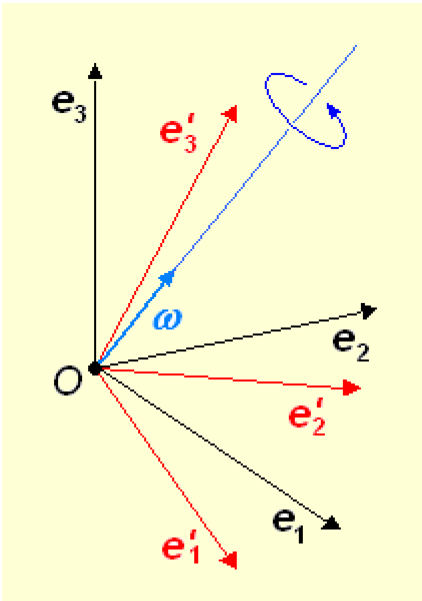

Abb. 10

Der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ eines Punktes P ist in diesem Fall in beiden Systemen derselbe, er hat aber unterschiedliche Komponenten. Seine Komponenten in S seien $x, y, z,$ in S' dagegen x', y', z' . Also ist

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3 .$$

Die Geschwindigkeit des Punktes P im System S ist dann

$$\boldsymbol{v}_S = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_S = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3, \qquad \textbf{(19)}$$

seine Geschwindigkeit im System *S'* dagegen

$$\boldsymbol{v}_{S'} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_3. \tag{20}$$

Diese beiden Geschwindigkeiten sind wegen der Rotation des Systems *S'* nicht gleich. Wenn wir die Geschwindigkeit des Punktes relativ zum ruhenden System *S* aus seinen Koordinaten im System *S'* und aus dessen Bewegung berechnen wollen, müssen wir berücksichtigen, dass sich auch die Einheitsvektoren des Systems *S'* relativ zu *S* bewegen, also ebenfalls Funktionen der Zeit sind. Folglich ist (nach der Produktregel der Differentialrechnung)

$$\boldsymbol{v}_S = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_S = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_3 + x'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_2}{\mathrm{d}t} + z'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_3}{\mathrm{d}t} \tag{21}$$

Die ersten drei Summanden sind die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes *P* relativ zu *S'*, die letzten drei Summanden sind die Komponenten der Geschwindigkeit eines in *S'* festen Punktes mit den Koordinaten *x'*, *y'*, *z'* relativ zu *S* infolge der Bewegung des Systems *S'*, also die Komponenten seiner so genannten **Führungsgeschwindigkeit** $\boldsymbol{v}_{Fü}$. (Abbildung 11 zeigt dies für die erste Komponente.)

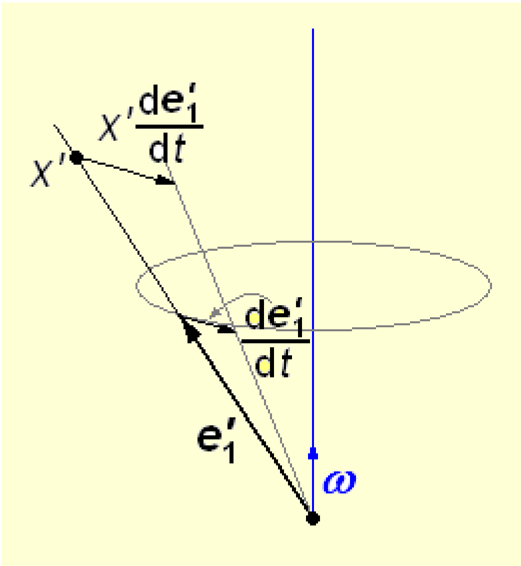

Abb. 11

Also ist

$$\boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}_{S'} + \boldsymbol{v}_{Fü}.$$

Für die Geschwindigkeit der Einheitsvektoren von *S'* im System *S* gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_2, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_3}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_3. \tag{22}$$

Beweis:

Ein Ortsvektor ***R*** von konstanter Länge rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit *ω* um eine Drehachse durch *O*.

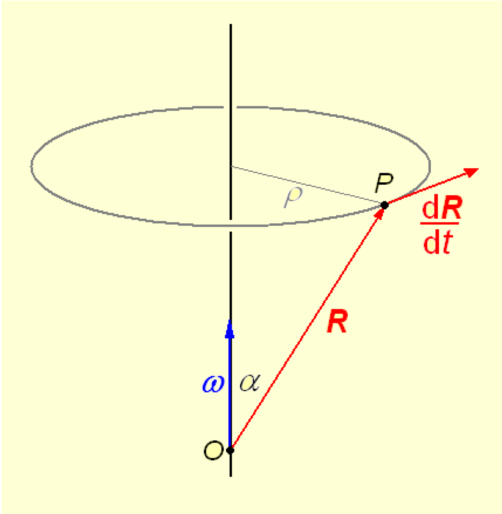

Abb. 12

Dann ist die Geschwindigkeit von P:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}.$$

Für den Größenwert V des Vektors $\boldsymbol{V}$ gilt:

$$V = \omega\rho = \omega R \sin\alpha.$$

Das Produkt $\omega R\ \sin\alpha$ hat denselben Größenwert wie das Vektorprodukt aus einem Vektor $\boldsymbol{\omega}$, der die Richtung der Drehachse und den Größenwert ω der Winkelgeschwindigkeit hat, und aus dem Vektor $\boldsymbol{R}$. Wir nennen den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ den der Winkelgeschwindigkeit **zugeordneten Vektor**, denn die Winkelgeschwindigkeit selbst ist kein Vektor. Außerdem steht $\boldsymbol{V}$ auf $\boldsymbol{\omega}$ und $\boldsymbol{R}$ senkrecht, und $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{V}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Also ist:

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}. \tag{23}$$

Exkurs im Hinblick auf eine spätere Anwendung:

Denkt man sich den Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{V} = \mathrm{d}\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t$ an den Ursprung O angeheftet, so ist auch er als ein Vektor, der mit ω um O rotiert. Dann findet man durch Anwendung der Gleichung 23 auf $\boldsymbol{V}$ den Vektor $\boldsymbol{A}$ der Beschleunigung:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} \equiv \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}\right). \tag{24}$$

Wendet man Gleichung 23 statt auf $\boldsymbol{R}$ auf die drei »Basisvektoren« $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ des Systems S' an, so erhält man die Gleichungen 22 und damit für die Führungsgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}_{Fü} = x'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t} + y'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_2}{\mathrm{d}t} + z'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_3}{\mathrm{d}t} = x'(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_1) + y'(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_2) + z'(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_3)$$
$$= (\boldsymbol{\omega}\times x'\boldsymbol{e}'_1) + (\boldsymbol{\omega}\times y'\boldsymbol{e}'_2) + (\boldsymbol{\omega}\times z'\boldsymbol{e}'_3) \quad \textbf{(25)}$$
$$= \boldsymbol{\omega}\times(x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2 + z'\boldsymbol{e}'_3)$$
$$= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

Damit ergibt sich aus Gleichung 21

$$\boldsymbol{v}_S = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_S = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_3 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \quad \textbf{(26)}$$

Bezeichnen wir die Differentiation, bei der nur die *skalaren Komponenten x', y', z'* des Vektors $\boldsymbol{r}$ nach der Zeit differenziert werden (also die Operation, welche die ersten drei Summanden der Gleichung 21 erzeugt) mit

$$\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \text{ setzen also } \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_1 + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_2 + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}'_3 = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \textbf{(27)}$$

so wird

$$\boldsymbol{v}_S = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_S = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \quad \textbf{(28)}$$

In dieser Gleichung tritt im mittleren Teil in beiden Termen derselbe Vektor $\boldsymbol{r}$ auf, der völlig beliebig ist. Also gilt die Gleichung auch für jeden anderen Vektor $\boldsymbol{u}$, der mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ definierte Achse rotiert. Wir haben somit eine allgemein gültige Rechenregel gewonnen:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)_S = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{u}. \quad \textbf{(29)}$$

Diese Regel kann natürlich auch auf den Vektor $(\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t)_S$ angewendet werden, da dieser ebenfalls mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse rotiert. Dadurch erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_S \equiv \left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_S = \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_S + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_S. \quad \textbf{(30)}$$

Wendet man auf die beiden Terme $(\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t)_S$ in dieser Gleichung wiederum die Gleichung 29 an, so erhält man

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_S = \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right) + \boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right) + \boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \quad \textbf{(31)}$$
$$= \frac{\mathrm{d}^{*2}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + 2\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}).$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{S'}$ des Punktes *P* bezüglich des Systems *S'*. Der dritte Term ist die Führungsbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{Fü}$, das ist die Beschleunigung, die ein mit *S'* rotierender Punkt relativ zu *S* erfährt (s. Gleichung 24) Dieser Term ist die **Zentripetalbe-**

schleunigung, die der Punkt erfährt, da er – relativ zu *S* – (evtl. neben anderen Bewegungen) eine Kreisbewegung ausführt. Die Zentripetalbeschleunigung ist auf die Drehachse hin gerichtet. Dazu kommt nun ein weiterer Term (der mittlere), der proportional zum Größenwert der Winkelgeschwindigkeit ist, der aber nur dann von null verschieden ist, wenn sich der Punkt *P* im System *S'* bewegt und die Richtung dieser Bewegung nicht parallel zur Drehachse ist. Dieser Term heißt **CORIOLIS-Beschleunigung** $\boldsymbol{a}_C$. Sie steht auf der Geschwindigkeit, die *P* in *S'* hat, und auf der Drehachse senkrecht. Die Gesamtbeschleunigung des Punktes ist für einen Beobachter in *S* also

$$\boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{a}_{S'} + \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_{Fü}. \tag{32}$$

Ist der Punkt *P* ein Massenpunkt mit der Masse *m*, dann lautet das Grundgesetz der Dynamik für ihn

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= m\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_S = m\frac{\mathrm{d}^{*2}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} + 2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \\ &= m\boldsymbol{a}_S = m\boldsymbol{a}_{S'} + 2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{S'}) + m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{33}$$

Dies ist die Kraft, die – von *S* aus beurteilt – erforderlich ist, um die drei rechts stehenden Beschleunigungen hervorzubringen. (Auf diese Kraft reagiert der Massenpunkt mit einer entgegengesetzt gleichen Trägheitskraft –$\boldsymbol{F}$, welche die negative Summe der drei rechts stehenden Kräfte ist.) Der erste Term auf der rechten Seite ist die Kraft, welche die Beschleunigung des Massenpunktes in *S'* hervorbringt; sie hat die Richtung dieser Beschleunigung. Die zweite Term ist die Kraft, welche die CORIOLIS-Beschleunigung hervorruft; sie steht auf der Geschwindigkeit des Massenpunktes (bezüglich *S')* und auf der Drehachse senkrecht. Der dritte Term ist die zur Drehachse hin gerichtete Zentripetalkraft.

Für einen Beobachter in *S'* ist die auf den Körper wirkende Kraft dann

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}' &= m\frac{\mathrm{d}^{*2}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} - 2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \\ &= m\boldsymbol{a}_{S'} = \boldsymbol{F} - 2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{S'}) - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{34}$$

Zu der »eingeprägten Kraft« $\boldsymbol{F}$ (die für einen Beobachter in *S* von außen auf den Körper einwirkt) kommen noch zwei Kräfte hinzu, die je nach Interpretation (siehe 8.3) als Scheinkräfte oder als Reaktionskräfte (Trägheitskräfte) interpretiert werden können. Die erste ist die so genannte CORIOLIS-Kraft

$$-2m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{S'}),$$

die zweite die Zentrifugalkraft

$$-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}).$$

Wie ein Vergleich der Gleichungen 31, 33 und 34 zeigt, ist die CORIOLIS-Kraft der CORIOLIS-Beschleunigung **entgegengesetzt** gerichtet, genau so wie die Zentrifugalkraft der Zentripetalbeschleunigung und der Zentripetalkraft entgegengesetzt gerichtet ist.

Beispiel: Rotierende Scheibe

Als einfaches Beispiel betrachten wir einen Punkt *P* (*x', y', z')* auf einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden horizontalen Scheibe.

1. Wir nehmen an, dass sich der Punkt auf der Scheibe mit konstanter Bahngeschwindigkeit vom Mittelpunkt aus radial nach außen bewegt. In Abb. 13 ist die Lage des Punktes zu zwei verschiedenen Zeiten dargestellt: 1. Zu der Zeit, da sich die Scheibe um den Winkel φ gedreht hat, 2. in dem Moment, wenn der Punkt den Rand der Scheibe erreicht.

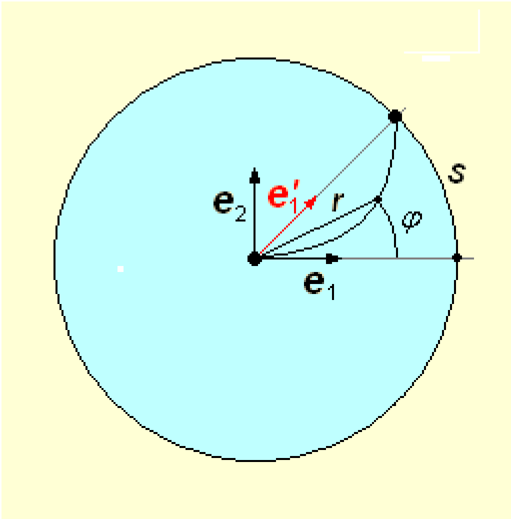

Abb. 13

Im System *S* ist in Polarkoordinaten

$$r = vt, \quad \varphi = \omega t = \frac{\omega}{v} r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v}{\omega}\varphi.$$

Das ist die Polargleichung einer Archimedischen Spirale.

Im System *S* hat der Punkt neben der radialen Geschwindigkeit v eine dazu senkrechte Tangentialgeschwindigkeit, die proportional zu r und damit auch proportional zu t zunimmt. Er erfährt also eine konstante Beschleunigung, eben die CORIOLIS-Beschleunigung a_C.. Infolge dieser Beschleunigung legt er im System *S* bis zur Zeit t_1 (wenn $r = R$ geworden ist) den Bogen

$$s = \frac{a_C}{2} t_1^2 \qquad \textbf{(35)}$$

zurück. Andererseits ist $s = R\ \omega t_1$ und $R = v\ t_1$, also $s = v\ \omega t_1^2$. Ein Vergleich mit Gleichung 35 ergibt dann für den Größenwert der CORIOLIS-Beschleunigung

$$a_C = 2v\omega.$$

Das was ich Ihnen eben vorgeführt habe, ist der in der Literatur übliche Schwindel. Der Körper legt nämlich gar nicht den Bogen s zurück, sondern nur die Hälfte davon, weil er im Mittel nur den Abstand $R/2$ vom Mittelpunkt hat und er sich daher tangential nur über die Strecke $s/2$ bewegt. So ergibt sich also für die CORIOLIS-Beschleunigung der Wert

$$a_C = v\omega.$$

Zum gleichen Ergebnis kommt man auf dem folgenden einfacheren und übersichtlicheren Weg: Auf seinem Weg nach außen wird der Körper auf die Tangentialgeschwindigkeit

$$v_{\tan} = \omega R = \omega v t$$

beschleunigt. Also ist die Beschleunigung

$$a_{\mathrm{C}} = \frac{\Delta v_{\tan}}{\Delta t} = \frac{v_{\tan}}{t} = \omega v.$$

Dies ist, wie gleich gezeigt wird, nur die Hälfte des richtigen Wertes. Daraus folgt: Für die CORIOLIS-Beschleunigung gibt es keine elementare Herleitung.

Es sollen nun an diesem Vorgang die oben angestellten allgemeinen Berechnungen exemplarisch nachvollzogen werden.

Der Ortsvektor des betrachteten Punktes ist in *S'*

$$\boldsymbol{r} = v\,t\,\boldsymbol{e}'_1.$$

Daraus folgt einerseits

$$\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_{S'} = v\,\boldsymbol{e}'_1, \quad \frac{\mathrm{d}^{*2}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{a}_{S'} = 0$$

und andererseits

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_S = v\,\boldsymbol{e}'_1 + v\,t\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t} \tag{36}$$

Es ist nun

$$v\,\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{v}_{S'} \quad \text{(siehe oben) und}$$

$$v\,t\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t} = r\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_1\right) \quad \text{(siehe Gleichung 21)}$$
$$= \left(\boldsymbol{\omega}\times r\,\boldsymbol{e}'_1\right) = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

und somit

$$\boldsymbol{v}_S = \boldsymbol{v}_{S'} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

Aus Gleichung 36 folgt weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{a}_S &= v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t} + v\,t\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t^2} \\
&= 2v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t} + v\,t\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t^2} = 2v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{e}'_1}{\mathrm{d}t^2} \\
&= 2v\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_1\right) + r\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_1\right)\right] \quad \text{(siehe Gleichung 24)} \\
&= 2v\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_1\right) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) = 2v\,\omega\,\boldsymbol{e}'_2 - v\,t\,\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{e}'_1.
\end{aligned}$$

Der erste Term in der letzten Zeile ist die CORIOLIS-Beschleunigung. Da $\boldsymbol{v}$ auf $\boldsymbol{\omega}$ senkrecht steht, ist ihr Größenwert $2\omega v$. Der zweite Term ist die Zentripetalbeschleunigung, die nötig ist, um die Zentrifugalbeschleunigung zu kompensieren, sodass der Punkt sich mit konstanter Radialgeschwindigkeit (und nicht beschleunigt) nach außen bewegt.

Dasselbe Ergebnis erhält man unmittelbar aus Gleichung 31:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_S &= 0 + 2\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) + \boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right) = 2\left(\boldsymbol{\omega}\times v\,\boldsymbol{e}'_1\right) + \boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right) \\
&= 2v\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}'_1\right) + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right) = -v\,t\,\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{e}'_1 + 2v\,\omega\,\boldsymbol{e}'_2.
\end{aligned}$$

Nun soll dieses Ergebnis im System *S* dargestellt werden. Es ist

$$\boldsymbol{e}'_1 = \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_S &= -vt\omega^2\left(\cos(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(\omega t)\boldsymbol{e}_2\right) + 2v\omega\left(-\sin(\omega t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(\omega t)\boldsymbol{e}_2\right)\\ &= -\left[vt\omega^2\cos(\omega t) + 2v\omega\sin(\omega t)\right]\boldsymbol{e}_1 + \left[2v\omega\cos(\omega t) - vt\omega^2\sin(\omega t)\right]\boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

2. Betrachten wir nun noch einen Punkt *P*, der im System *S'* mit der Winkelgeschwindigkeit ω^* auf einem Kreis vom Radius ρ um *M* rotiert.

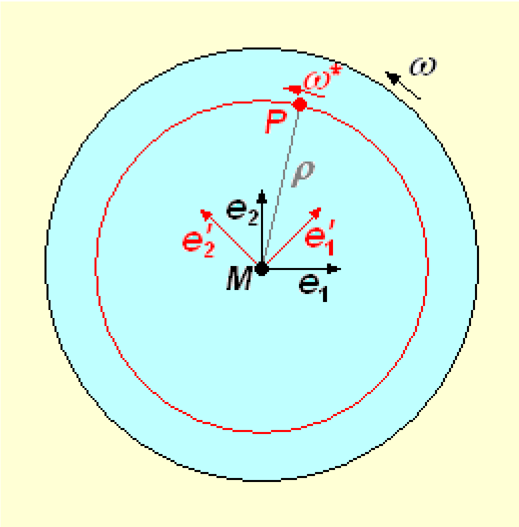

Abb. 14

Hier ist in *S:*

$$\boldsymbol{r} = \rho\cos\left[(\omega+\omega^*)t\right]\boldsymbol{e}_1 + \rho\sin\left[(\omega+\omega^*)t\right]\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{v}_S = -\rho(\omega+\omega^*)\sin\left[(\omega+\omega^*)t\right]\boldsymbol{e}_1 + \rho(\omega+\omega^*)\cos\left[(\omega+\omega^*)t\right]\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{a}_S = -\rho(\omega+\omega^*)^2\cos\left[(\omega+\omega^*)t\right]\boldsymbol{e}_1 - \rho(\omega+\omega^*)^2\sin\left[(\omega+\omega^*)t\right]\boldsymbol{e}_2 = -(\omega+\omega^*)^2\boldsymbol{r}.$$

Und in *S'*:

$$\boldsymbol{r} = \rho\cos(\omega^* t)\boldsymbol{e}_1 + \rho\sin(\omega^* t)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{v}_{S'} = -\rho\omega^*\sin(\omega^* t)\boldsymbol{e}_1 + \rho\omega^*\cos(\omega^* t)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{a}_{S'} = -\rho\omega^{*2}\cos(\omega^* t)\boldsymbol{e}_1 - \rho\omega^{*2}\sin(\omega^* t)\boldsymbol{e}_2 = -\omega^{*2}\boldsymbol{r}.$$

Mit den Gleichungen 23 und 24 erhält man dagegen

$$\boldsymbol{v}_{S'} = \frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{a}_{S'} = \frac{\mathrm{d}^{*2}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{\omega}^*\times(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}).$$

Dann ist nach Gleichung 31

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_S &= \boldsymbol{a}_{S'} + 2\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{S'}\right) + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right) \\ &= \underbrace{\boldsymbol{\omega}^*\times\left(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}\right)}_{\text{Beschl. in } S'} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}^*\times\boldsymbol{r}\right)}_{\text{CORIOLIS-Beschl.}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\right)}_{\text{Führungsbeschl.}} . \end{aligned}$$

Alle drei Vektoren sind auf M hin gerichtet, außerdem steht $\boldsymbol{r}$ auf der Drehachse senkrecht. Daher ist

$$\boldsymbol{a}_S = -\left(\omega^{*2} + 2\,\omega\,\omega^* + \omega^2\right)\boldsymbol{r} = -\left(\omega^* + \omega\right)^2 \boldsymbol{r}.$$

8.5 Anwendung auf die Erde als rotierendes Bezugssystem

Der folgenden Untersuchung liegen zwei – durchaus gerechtfertigte – Vereinfachungen zugrunde:

1. Die Erde wird als Kugel betrachtet,

2. Die Rotation der Erde um die Sonne wird vernachlässigt.

Wir betrachten einen Punkt P auf der Erdoberfläche mit der geographischen Breite φ.

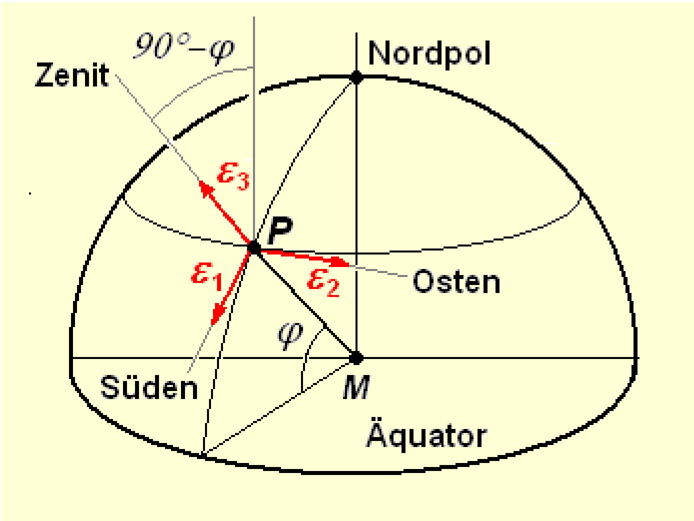

Abb. 15

In P errichten wir ein (vorläufiges) Bezugssystem aus den drei Einheitsvektoren $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$, die nach Süden, nach Osten und zum Zenit hin gerichtet sind und daher aufeinander senkrecht stehen. Dieses Bezugssystem wird nun parallel so verschoben, dass sein Ursprung in M zu liegen kommt; seine Einheitsvektoren werden dann mit $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}'_3$ bezeichnet. Es rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω der Erde um deren Achse. Ferner wird in M ein (nicht rotierendes) Inertialsystem mit den Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ in der skizzierten Lage errichtet.

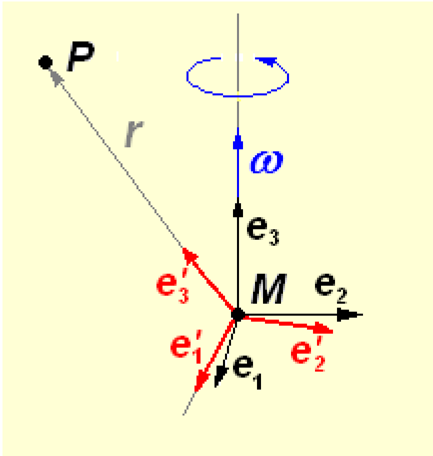

Abb. 16

In diesen beiden Bezugssystemen gelten für den Ortsvektor von *P* sowie für seinen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor die oben abgeleiteten Gesetze. Nach Gleichung 34 ist die auf den Massenpunkt im System *S'* wirkende Kraft

$$m\frac{\mathrm{d}^{*2}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F} - 2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^{*}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) - m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}).$$

Dabei ist die »eingeprägte Kraft« $\boldsymbol{F}$ das Gewicht des Massenpunktes, das entgegengesetzt zu $\boldsymbol{e}'_3$ wirkt:

$$\boldsymbol{F} = -m\,g\,\boldsymbol{e}'_3.$$

Also ist

$$m\frac{\mathrm{d}^{*2}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -m\,g\,\boldsymbol{e}'_3 - 2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^{*}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) - m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}).$$

Der Vektor $2\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^{*}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ist die auf die Drehachse gerichtete CORIOLIS-Beschleunigung, der Vektor $-2m\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^{*}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)$ die radial nach außen gerichtete CORIOLIS-Kraft. Der Vektor $(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ ist die Geschwindigkeit (siehe Gleichung 23), der Vektor $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ ist die Zentripetalbeschleunigung, daher ist $-m\,\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ die Zentrifugalkraft. Da in diesem Term die sehr kleine Winkelgeschwindigkeit (ω = 7,3·10^{-5} s^{-1}) im Quadrat auftritt, kann er im Allgemeinen vernachlässigt werden. Damit erhält man

$$\frac{\mathrm{d}^{*2}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\,\boldsymbol{e}'_3 - 2\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}^{*}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = -g\,\boldsymbol{e}'_3 - 2\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \boldsymbol{e}'_3 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 \\ \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix}$$

und in Komponenten

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} &= -2\omega'_2\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t} + 2\omega'_3\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} &= -2\omega'_3\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} + 2\omega'_1\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2} &= -g - 2\omega'_1\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} + 2\omega'_2\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Entnimmt man der Abb. 15 die Winkel zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und den Einheitsvektoren, so findet man für die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{\omega}$, welcher der Winkelgeschwindigkeit zugeordnet ist,

$$\omega'_1 = -\omega\cos\varphi, \quad \omega'_2 = 0, \quad \omega'_3 = \omega\sin\varphi.$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
a_{x'} &= \frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} = \left(2\omega\sin\varphi\right)\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = \left(2\omega\sin\varphi\right)v_{y'}\\
a_{y'} &= \frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} = -\left(2\omega\sin\varphi\right)\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} - \left(2\omega\cos\varphi\right)\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t} = -\left(2\omega\sin\varphi\right)v_{x'} - \left(2\omega\cos\varphi\right)v_{z'}\\
a_{z'} &= \frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2} = -g + \left(2\omega\cos\varphi\right)\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = -g + \left(2\omega\cos\varphi\right)v_{y'}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Wir wenden nun diese Gleichungen auf zwei spezielle Fälle an, auf den freien Fall und auf horizontale Bewegungen auf der Erdoberfläche.

8.5.1 Freier Fall

Wir betrachten einen Körper, der zunächst in der Höhe h festgehalten und zur Zeit t =0 frei (d. h. ohne Luftwiderstand) fallen gelassen wird. Zu Beginn der Bewegung ist

$$v_{x'} = v_{y'} = v_{z'} = 0.$$

Da $v_{y'}$ wegen des geringen Wertes von ω nur langsam wächst (siehe die mittlere Gleichung von (38)), können wir in der unteren und der oberen Gleichung von (38) – wo $v_{y'}$ zudem nochmals mit ω multipliziert wird – näherungsweise setzen

$$\frac{\mathrm{d}^2z'}{\mathrm{d}t^2} = -g \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Dann wird angenähert

$$\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t} \equiv v_{z'} = -gt, \quad z' = -\frac{g}{2}t^2 + h, \quad v_{x'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} = -\left(2\omega\cos\varphi\right)v_{z'}. \tag{39}$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} = 2\omega g\, t\cos\varphi$$

und durch zweimalige Integration

$$y' = \frac{\omega g}{3}t^3\cos\varphi. \tag{40}$$

Übereinstimmend mit Beobachtungen ergibt sich also beim freien Fall eine zur dritten Potenz der Fallzeit proportionale Ostabweichung von der Senkrechten.

Dieser Effekt ist plausibel: In der Höhe h über der Erdoberfläche besitzt ein Körper infolge der Erdrotation eine etwas höhere Bahngeschwindigkeit als der Punkt senkrecht unter ihm auf Erde. Der fällt daher nicht senkrecht herab, sondern auf einer gekrümmten Kurve. Deren Gleichung ergibt sich aus (39) und (40):

$$y' = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\omega\cos\varphi}{\sqrt{g}}\left(-z'+h\right)^{3/2},$$

und mit $(-z' + h) = z^*$ einfacher

$$y' = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\omega\cos\varphi}{\sqrt{g}} z^{*3/2}.$$

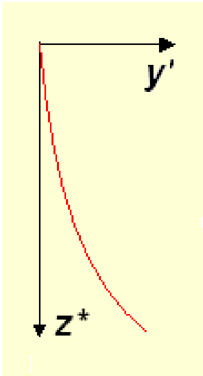

Abb. 17

Auch hierfür gibt es keine elementare Herleitung.

8.5.2 Horizontale Bewegung

Hier ist $v_{z'} = 0$ und daher

$$a_{x'} = \frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} = \left(2\omega\sin\varphi\right)v_{y'}$$

$$a_{y'} = \frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t^2} = -\left(2\omega\sin\varphi\right)v_{x'}$$

$$a_{z'} = \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}t^2} = \left(2\omega\cos\varphi\right)v_{y'}.$$

Ein Körper erfährt also auf der Nordhalbkugel der Erde bei einer West-Ost-Bewegung eine Beschleunigung nach Süden, bei einer Nord-Süd-Bewegung eine Beschleunigung nach Westen (und umgekehrt); in Bewegungsrichtung gesehen ist die Beschleunigung also immer nach rechts gerichtet, auf der Südhalbkugel ($\varphi < 0$) nach links. Für den Größenwert der seitlichen Beschleunigung (Transversalbeschleunigung) ergibt sich

$$a' = \sqrt{a_{x'}^2 + a_{y'}^2} = \left(2\omega\sin\varphi\right)v' \qquad v' = \text{ Größenwert der Horitontalgeschw.}$$

Die seitliche Beschleunigung ist also unabhängig von der (horizontalen) Bewegungsrichtung. Die häufig vertretene Ansicht, dieser Effekt trete nur bei Bewegung in Nord-Südrichtung (und umgekehrt) auf, ist also irrig.

9 Verwendung komplexer Zahlen bei rotierenden Bezugssystemen

Manchmal ist es bei gedrehten oder rotierenden Bezugssystemen zweckmäßig, komplexe Zahlen zu verwenden, indem man y durch i y und y' durch i y' ersetzt, wobei i die imaginäre Einheit ist, die definiert ist durch $\mathrm{i}^2 := -1$.

Wenn $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ ist, dann ist die dem Vektor $\boldsymbol{r}$ entsprechende komplexe Zahl $Z = x + \mathrm{i}\, y$.

Aus

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 = x'\boldsymbol{e}'_1 + y'\boldsymbol{e}'_2$$

folgt mit

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi, \quad \boldsymbol{e}'_2 = -\boldsymbol{e}_1 \sin\varphi + \boldsymbol{e}_2 \cos\varphi$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x'\left(\boldsymbol{e}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi\right) + y'\left(-\boldsymbol{e}_1 \sin\varphi + \boldsymbol{e}_2 \cos\varphi\right)\\ &= \left(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_2,\end{aligned}$$

also ist

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

Für die komplexe Darstellung folgt daraus

$$\begin{aligned}x + \mathrm{i}\, y &= \left(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\right) + \mathrm{i}\left(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right)\\ &= \left(x' + \mathrm{i}\, y'\right)\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right),\end{aligned}$$

und mit der EULERschen Gleichung

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

$$x + \mathrm{i}\, y = \left(x' + \mathrm{i}\, y'\right)e^{\mathrm{i}\varphi}. \qquad \textbf{(41)}$$

Wenn das System S' mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, ist

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \omega t.$$

Die Anwendung dieser Methode wird im nächsten Kapitel gezeigt.

10 Das FOUCAULTsche Pendel

Das FOUCAULTsche Pendel ist exakt und ohne Einschränkungen nur mit erheblichem Aufwand mathematisch zu behandeln. Wir begnügen uns daher hier mit einer gewissen (unerheblichen) Vereinfachung.

Die Schwingungsebene eines über dem Nordpol (oder Südpol) angebrachten Pendels dreht sich – für einen Beobachter auf der Erde – einmal pro Tag um 360° in ost-westlicher Richtung, weil die Erde in dieser Zeit unter dem Pendel eine volle Umdrehung in umgekehrter Richtung macht und die Schwingungsebene des Pendels bezüglich eines Inertialsystems fest ist. Am Äquator bleibt die Schwingungsebene für einen Beobachter auf der Erde unverändert. Überlegungen und Beobachtungen lassen vermuten, dass die Winkelgeschwindigkeit ω^*, mit der sich die Schwingungsebene des Pendels dreht, gleich $-\omega \sin \varphi$ ist, wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und φ die geographische Breite des Beobachtungsortes ist. (Dabei liegt die Drehachse von ω^* auf der ε_3- Achse – siehe Abb. 15 – und ist zum Zenit hin gerichtet.)

Beschränken wir uns auf kleine Pendelamplituden, dann ist die auf die Pendelmasse wirkende Rückstellkraft der Auslenkung proportional, nämlich gleich

$$\frac{mg}{l}x' \text{ bzw. } \frac{mg}{l}y' \quad l\text{: Pendellänge}$$

Aus den Gleichung 38 erhält man dann unter Berücksichtigung der Komponenten der Rückstellkraft

$$m\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mg}{l}x'=2m\omega(\sin\varphi)\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t},$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mg}{l}y'=-2m\omega(\sin\varphi)\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}.$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit i und addiert die beiden Gleichungen, so erhält man nach Kürzen durch *m*

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x'+\mathrm{i}y')+\frac{g}{l}(x'+\mathrm{i}y')=-2\,\mathrm{i}\,\omega\sin\varphi.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x'+\mathrm{i}y').$$

Das ist eine Differentialgleichung für die komplexe Variable $Z' = x' + \mathrm{i}\,y'$:

$$\frac{\mathrm{d}^2Z'}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}Z'=-(2\,\mathrm{i}\,\omega\sin\varphi)\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}t}. \qquad \textbf{(42)}$$

Führt man nun ein weiteres (ξ, η)-Koordinatensystem ein, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega^* = -\omega\sin\varphi$ gegenüber dem ersten dreht, so wird mit Gleichung (41)

$$x'+\mathrm{i}y'=(\xi+\mathrm{i}\eta)e^{-\mathrm{i}\omega\sin\varphi t} \text{ oder kurz } Z'=Ye^{-\mathrm{i}\omega\sin\varphi t} \text{ mit } Y=\xi+\mathrm{i}\eta$$
$$\frac{\mathrm{d}Z'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}e^{-\mathrm{i}\omega\sin\varphi t}-\mathrm{i}\,\omega\sin\varphi Y e^{-\mathrm{i}\omega\sin\varphi t}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2Z'}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2}e^{-\mathrm{i}\omega\sin\varphi t}-2\,\mathrm{i}\,\omega\sin\varphi\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}e^{-\mathrm{i}\omega\sin\varphi t}-\omega^2\sin^2\varphi\, Y e^{-\mathrm{i}\omega\sin\varphi t}.$$

Vernachlässigt man den Term mit ω^2 wegen seiner Geringfügigkeit, so erhält man daraus und mit Gleichung 42

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}Y=0,$$

also die gewöhnliche Pendelgleichung. In dem mit ω^* rotierenden System ist also die Pendelebene fest. Folglich rotiert sie für einen auf der Erde ruhenden Beobachter mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega^* = -\omega\sin\varphi$.