Einführung
in die
Theoretische Physik

3.Teil: Schwingbewegungen

Siegfried Petry

14. Januar 2013

I n h a l t :

1 Einleitung 2

2 Mathematischer Exkurs 2

3 Die harmonische Schwingung 3

4 Lineare gedämpfte harmonische Schwingungen 6

4.1 1. Fall: Die gedämpfte harmonische Schwingung **7**

4.2 2. Fall: Aperiodischer Grenzfall **8**

4.3 3. Fall: Aperiodische Bewegung **9**

5 Erzwungene Schwingungen 10

5.1 Ungedämpfte erzwungene Schwingungen **10**

5.2 Gedämpfte erzwungene Schwingungen **14**

6 Das mathematische Pendel 17

6.1 Lösung in 1. Näherung **18**

6.2 Lösung in 1. Näherung über den Energiesatz **19**

6.3 Lösung in 2. Näherung **20**

6.4 Die exakte Lösung **21**

6.5 Die historische Bedeutung des mathematischen Pendels **21**

7 Unfreier Massenpunkt auf horizontaler Kreisbahn 22

8 Amplitudenmodulierte Schwingungen 23

Schwingbewegungen

1. Einleitung

Eine Bewegung, deren Ablauf sich in gleicher oder sehr ähnlicher Form periodisch wiederholt, heißt Schwingbewegung (kurz auch: Schwingung). Bevor ich näher darauf eingehe, werfen wir einen Blick auf periodische mathematische Funktionen, die zur Beschreibung physikalischer Schwingungen dienen können.

2. Mathematischer Exkurs

Die einfachsten periodischen Funktionen sind sin φ und cos φ = sin (φ + π/2). Lassen wir daneben auch komplexe Funktionen zu (was sich als sehr nützlich erweisen wird), so bietet sich als einfachste die Funktion $z = e^{\mathrm{i}\varphi}$ an, wobei i die *imaginäre Einheit* ist, für die gilt: $i^2 = -1$. Die Funktion $z = e^{\mathrm{i}\varphi}$ wird definiert über die Vereinbarung, dass die bekannte Potenzreihe der Funktion e^x auch für imaginäre Argumente gelten soll. Das heißt, man vereinbart, dass das Symbol $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ folgende Bedeutung haben soll:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \overset{\text{Def.}}{=} 1 + \mathrm{i}\varphi + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}\varphi)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\varphi)^n}{n!}.$$

Daraus folgt

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \cdots\right) + \mathrm{i}\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \cdots\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Die in Klammern stehenden Reihen sind identisch mit den Reihen für die trigonometrischen Funktionen für Kosinus bzw. Sinus. Folglich ist

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \qquad \text{Eulersche Formel} \qquad \textbf{(2)}$$

$e^{\mathrm{i}\varphi}$ ist demnach eine komplexe Zahl z mit dem Realteil Re z = cos φ und dem Imaginärteil Im z = sin φ. z hat den »Betrag« 1 und das »Argument« φ und ist periodisch mit der Periodenlänge 2π. In der Gaußschen Ebene der komplexen Zahlen bewegt sich die Spitze des »Zeigers« z mit zunehmendem φ auf einem Kreis vom Radius 1 und kehrt für φ = 2 π an den Ausgangspunkt (φ = 0) zurück.

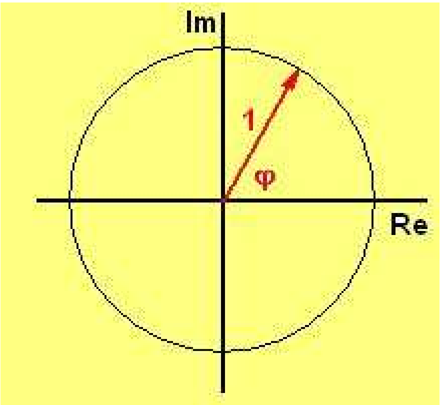

Abb. 1

3 Die harmonische Schwingung

Betrachten wir nun einen Massenpunkt der Masse m, der z. B. durch Federn, Gummibänder oder sonst irgendwie in einem *Ruhepunkt O* elastisch fixiert ist. Elastisch bedeutet, dass die Fixierung nicht starr, sondern nachgiebig ist und dass bei Entfernung des Massenpunktes aus seiner Ruhelage Rückstellkräfte auftreten, deren Summe $\boldsymbol{F}$ auf O hin gerichtet ist und deren Betrag im einfachsten Fall proportional zur Auslenkung r ist. ($\boldsymbol{r}$ ist der von O ausgehende Ortsvektor des Massenpunktes.) Es sei also

$$\boldsymbol{F} = -k\,\boldsymbol{r},$$

wobei k ein positiver Proportionalitätsfaktor ist, der auch Richtgröße oder Federkonstante genannt wird.

Die Rückstellkraft $\boldsymbol{F}$ bewirkt eine Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ des Massenpunktes, für die das dynamische Grundgesetz gilt:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Durch Vergleich erhält man

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -k\,\boldsymbol{r}. \qquad \textbf{(3)}$$

Dies ist eine Differentialgleichung (2) Ordnung für die Vektorfunktion $\boldsymbol{r}$ (t). Sie besagt, dass die zweite Ableitung der gesuchten Funktion bis auf einen (positiven) Faktor k/m gleich der mit (-1) multiplizierten Stammfunktion ist.

In der Mathematik sind nur drei (eng miteinander verwandte) Funktionen mit dieser Eigenschaft bekannt, nämlich Sinus, Kosinus und die oben vorgestellte Exponentialfunktion. Wir versuchen daher die Gleichung mit dem *Ansatz*

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}e^{\mathrm{i}\lambda t}$$

zu lösen, wobei $\boldsymbol{A}$ ein konstanter Vektor und λ eine konstante reelle Zahl ist. (Über diese beiden Konstanten wird später verfügt.) Dann ist

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\,\lambda\,\boldsymbol{A}e^{\mathrm{i}\lambda t} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda^2\boldsymbol{A}e^{\mathrm{i}\lambda t}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$m\lambda^2\boldsymbol{A}e^{\mathrm{i}\lambda t} = k\,\boldsymbol{A}e^{\mathrm{i}\lambda t}.$$

Diese Bedingung (Bedingungsgleichung) kann durch geeignete Wahl der Konstanten λ erfüllt werden, was beweist, dass unser Ansatz richtig war. Das heißt: Nach geeigneter Bestimmung der Konstanten λ ist die gewählte Funktion eine Lösung der Differentialgleichung.

Der Vektor $\boldsymbol{A}$ kann durch Kürzen aus der Gleichung entfernt werden, was bedeutet, dass er für die Lösung der Gleichung irrelevant ist und daher beliebig gewählt werden kann. Nach Division durch m, $\boldsymbol{A}$ und die Exponentialfunktion (alle diese Größen sind ungleich null) erhält man die »charakteristische Gleichung«

$$\lambda^2 = \frac{k}{m},$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Wir benutzen davon nur die positive Lösung. (Bei der negativen Lösung rotiert der Zeiger z mit zunehmendem t rechts herum, was nichts prinzipiell Neues beiträgt.) Es bleibt demnach die Lösung

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A} e^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t} = \boldsymbol{A}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \mathrm{i}\,\boldsymbol{A}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Die Lösungsfunktion $\boldsymbol{r}$ (t) ist demnach ein komplexer Vektor, der aus dem Realteil Re $\boldsymbol{r}$ und dem Imaginärteil Im $\boldsymbol{r}$ besteht:

$$\boldsymbol{r} = \mathrm{Re}\,\boldsymbol{r} + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \mathrm{i}\,\boldsymbol{A}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, erfüllt der Realteil und der Imaginärteil der Lösungsfunktion jeder für sich die gegebene Differentialgleichung. Die gefundene komplexe Lösungsfunktion ist also gleichwertig mit zwei verschiedenen reellen Lösungsfunktionen, nämlich mit

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{A}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \quad \text{und} \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{A}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Da der Vektor $\boldsymbol{A}$ beliebig wählbar ist, kann er in der zweiten Lösung einen anderen Wert haben als in der ersten, also können wir für die zweite Lösung schreiben

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{B}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Da jede der beiden Lösungen die Differentialgleichung erfüllt, gilt dies auch für ihre Summe. (Von dieser grundsätzlichen wichtigen Tatsache kann man sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung überzeugen. Dabei erkennt man auch sofort ihren Grund.)

Eine allgemeinere (das heißt hier: umfassendere) Lösung der Differentialgleichung lautet also

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{A}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \boldsymbol{B}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t. \qquad \textbf{(4)}$$

Diese »allgemeinere« Lösung ist aber auch zugleich die allgemeine Lösung schlechthin, denn sie enthält genau zwei frei wählbare Konstanten, $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$. (Das entspricht dem Grundsatz, dass die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei unabhängige Konstanten enthalten muss, entsprechend den zwei Integrationen, die zu ihrer Lösung im Prinzip nötig sind.)

Die Bedeutung der beiden Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ findet man durch folgende Überlegung:

1. Setzt man $t = 0$, so findet man $\boldsymbol{r}$ $(0) = \boldsymbol{A}$. Das heißt: $\boldsymbol{A}$ ist der Ortsvektor des Massenpunktes zur Zeit $t = 0$.

2. Bildet man d$\boldsymbol{r}$/dt und setzt dann t = 0, so findet man: $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{B}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}(0)\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(0)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \boldsymbol{v}(0)\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t. \tag{5}$$

Die Lösungsfunktion stellt eine »harmonische Schwingung« dar.

$\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ beschreiben die »Anfangsbedingungen« d. h. die frei wählbare Anfangssituation der Bewegung. Man kann nämlich den Massenpunkt zunächst beliebig aus seiner Ruhelage herausbewegen (Ortsvektor $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{A}$) und ihm zu irgendeinem Zeitpunkt, den man dann als Nullpunkt der Zeitskala nimmt, die Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}(0)$ erteilen.

Der Vektor $\boldsymbol{r}$ setzt sich also aus zwei Vektoren zusammen, welche die Richtung des Vektors $\boldsymbol{r}(0)$ bzw. $\boldsymbol{v}(0)$ haben, und deren Beträge eine Kosinus- bzw. eine Sinusfunktion der Zeit sind.

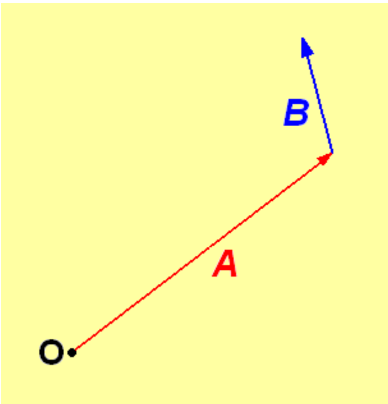

Abb. 2

Diese beiden Vektoren bestimmen eine Ebene, und in dieser Ebene bewegt sich der Massenpunkt. Die Bahnkurve ist also eine ebene Kurve. Dies war zu erwarten, da die Bewegung unter der Wirkung einer Zentralkraft erfolgt, die keine aus der Ebene hinausweisende Komponente hat.

Wir finden die Bahnkurve, indem wir Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_r$ und $\boldsymbol{e}_v$ von der Richtung $\boldsymbol{r}(0)$ bzw. $\boldsymbol{v}(0)$ einführen. Die Koordinaten des Massenpunktes in diesem schiefwinkligen Koordinatensystem sind dann

$$\xi = r(0)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t, \quad \eta = v(0)\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t,$$

woraus folgt

$$\frac{\xi^2}{[r(0)]^2} + \frac{\eta^2}{[v(0)]^2\,\frac{m}{k}} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse in schiefwinkligen Koordinaten, wenn die Koordinatenachsen die Richtungen konjugierter Durchmesser haben. Diese Voraussetzung ist hier erfüllt, da $\boldsymbol{v}(0)$ als Geschwindigkeitsvektor die Richtung der Kurventangente im Punkt mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}(0)$ hat.

Die konjugierten Halbmesser der Ellipse sind $r(0)$ und $v(0)\sqrt{\frac{m}{k}}$

Hat $\boldsymbol{v}(0)$ die gleiche Richtung (d. parallel oder antiparallel) wie $\boldsymbol{r}(0)$, so ist die Schwingbewegung geradlinig.

Die Kreisfrequenz der Schwingung ist $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ihre Frequenz ist $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

4 Lineare gedämpfte harmonische Schwingungen

Die bisher behandelte harmonische Schwingung ohne Reibung ist eine Idealisierung. In der Realität tritt bei jeder Bewegung ein Reibungswiderstand auf, und sei es nur der Luftwiderstand. Reibungsvorgänge sind sehr komplex und mathematisch nicht exakt beschreibbar. In Gasen und Flüssigkeiten ist der Reibungswiderstand erfahrungsgemäß bei kleinen Geschwindigkeiten annähernd der Geschwindigkeit proportional, bei großen Geschwindigkeiten wächst er etwa im Quadrat der Geschwindigkeit. Dagegen ist die Reibung fester Körper in weiten Grenzen von der Geschwindigkeit unabhängig.

Für die folgenden Untersuchungen nehmen wir an, dass die Reibungskraft der Geschwindigkeit proportional und der Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist. Die auf den Massenpunkt wirkende Kraft ist dann insgesamt

$$\boldsymbol{F} = -k\,\boldsymbol{r} - \mu\,\boldsymbol{v},$$

wobei μ der Reibungskoeffizient ist.

Bei Beschränkung auf eine geradlinige Bewegung auf der X-Achse (oder parallel dazu) lautet die Differentialgleichung der Bewegung:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = 0. \tag{6}$$

Zur Lösung verwenden wir denselben Ansatz wie oben, jedoch ohne den Faktor i im Exponenten, wodurch die Rechnung hier einfacher wird:

$$x = a\,e^{\lambda t} \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\,\lambda\,e^{\lambda t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = a\,\lambda^2\,e^{\lambda t}.$$

Die charakteristische Gleichung lautet dann:

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0.$$

Sie hat die Lösungen:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Für das Weitere ist entscheidend, ob der Term unter der Wurzel positiv, negativ oder null ist. Dementsprechend sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

4.1 1. Fall: Die gedämpfte harmonische Schwingung

Für hinreichend kleine Reibung ist $\mu^2 < 4\,k\,m$; dann wird die Wurzel imaginär. Wie oben beachten wir die Lösung mit dem rechts herum rotierenden Zeiger nicht und gewinnen aus der anderen zwei unabhängige reelle Lösungen, deren Summe die allgemeine Lösung x_A ist.

$$x = a\,e^{\left(-\frac{\mu}{2m} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}\right)t} = a\,e^{-\frac{\mu}{2m}t}\,e^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}\,t}$$

$$= a\,e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}\,t + \mathrm{i}\sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}\right).$$

$$x_\mathrm{A} = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left(A\cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}\,t\right). \qquad \textbf{(7)}$$

Es ist in jedem Fall möglich, zwei Größen C und δ so zu bestimmen, dass

$$A = C\cos\delta \quad \text{und} \quad B = C\sin\delta,$$

ist, denn aus diesen Gleichungen folgt

$$\delta = \arctan\frac{B}{A} \quad \text{und} \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Diese beiden Größen, sind für alle Werte A, B eindeutig definiert.

Nach Anwendung eines bekannten Additionstheorems kann die allgemeine Lösung so geschrieben werden:

$$x_\mathrm{A} = C\,e^{-\frac{\mu}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}\,t - \delta\right). \qquad \textbf{(8)}$$

Hierin ist $-\delta$ der »Nullphasenwinkel«, d. h. der Phasenwinkel der Kosinuskurve zur Zeit $t = 0$.

Anmerkung: Eine gleichwertige Schreibweise der Lösung ist:

$$x_\mathrm{A} = C\,e^{-\frac{\mu}{2m}t}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu^2}{4m^2}}\,t + \delta_1\right), \qquad \textbf{(9)}$$

wobei

$$\delta_1 = \arctan\frac{A}{B}$$

ist.

Wir werden von dieser Umformung später wiederholt Gebrauch machen. Für jene Fälle ist es nützlich, Folgendes festzuhalten: Die Summe einer Sinus- und einer Kosinusfunktion mit gleichem Argument kann stets als eine phasenverschobene Sinus- oder Kosinusfunktion dargestellt werden. Die zweite Integrationskonstante ist dann der Nullphasenwinkelwinkel.

Es handelt sich bei der Lösung wieder um eine harmonische Schwingung, deren Amplitude jedoch exponentiell abnimmt.

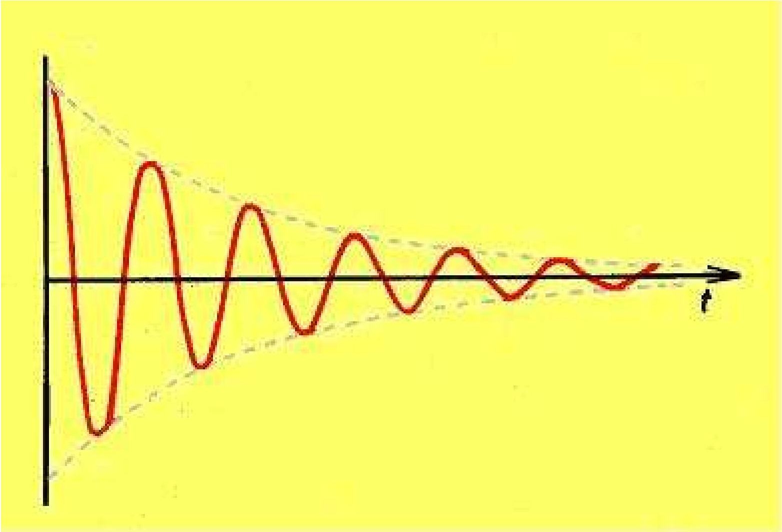

Abb. 3

Setzen wir – was ohne Beeinträchtigung der Allgemeingültigkeit möglich ist – in Gleichung 8 den Nullphasenwinkel – δ = 0, so hat die Schwingung die Anfangsamplitude C. Ihre Kreisfrequenz ist kleiner als die der ungedämpften Schwingung und nimmt für $\mu^2 = 4\,k\,m$ den Wert 0 an. Dann tritt der so genannte »aperiodische Grenzfall« ein, der als Nächstes behandelt wird.

4.2 2. Fall: Aperiodischer Grenzfall

Die charakteristische Gleichung hat in diesem Fall nur die Lösung $\lambda = -\,\mu/2m$. Das ergibt für die Bewegungsgleichung die Lösung:

$$x = A e^{\lambda t}. \qquad \textbf{(10)}$$

Diese Lösung hat jedoch nur eine Integrationskante und kann daher nicht die allgemeine Lösung sein. Aus der Theorie der Differentialgleichung ist bekannt, dass in diesem Fall auch $x = B\,t\,e^{\lambda t}$ eine Lösung ist, wovon man sich durch Einsetzen überzeugen kann. Die Allgemeine Lösung ist die Summe der beiden Lösungen und lautet:

$$x = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left(A + Bt\right). \qquad \textbf{(11)}$$

Für t = 0 ergibt sich anfängliche Auslenkung $x(0) = A$. Eine Kurvendiskussion mit Bestimmung eventuell vorhandener Nullstellen (es gibt höchstens eine) sowie der Extremwerte und Wendepunkte (auch davon gibt höchstens je einen) ist zwar reizvoll, aber ein Glasperlenspiel, weil dieser Fall praktisch nicht vorkommt. Für diejenigen, die es trotzdem nicht lassen können, sei so viel verraten: Die Auslenkung kann zunächst noch zunehmen (Abb. 5), irgendwann erreicht sie ein Maximum und geht danach asymptotisch gegen null (= Ruhelage). Es ist aber auch möglich (all das hängt von B ab), dass der Massenpunkt sich zunächst durch die Ruhelage hindurchbewegt (Abb. 6), nach der anderen Seite ausschlägt und sich dann von dort der Ruhelage asymptotisch nähert.

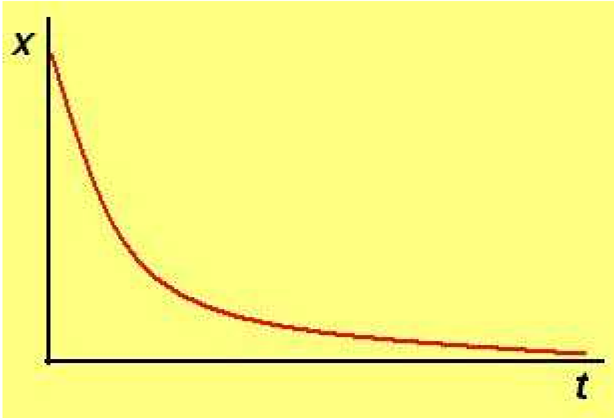

Abb. 4

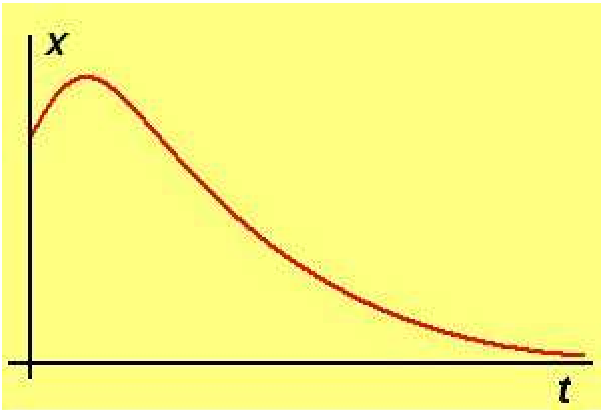

Abb. 5

Abb. 6

4.3 3. Fall: Aperiodische Bewegung

Für $\mu^2 > 4\,k\,m$ ist der Term unter der Wurzel positiv und die charakteristische Gleichung hat zwei reelle Lösungen, die beide kleiner als null sind:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Diese beiden Lösungen bezeichnen wir mit $-\beta_1$ und $-\beta_2$. Dann lautet die allgemeine Lösung

$$x = Ae^{-\beta_1 t} + Be^{-\beta_2 t}. \qquad \textbf{(12)}$$

Dabei ist

$$\beta_1 = \frac{\mu}{2m} - \sqrt{\frac{\mu^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}, \quad \beta_2 = \frac{\mu}{2m} + \sqrt{\frac{\mu^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}.$$

Wie zu erkennen, ist

$$0 < \beta_1 < \beta_2.$$

Die Kurve ist also die Summe der Kurven zweier abklingenden *e*-Funktionen, die sich asymptotisch der *X*-Achse nähern. Die Bedeutung von *A* und *B* findet man, indem man in der Lösungsfunktion und ihrer Ableitung $t = 0$ setzt.

$$x(0) = A + B, \quad v(0) = -A\beta_1 - B\beta_2,$$

woraus folgt:

$$A = \frac{v(0) + x(0)\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}, \quad B = -\frac{v(0) + x(0)\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}.$$

Zur Diskussion der möglichen Eigenschaften der Kurve:

Die Kurve hat für $t = 0$ eine horizontale Tangente, wenn $B = -\frac{\beta_1}{\beta_2} A$,

eine steigende Tangente, wenn $B < -\frac{\beta_1}{\beta_2} A$,

eine fallende Tangente, wenn $B > -\frac{\beta_1}{\beta_2} A$.

Im zweiten Fall (steigende Tangente) besitzt die Kurve an irgendeiner Stelle $t > 0$ eine horizontale Tangente.

Im dritten Fall (fallende Tangente) kann die Kurve an einer Stelle $t > 0$ eine Nullstelle ($x = 0$) besitzen.

Es können also auch hier die verschiedenen oben skizzierten Fälle eintreten.

5 Erzwungene Schwingungen

5.1 Ungedämpfte erzwungene Schwingungen

Bislang haben wir »freie Schwingungen« betrachtet, das sind Schwingbewegungen, bei denen – nachdem sie einmal angeregt wurden – der Massenpunkt nur noch unter dem Einfluss der elastischen Rückstellkraft und der Reibung steht.

Nun wollen wir annehmen, der Massenpunkt sei ständig einer äußeren Kraft ausgesetzt, deren Betrag sich – entsprechend einer Sinus- oder Kosinusfunktion – periodisch ändert. Dann spricht man von einer »erzwungenen Schwingung«.

Wir beschränken uns wieder auf eindimensionale (lineare) Schwingungen und nehmen an, dass auch die so genannte»Störungskraft« in Schwingungsrichtung wirkt. Die Differentialgleichung der erzwungenen ungedämpften Schwingung lautet dann:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k\,x=F(t). \tag{13}$$

Dies ist (wegen des Vorhandenseins von $F(t)$) eine »inhomogene« lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Nach einem Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen erhält man die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung, indem man zur allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (mit $F(t) = 0$) eine »partikuläre« (d. h. spezielle, nicht-allgemeine) Lösung der inhomogenen Gleichung addiert. Dieser Satz ist unmittelbar einleuchtend: Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung macht die linke Seite der Differentialgleichung zu null. Die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung macht die linke Seite der Gleichung gleich $F(t)$. Daher erfüllt die Summe der beiden Lösungen die inhomogene Gleichung. Da die Summe zwei frei wählbare Konstanten enthält (sie sind in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung enthalten), ist sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Für die »Störungsfunktion« $F(t)$ wählen wir die einfachste periodische Funktion: $A\cos\omega t$.

Da wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung bereits kennen, brauchen wir jetzt nur noch eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zu suchen.

Wir wählen für diese Lösung den Ansatz

$$x=B\cos\omega\,t,$$

und erhalten die charakteristische Gleichung

$$B\left(-m\,\omega^2+k\right)=A$$

und daraus:

$$B=\frac{\frac{A}{m}}{\frac{k}{m}-\omega^2}=\frac{\frac{A}{m}}{\omega_0^2-\omega^2},$$

wobei $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung ist. Somit lautet die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$x_\mathrm{p}=\frac{A}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t.$$

Wie man sieht, enthält die partikuläre Lösung keine frei wählbare Konstante.

Interpretation: Der Massenpunkt schwingt mit der Kreisfrequenz der Störungskraft. Die Amplitude der erzwungenen Schwingung geht für ω gegen ω_0 gegen unendlich. Wenn die Kreisfrequenz der von außen einwirkenden Kraft gleich der Eigenfrequenz des schwingenden Systems ist, spricht man von »Resonanz«. Das unbeschränkte Anwachsen der Amplitude bezeichnet man als »Resonanzkatastrophe«.

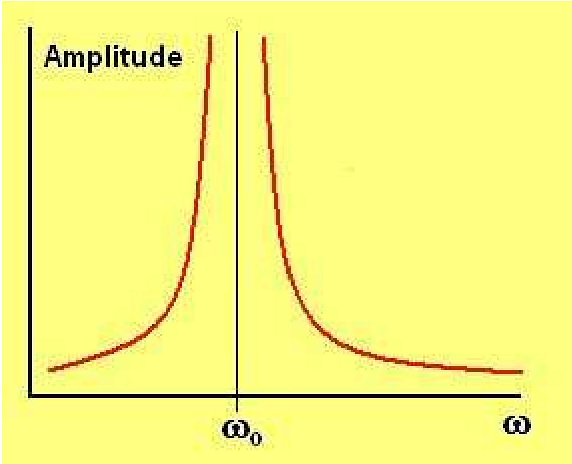

Abb. 7

Zwar kann es in besonderen Fällen durch ungewöhnlich große Amplituden der Schwingung im Resonanzfall tatsächlich zu einer Katastrophe kommen, aber es kann in der Realität aus mehreren Gründen keine unendlich großen Amplituden geben:

- Es gibt keine Bewegung ohne Reibung und damit ohne Dämpfung,
- der schwingende Körper stößt bald an die von der Umgebung gesetzten Grenzen,
- eine Schwingung mit unendlich großer Amplitude benötigte dazu eine unendlich große Energie, welche die Störungskraft aufzubringen hätte. Dazu bräuchte sie eine unendlich lange Zeit. Zudem gibt es keinen unbegrenzten Energievorrat.

Nun addieren wir zu der partikulären Lösung noch die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung und erhalten so die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$x = \frac{A}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \cos \omega t + C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t.$$

Nun wählen wir möglichst einfache Anfangsbedingungen, aus denen dann die Konstanten *C* und *D* bestimmt werden: Es sei $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$. Damit erhalten wir:

$$\frac{A}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} + C = 0, \quad D = 0$$

und schließlich

$$x = \frac{A}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \left(\cos \omega t - \cos \omega_0 t\right). \qquad \textbf{(14)}$$

Wir wollen nun das Verhalten der Funktion in der Nähe des Resonanzpunktes näher betrachten. Dazu wenden wir folgendes Additionstheorem des Kosinus an:

$$\cos \omega t - \cos \omega_0 t = -2 \sin \frac{\omega + \omega_0}{2} t \, \sin \frac{\omega - \omega_0}{2} t = 2 \sin \frac{\omega + \omega_0}{2} t \, \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t.$$

Es sei nun $(\omega_0 - \omega)$ eine kleine Zahl 2δ. Dann ist

$$\cos\omega t - \cos\omega_0 t = 2\sin\delta t\ \sin\frac{\omega+\omega_0}{2}t.$$

Damit erhalten wir

$$x = \frac{2A}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\sin\delta t\ \sin\frac{\omega+\omega_0}{2}t.$$

Interpretation: Die Gleichung stellt eine Schwingung dar mit einer Kreisfrequenz, die gleich dem arithmetischen Mittel von ω und ω_0 ist. Die Amplitude dieser Schwingung variiert mit der vergleichsweise kleinen Kreisfrequenz δ, die gleich der halben Differenz von ω_0 und ω ist. (Falls diese Differenz negativ wird, kann man einfach $\sin\delta t$ durch $-\sin(-\delta t)$ ersetzen, wodurch das Argument der Sinusfunktion wieder positiv wird. Das Minuszeichen vor dem Sinus bedeutet dann lediglich einen Phasensprung von π.

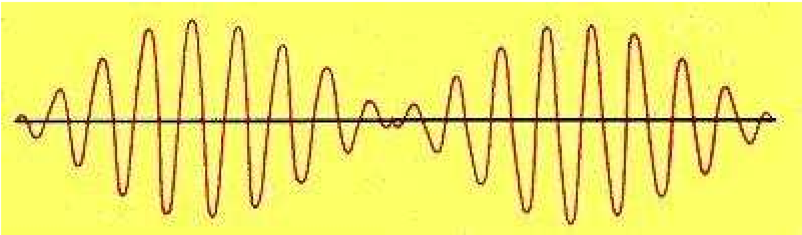

Abb. 8

Aus der Akustik ist eine solche Schwingung als »Schwebung« bekannt. Sie entsteht durch Überlagerung (Summation) zweier Sinusschwingungen von nahezu gleicher Frequenz.

Von hier ausgehend können wir das Verhalten der Funktion im Resonanzfall genauer untersuchen. Man kann es als Grenzfall einer Schwebung auffassen, bei der für $\omega = \omega_0$ die Schwebungsfrequenz verschwindend klein geworden ist. Wir nehmen an, zur Zeit $t = 0$ sei $x = 0$ und $v = 0$, und es beginne die Störungskraft mit der Frequenz ω_0 zu wirken. Es ist mit der oben eingeführten Abkürzung

$$\omega_0^2-\omega^2=\left(\omega_0+\omega\right)\left(\omega_0-\omega\right)\approx 2\,\omega_0\,2\,\delta,$$

und erhalten durch Einsetzen in die Gleichung der Schwebung:

$$x_{\delta=0}=\lim_{\delta\to 0}\frac{A}{2\,m\,\omega_0}\frac{\sin\delta\,t}{\delta}\ \sin\omega_0$$

und mit

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin\delta\,t}{\delta}=t\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin\delta}{\delta}=t$$

schließlich

$$x_{\delta=0}=\frac{A}{2\,m\,\omega_0}t\ \sin\omega_0 t. \qquad \textbf{(15)}$$

Dies ist eine Sinusschwingung der Kreisfrequenz ω_0, deren Amplitude proportional zu t wächst. Die Schwingung wird also unter der Wirkung der äußeren Kraft »aufgeschaukelt«, bis sie an die Grenzen des Systems stößt oder die Energiereserven der Kraft erschöpft sind.

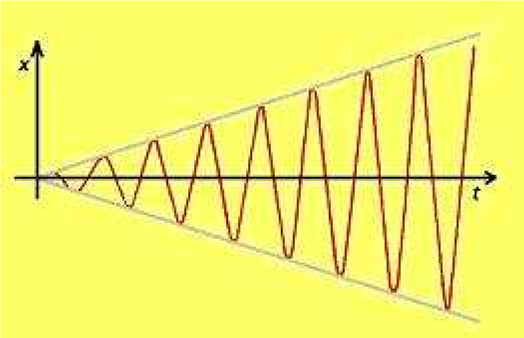

Abb. 9

5.2 Gedämpfte erzwungene Schwingungen

Die äußere Kraft $F = A \cos \omega t$ wirke nun auf einen gedämpft schwingenden Massenpunkt ein. Die Bewegungsgleichung lautet dann:

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} + \mu \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t} + k\,x = A \cos \omega t \qquad \textbf{(16)}$$

und mit

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2,$$

wobei ω_0 die Kreisfrequenz der ungedämpften freien Schwingung ist,

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} + \frac{\mu}{m} \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t} + \omega_0^2\, x = \frac{A}{m} \cos \omega t. \qquad \textbf{(17)}$$

Wir benutzen wieder den schon oben gebrauchten Satz, dass die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Da die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung eine exponentiell abklingende harmonische Schwingung ist, stellt sie den »Einschwingvorgang« des Systems dar, der nach einiger Zeit abgeklungen ist; die partikuläre Lösung dagegen beschreibt den *stationären* (dauerhaften) Schwingungsvorgang. Der Einschwingvorgang, also die gedämpfte freie Schwingung, wurde oben bereits abgehandelt. Jetzt interessiert uns der stationäre Vorgang.

Die partikuläre Lösung $x_p(t)$ findet man am einfachsten, wenn man die Rechnung mit komplexen Zahlen durchführt. Wir machen daher den Ansatz

$$x_p = C\, e^{\mathrm{i}(\omega t - \varphi)} \qquad \textbf{(18)}$$

und drücken auch die Störungsfunktion komplex aus:

$$F = A e^{\mathrm{i} \omega t}.$$

Die Ableitungen von Gleichung (18) sind dann

$$\frac{\mathrm{d}\,x_p}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\omega C e^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 x_p}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 C e^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)}.$$

Damit ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$C\left(-\omega^2 + \mathrm{i}\frac{\mu}{m}\omega + \omega_0^2\right)e^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)} \equiv C\left(-\omega^2 + \mathrm{i}\frac{\mu}{m}\omega + \omega_0^2\right)e^{\mathrm{i}\omega t}e^{-\mathrm{i}\varphi} = \frac{A}{m}e^{\mathrm{i}\omega t}$$

und schließlich

$$C\left(-\omega^2 + \mathrm{i}\frac{\mu}{m}\omega + \omega_0^2\right) = \frac{A}{m}e^{\mathrm{i}\varphi} \equiv \frac{A}{m}\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right).$$

Durch Vergleich der Realteile und der Imaginärteile der beiden Seiten erhält man

$$1.\; C(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{A}{m}\cos\varphi,$$

$$2. \qquad C\frac{\mu}{m}\omega = \frac{A}{m}\sin\varphi.$$

Daraus folgt

$$C^2\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\mu^2\omega^2}{m^2}\right] = \frac{A^2}{m^2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{A}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + \mu^2 m^2}}$$

und $$\tan\varphi = \frac{\mu\,\omega}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}.$$

Damit wird aus Gleichung (18)

$$x_p = \frac{A}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + \mu^2 m^2}}\, e^{\mathrm{i}\left(\omega t - \arctan\frac{\mu\,\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right)}. \qquad \textbf{(19)}$$

Diese komplexe Lösung enthält zwei reelle Lösungen, den Realteil und den Imaginärteil. Im Hinblick auf Gleichung (16), die auf der rechten Seite nur den Realteil der Störungskraft enthält, kommt auch hier nur der Realteil von Gleichung (19) in Betracht, also

$$x_p = \frac{A}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + \mu^2 m^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\frac{\mu\,\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\right).$$

Der Massenpunkt schwingt – wie erwartet – im stationären Zustand mit der Frequenz der angreifenden Kraft. Die Phasendifferenz φ zwischen Störungskraft und Schwingung geht für kleine Kreisfrequenzen ω gegen null, erreicht für $\omega = \omega_0$ den Wert $\pi/2$ und geht für weiter steigende Frequenzen gegen π.

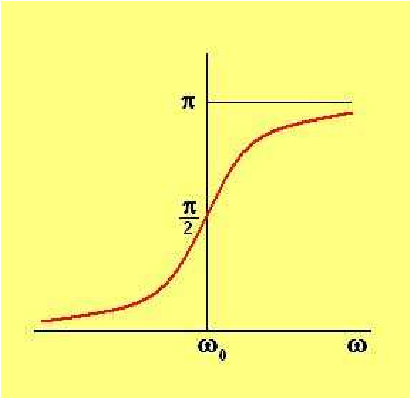

Abb. 10

Die Amplitude C wird maximal, wenn der Nenner minimal wird, und das ist der Fall bei der »Resonanzkreisfrequenz« ω_R. Man findet sie, indem man die erste Ableitung von

$$m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\mu^2m^2$$

nach ω bildet und diese gleich null setzt. Das Ergebnis ist

$$\omega_R=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\mu^2}{2m^2}}.$$

Die Resonanzkreisfrequenz ist also etwas kleiner als ω_0; bei geringer Reibung ist der Unterschied jedoch unbedeutend. Die Resonanzamplitude ist

$$C_R=\frac{A}{\mu\sqrt{\omega_0^2-\frac{\mu^2}{4m^2}}}.$$

Das Resonanzverhalten ist also umso deutlicher ausgeprägt, je geringer die Reibung ist. Die folgende Grafik zeigt die Amplitude in der Umgebung des Resonanzpunktes bei verschiedenen Werten μ.

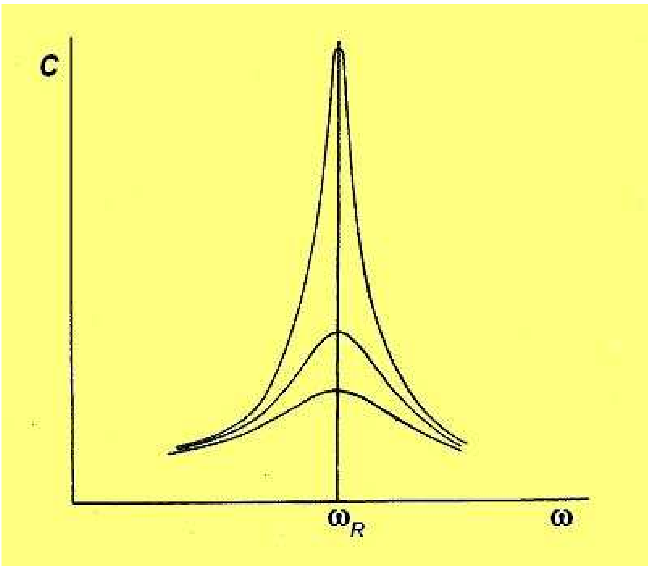

Abb. 11

Von dieser »Amplitudenresonanz« ist die »Geschwindigkeitsresonanz« zu unterscheiden: Sie tritt ein, wenn die Energie des schwingenden Massenpunktes maximal ist, die proportional dem Quadrat seiner Maximalgeschwindigkeit ist. Durch Lösung der entsprechenden Extremwertaufgabe findet man

$$\omega_{R*} = \omega_0.$$

6 Das mathematische Pendel

Darunter versteht man einen Massenpunkt (Masse *m*), der über einen masselosen Faden der Länge *l* irgendwo befestigt ist, sodass er frei herabhängt. (Dieses Ideal ist mit guter Annäherung realisierbar.)

Der Massenpunkt werde nun aus seiner Ruhelage, die senkrecht unter dem Aufhängepunkt liegt, entfernt und dann losgelassen. Er bewegt sich dann auf einem Kreisbogen, dessen Ebene auf der Erdoberfläche senkrecht steht und durch den Aufhängepunkt geht. Durch die Art seiner Befestigung ist der Massenpunkt gezwungen, sich auf dem Kreisbogen zu bewegen. Der Massenpunkt unterliegt nun zwei Kräften: Seiner Gewichtskraft $G = m\,g$, und der Kraft, die der Faden auf ihn ausübt. Letztere ist immer in Richtung des Fadens auf den Aufhängepunkt hin gerichtet. Mit dieser Kraft hat es eine besondere Bewandtnis. Sie ist nur vorhanden, weil der Massenpunkt an dem Faden befestigt ist und mit einer Komponente seines Gewichts daran zieht. Eine gleichartige Kraft würde auch auftreten, wenn der Massenpunkt auf einer kreisbogenförmigen Schiene oder auf der Innenfläche einer Kugel gelagert wäre. Kräfte dieser Art, die den Massenpunkt in seiner Bewegungsfreiheit einschränken und ihn an einen bestimmten Ort oder in eine bestimmte Bahn zwingen, heißen *Zwangskräfte*.

Bei der Bewegung des Massenpunktes verrichtet die Zwangskraft keine Arbeit, weil sie immer senkrecht zur Bahn gerichtet ist.

Zerlegt man die Gewichtskraft $\boldsymbol{G}$ in eine Tangential- und eine Normalkomponente, so erhält man die Kraft $\boldsymbol{F}$, welche den Massenpunkt beschleunigt, und die Kraft $-\boldsymbol{Z}_{\text{stat}}$, die am Faden zieht. Sie wird durch die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}_{\text{stat}}$ (statische Zwangskraft) kompensiert. (Dazu kommt die dynamische Zwangskraft $\boldsymbol{Z}_{\text{dyn}}$, auf die ich später zu sprechen komme.)

Nun ist (siehe Abb. 12)

die Bogenlänge $s = l\,\varphi,$ die Bahngeschwindigkeit $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = l\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$,

die Bahnbeschleunigung $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t} = l\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$.

In die Bewegungsgleichung $F = m\,a$ ergibt sich daraus (unter Berücksichtigung der Richtung von F)

$$m\,l\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -m\,g\sin\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \tag{20}$$

In der linken Gleichung tritt die Masse *m* des Massenpunkts in zwei verschiedenen Bedeutungen auf: links als träge Masse m_{tr} und rechts als schwere Masse m_{schw}. Ich komme später auf dieses Problem zurück, bis dahin wird es ignoriert und die Masse *m* wird herausgekürzt.

π/2.)

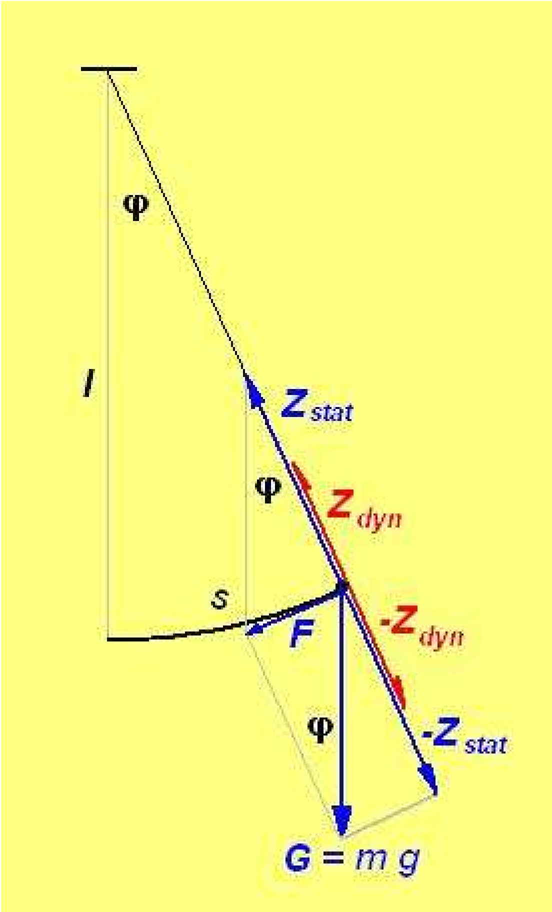

Abb. 12

6.1 Lösung in 1. Näherung

Für kleine Winkel ist $\sin\varphi \approx \varphi$. Dann lautet die vereinfachte Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\varphi$$

und ist mit $\varphi = x$ identisch mit der Differentialgleichung (3) der harmonischen Schwingung. Mit dem Ansatz

$$\varphi = \alpha\ \sin(\omega\ t + \delta)$$

ergibt sich

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

wobei α der Amplitudenwinkel und δ der »Nullphasenwinkel« ist. Beide Größen sind frei wählbar. Daher ist die angegebene Lösung die allgemeine Lösung der vereinfachten Bewegungsgleichung.

Nehmen wir an, für t = 0 sei auch φ = 0, dann ist δ = 0. (Alternativ: Für t = 0 sei $\varphi = \alpha$, dann ist δ = π/2.)

6.2 Lösung in 1. Näherung über den Energiesatz

Die kinetische Energie des pendelnden Massenpunktes ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right)^2 ,$$

seine potentielle Energie ist

$$E_{\text{pot}} = m\, g\, h,$$

wobei die Höhe h vom tiefsten Punkt der Bahn nach oben gemessen wird.

Mit $h = l(1 - \cos\varphi)$ ergibt sich für die Summe der beiden Energien

$$\frac{m}{2} l^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right)^2 + m\, g\, l\left(1 - \cos\varphi\right) = C. \tag{21}$$

Diese Gleichung ist das Integral der Bewegungsgleichung, wovon man sich durch Differenzieren nach der Zeit überzeugen kann. Sie ist nur von der 1. Ordnung, dafür aber vom 2. Grad und zudem inhomogen. Nach einer geschickten Umformung lässt sie sich dennoch näherungsweise einfach integrieren.

Die Bedeutung der Konstanten C ist leicht erkennbar: Sie ist einerseits gleich der maximalen kinetischen Energie des Massenpunktes, die dieser für $\varphi = 0$ annimmt, andererseits ist sie gleich der maximalen potentiellen Energie, welche die Masse annimmt, wenn ihre Geschwindigkeit null ist. Diesen Fall wollen wir betrachten.

Für $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = 0$ hat die Masse die größte Auslenkung. Der dazu gehörige Amplitudenwinkel sei α. Dann wird aus Gleichung (21)

$$m\, g\, l\left(1 - \cos\alpha\right) = C.$$

Wenn wir diesen Wert für C in Gleichung (21) einsetzen, erhalten wir

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right)^2 + \frac{2g}{l}\left(\cos\alpha - \cos\varphi\right) = 0. \tag{21}$$

Für kleine Amplitudenwinkel α ist

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{und} \quad \cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\alpha^2 - \varphi^2\right)} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\mathrm{d}t$$

und durch Integration

$$\arcsin\frac{\varphi}{\alpha} = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + k \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + k \right),$$

also eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Wir interessieren uns nun noch für die dynamische Komponente der Zwangskraft. Durch den Faden ist der Massenpunkt gezwungen, sich auf einer Kreisbahn zu bewegen. Dazu ist eine Radialbeschleunigung erforderlich, auf die der Massenpunkt mit einer Trägheitskraft reagiert. Die Ursache der Radialbeschleunigung ist die dynamische Zwangskraft (Zentripetalkraft). Sie ist

$$Z_{\mathrm{dyn}} = m\frac{v^2}{l} = m\,l\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 .$$

Nach Gleichung (21) ist

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\alpha\right)$$

und somit

$$Z_{\mathrm{dyn}} = 2\,m\,g\left(\cos\varphi - \cos\alpha\right).$$

Zusammen mit der statischen Zwangskraft $Z_{\mathrm{stat}} = m\,g \cos\varphi$ ergibt sich die gesamte Zwangskraft

$$Z = m\,g\left(3\cos\varphi - 2\cos\alpha\right).$$

Wie man sieht, kann die Zwangskraft Z null und sogar negativ werden, allerdings nur für $\alpha > \pi/2$. (Zur Begründung: Die Kosinuskurve fällt im betrachteten Bereich monoton, und es ist stets φ kleiner/gleich α und somit $\cos\varphi \geq \cos\alpha$ und $3\cos\varphi > 2\cos\alpha$.) Wenn Z negativ wird, übt der Massenpunkt keinen Zug auf den Faden aus, sondern einen Druck, den der Faden nicht aufnehmen kann: Der Massenpunkt »stürzt ab«, bevor er den Amplitudenwinkel erreicht.

6.3 Lösung in 2. Näherung

Ersetzt man in der Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

$\sin\varphi$ durch den verbesserten Näherungswert $\varphi - \varphi^3/6$, den man dadurch erhält, dass man in der Reihe für $\sin\varphi$ auch das zweite Glied berücksichtigt, so erhält man die Bewegungsgleichung einer »anharmonischen Schwingung«:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\varphi - \frac{g}{6l}\varphi^3 = 0.$$

Da auch jetzt nur ungerade Potenzen von φ auftreten, bleibt die Rückstellkraft symmetrisch, d. h. sie wirkt auf beiden Seiten der Ruhelage gleich stark. Ein weiteres Merkmal ist, dass sie mit zunehmender Auslenkung jetzt langsamer als proportional zu φ wächst. Die Lösung der so verbesserten Näherungsgleichung ist ebenfalls nur näherungsweise möglich. Wir verzichten jedoch auf diese »Näherung einer Näherung«, zumal die ursprüngliche (exakte) Bewegungsgleichung auch exakt gelöst werden kann.

6.4 Die exakte Lösung

Die exakte Lösung der Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

führt auf ein elliptisches Integral, dessen Werte von LEGENDRE 1816 berechnet und tabelliert wurden. Daraus kann auch die Schwingungsdauer T des mathematischen Pendels in Abhängigkeit vom Amplitudenwinkel α ermittelt werden. So ergibt sich:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2}+\cdots\right].$$

Die Abweichung des oben ermittelten Näherungswert es $T_\mathrm{N}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ vom exakten Wert beträgt für

α = 1° weniger als $2\cdot 10^{-5}$ s, für α = 5° weniger als $5\cdot 10^{-4}$ s.

6.5 Die historische Bedeutung des mathematischen Pendels

Die Bedeutung des mathematischen Pendels beruht zum einen darauf, dass mit seiner Hilfe die Erdbeschleunigung g sehr genau ermittelt werden kann. (Durch Beobachtung einer großen Zahl von Schwingungen (z. B. 1000) kann die Schwingungsdauer sehr genau bestimmt werden.) Zum anderen glaubte man, mit mathematischen Pendeln die Gleichheit von schwerer und träger Masse verifizieren zu können. Wenn nämlich das Verhältnis m_tr / m_schw nicht für alle Körper dasselbe wäre, würde die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels im Allgemeinen vom Material der Pendelkugel abhängen. Dies war der Grund für die Pendelversuche, die schon NEWTON und später mit verbesserten Mitteln F. W. BESSEL (1784-1846) durchführten. Nach unserem heutigen Wissen allerdings mussten diese Versuche schon darum scheitern, weil ja alle Atome aus denselben Bausteinen bestehen. Der negative Ausgang der Versuche taugte daher nicht als Indiz. Anders war es mit den Versuchen, die L. EÖTVÖS (1848-1919) mit von ihm entwickelten hochempfindlichen Drehwaagen vornahm, und die ergaben, dass der relative Unterschied von schwerer und träger Masse sicher kleiner als 1×10^{-7} ist.

Ein derart hohes Maß an Übereinstimmung kann natürlich kein Zufall sein. In der klassischen Physik wurde die Identität beider Massen einfach als Erfahrungstatsache hingenommen. Da eine Erklärung nicht möglich war, verschwand bezeichnenderweise im Laufe der Zeit mehr und mehr das Bewusstsein dafür, dass hier überhaupt ein Problem vorlag. Erst A. EINSTEIN hat in seiner Allgemeinen Relativitätstheorie (1913) wieder an dieses Problem angeknüpft. Wenn es innerhalb eines Bezugssystems grundsätzlich nicht möglich ist, zwischen Trägheitskraft und Schwerkraft zu unterscheiden, dann ist es – so Einstein – auch grundsätzlich nicht möglich, zwischen träger und schwerer Masse zu unterscheiden.

7. Unfreier Massenpunkt auf horizontaler Kreisbahn

Der Massenpunkt eines mathematischen Pendels werde zunächst aus seiner Ruhelage herausgebracht (Auslenkungswinkel α) und ihm dann ein Anstoß derart erteilt, dass er sich auf einer horizontalen Kreisbahn bewegt. Seine Bahngeschwindigkeit sei v.

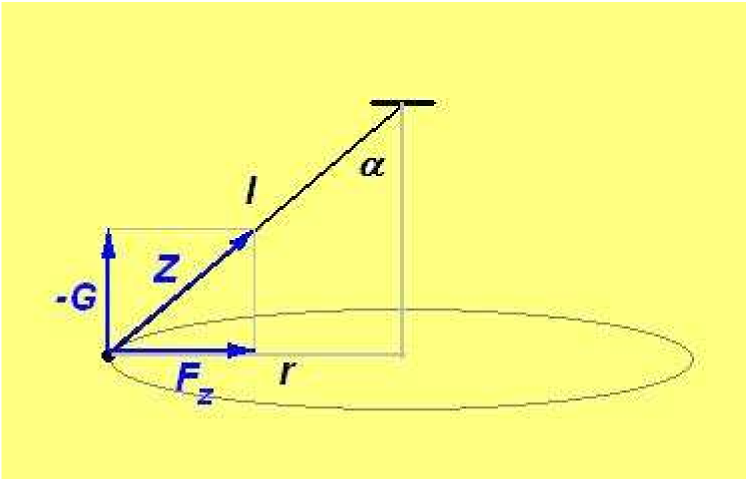

Abb. 13

Die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}$ muss mit ihrer Vertikalkomponente die Gewichtskraft $\boldsymbol{G}$ kompensieren und mit ihrer Horizontalkomponente die benötigte Zentripetalkraft $\boldsymbol{F}_z$ aufbringen. Es gelten nun folgende Beziehungen:

$$G = m\,g, \quad F_Z = \frac{m\,v^2}{r} = \frac{m\,v^2}{l\sin\alpha}, \quad \tan\alpha = \frac{F_Z}{G} = \frac{v^2}{g\,l\sin\alpha},$$

woraus folgt:

$$v^2\cos\alpha = g\,l\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

und schließlich

$$\cos\alpha = -\frac{v^2}{2\,g\,l} + \sqrt{1+\frac{v^4}{4\,g^2 l^2}}.$$

Ferner ist

$$Z = \frac{m\,g}{\cos\alpha}.$$

Wird das Gleichgewicht der Kräfte z. B, dadurch gestört, dass die Bahngeschwindigkeit etwas abnimmt, dann tritt eine Selbstregulation ein: Bei zunächst unveränderter Auslenkung wird die Zentripetalkraft kleiner und mit ihr die Gegenkraft zum Gewicht. Dadurch bewegt der Massenpunkt sich ein wenig nach unten, wodurch die Auslenkung kleiner wird und sich ein neuer Gleich-gewichtszustand einstellt.

8 Amplitudenmodulierte Schwingungen, Schwebungen

Die Amplitude der Schwingung

$$y_0 = A\cos\omega_0 t$$

werde mit einer Schwingung

$$B\cos\omega_1 t$$

»moduliert« (siehe Abbildung 14), wobei $\omega_0 >> \omega_1$ sei.

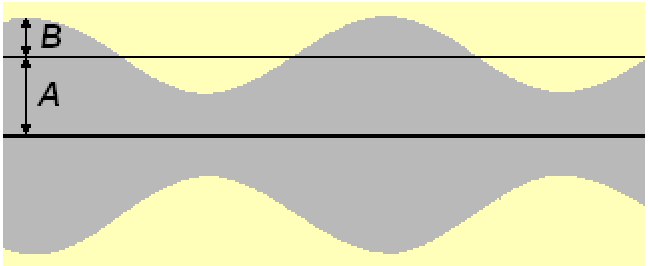

Abb. 14

Die Amplitude der modulierten Schwingung ist dann

$$C = A + B\cos\omega_1 t,$$

und die resultierende Schwingung kann wie folgt beschrieben werden:

$$y = C\cos\omega_0 t = \left(A + B\cos\omega_1 t\right)\cos\omega_0 t.$$

Durch Ausmultiplizieren und Anwendung eines bekannten Additionstheorems ergibt sich daraus:

$$y = A\cos\omega_0 t + \frac{1}{2}B\left[\cos\left(\omega_0 - \omega_1\right)t + \cos\left(\omega_0 + \omega_1\right)t\right].$$

Das bedeutet: Die amplitudenmodulierte Schwingung ist gleichwertig mit drei Schwingungen von konstanter Amplitude mit den Kreisfrequenzen ω_0, $(\omega_0 - \omega_1)$ und $(\omega_0 + \omega_1)$. Die Abbildung 15 zeigt das Frequenzspektrum:

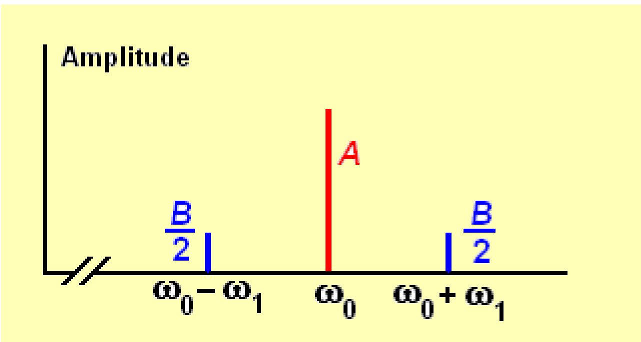

Abb. 15

Der Quotient B/A heißt Modulationsgrad m. Er ist im Allgemeinen kleiner als 1.

Ein im Grunde ähnliches Phänomen ist die Überlagerung (Summation) zweier Kosinus-Schwingungen nahezu gleicher Frequenz ω_1 und ω_2. Wir betrachten zunächst den Fall gleicher Amplituden:

$$y = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t,\quad \text{wobei}\quad \omega_1 \approx \omega_2 \quad \text{und} \quad \omega_1 > \omega_2 \quad \text{sein soll.}$$

Durch Anwendung eines Additionstheorems findet man dafür:

$$y = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\ \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t.$$

Dies ist eine Schwingung mit einer Kreisfrequenz, die gleich dem arithmetischen Mittel der beiden ursprünglichen Kreisfrequenzen ist. Ihre Amplitude ist

$$2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2},$$

und schwillt mit der Kreisfrequenz $\omega_1 - \omega_2$ an und ab. (Zu einer Periode der einhüllenden Kosinuskurve gehören *zwei* Extremwerte der modulierten Schwingung. – Außerdem findet beim Nulldurchgang der Amplitude ein Phasensprung von π statt, wie aus Abb. 16 zu erkennen ist.) In der Akustik wird ein solcher Vorgang als Schwebung bezeichnet.

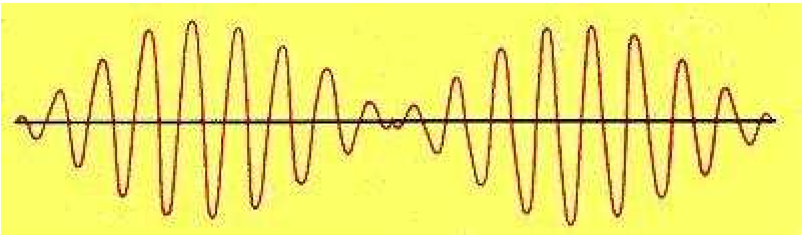

Abb. 16

(In vielen Büchern sind die Schwebungen insofern falsch abgebildet, als der Phasensprung beim Nulldurchgang der Amplitude nicht berücksichtigt wird.)

Haben die einander überlagernden Schwingungen nicht gleiche Amplituden, so entsteht eine »unreine Schwebung« mit der Gleichung:

$$y = A\cos\omega_1 t + B\cos\omega_2 t.$$

Ist zum Beispiel $A > B$, so kann man schreiben:

$$y = (A - B)\cos\omega_1 t + B\cos\omega_1 t + B\cos\omega_2 t$$

und dann weiter ähnlich wie oben:

$$y = (A - B)\cos\omega_1 t + 2B\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\ \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t.$$

Dies ist eine »reine Schwebung«, die von einer Schwingung mit konstanter Amplitude überlagert ist.