Einführung
in die
Theoretische Physik

4.Teil: Mechanik realer Körper

Siegfried Petry

14. Januar 2013

I n h a l t :

Mechanik realer Körper

1 Der Massenmittelpunkt und seine Bewegungsgleichung

Nun wird die Mechanik wirklichkeitsnäher: Wir wenden die an idealen Massenpunkten gewonnenen Ergebnisse auf reale Körper an.

Die Atome – und im Allgemeinen auch die Moleküle – aus denen reale Körper bestehen, kommen unserem Ideal des Massenpunktes völlig hinreichend nahe. Daher können wir reale Körper als Systeme zahlreicher Massenpunkte auffassen. Die im Folgenden hergeleiteten Sätze über Systeme von Massenpunkten gelten folglich für reale Körper. Dies müssen nicht unbedingt Festkörper oder gar starre Körper sein; die hier abzuleitenden Sätze gelten ganz allgemein für jedes irgendwie klar definierte System von Massenpunkten: für die Flüssigkeit oder das Gas in einem Behälter (einschließlich oder ausschließlich des Behälters), für eine in einem Raumfahrzeug frei schwebende Kugel aus Wasser, für eine Gaswolke im Weltall, ja sogar für eine Galaxie aus Fixsternen, die wegen der riesigen Entfernung uns als Punkte erscheinen.

Als Erstes treffen wir eine wichtige Unterscheidung: Kräfte, die zwischen zwei Massenpunkten des Systems wirken, heißen *innere Kräfte*. Dagegen heißen Kräfte, die ihren Ursprung außerhalb des Systems haben, *äußere Kräfte*.

Wir betrachten nun ein System von beliebig vielen Massenpunkten. Auf einen von ihnen (den k-ten Massenpunkt) wirke eine Anzahl äußerer Kräfte, die wir durch ihre Resultante $\boldsymbol{F}_k$ ersetzen. Ferner wirke vom ersten Massenpunkt her auf ihn die (innere) Kraft $\boldsymbol{F}_{1k}$ ein, vom zweiten Massenpunkt die Kraft $\boldsymbol{F}_{2k}$, allgemein vom i-ten Massenpunkt die Kraft $\boldsymbol{F}_{ik}$. Dann lautet die Bewegungsgleichung für den k-ten Massenpunkt

$$m_k \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_k + \sum_{i \neq k} \boldsymbol{F}_{ik}, \tag{1}$$

wobei die Einschränkung »i ungleich k« überflüssig ist, weil kein Massenpunkt auf sich selbst eine Kraft ausüben kann.

Summieren wir die Bewegungsgleichungen sämtlicher Massenpunkte des Systems, so erhalten wir

$$\sum_k m_k \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} = \sum_k \boldsymbol{F}_k + \sum_k \sum_i \boldsymbol{F}_{ik}. \tag{2}$$

Nun gibt es aber nach Newtons 3. Axiom (actio = reactio) zu jeder inneren Kraft eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete: Wenn der i-te Massenpunkt auf den k-ten Massenpunkt die Kraft $\boldsymbol{F}_{ik}$ ausübt, dann übt der k-te Massenpunkt auf den i-ten Massenpunkt die Kraft $\boldsymbol{F}_{ki} = -\boldsymbol{F}_{ik}$ aus. Alle inneren Kräfte treten daher in entgegengesetzt gleichen Paaren auf. Daher ist die doppelte Summe auf der rechten Seite der Gleichung 2 gleich null. Also ist

$$\sum_k m_k \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} = \sum_k \boldsymbol{F}_k. \tag{3}$$

Die folgende Abbildung zeigt ein System von Massenpunkten mit ihren Ortsvektoren, die von einem beliebig gewählten Nullpunkt O ausgehen:

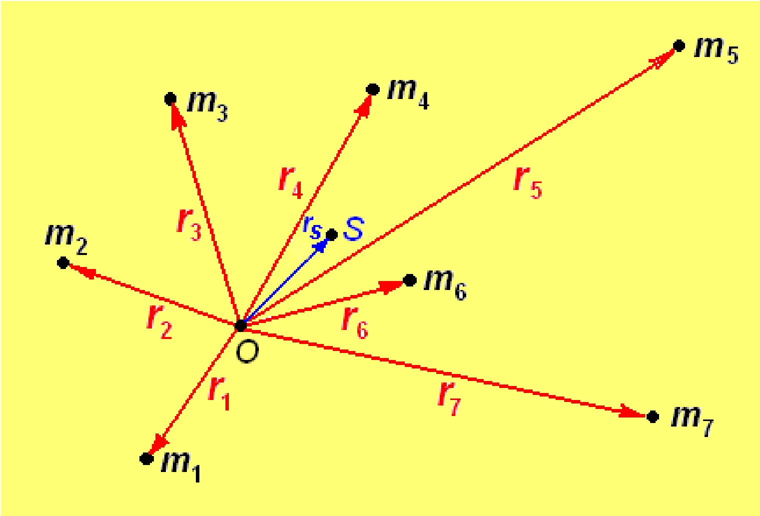

Abb. 1

Die Summe der Massen aller Massenpunkte sei M. Wir bestimmen nun einen Punkt S mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}_S$ so, dass

$$M\,\boldsymbol{r}_S = \sum_k m_k\,\boldsymbol{r}_k. \tag{4}$$

Den so definierten Punkt S nennen wir den *Massenmittelpunkt* oder *Schwerpunkt* des Systems. Durch Aufspaltung der Vektorgleichung (4) in die Komponenten findet man für die Koordinaten des Schwerpunkts:

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M}\sum_k m_k\,x_k, \\ y_S &= \frac{1}{M}\sum_k m_k\,y_k \\ z_S &= \frac{1}{M}\sum_k m_k\,z_k. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts sind also die Mittelwerte der mit ihren Massen gewichteten Koordinaten der Massenpunkte des Systems.

Um den Schwerpunkt zweier Massenpunkte m_1 und m_2 zu ermitteln, legen wir den Nullpunkt der Ortsvektoren am einfachsten in m_1:

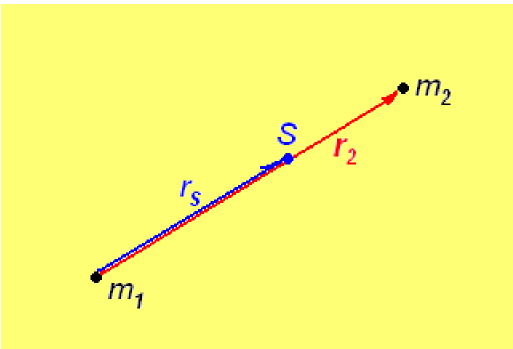

Abb. 2

Dann ist definitionsgemäß

$$(m_1 + m_2)\boldsymbol{r}_S = m_2\boldsymbol{r}_2,$$

woraus folgt

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}_2. \tag{6}$$

Der Schwerpunkt liegt also auf der Strecke $m_1\, m_2$ und teilt sie im Verhältnis $m_2 : m_1$.

Differenzieren wir die Gleichung (4) zweimal nach der Zeit, so erhalten wir

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_S}{\mathrm{d}t^2} = \sum_k m_k \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2}.$$

Setzen wir dies in Gleichung 3 ein, so erhalten wir die wichtige Gleichung

$$M\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_S}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_R, \tag{7}$$

wobei

$$\boldsymbol{F}_R = \sum_k \boldsymbol{F}_k$$

die Resultierende aller am System angreifenden äußeren Kräfte ist. Die Gleichung (7) entspricht genau der Newtonschen Bewegungsgleichung für einen Körper der Masse M, an dem die Kraft $\boldsymbol{F}_R$ angreift. Das bedeutet:

Der Massenmittelpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob sich in ihm die gesamte Masse des Systems befände und an ihm die Summe (Resultante) aller äußeren Kräfte angriffe.

Aus dieser Eigenschaft des Massenmittelpunktes erklärt sich auch sein Name »Schwerpunkt«: Im Schwerefeld der Erde verhält sich der Schwerpunkt eines Körpers so, als wirkte auf ihn die Summe der Gewichtskräfte der einzelnen Massenpunkte, also das Gesamtgewicht des Systems ein.

Falls keine äußeren Kräfte einwirken, bleibt der Massenmittelpunkt in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig geradlinig.

Beispiel: Zwei Massenpunkte mit den Massen m_1 und m_2 (die nicht gleich sein müssen) sind durch eine Schraubenfeder, die sowohl gedehnt wie gestaucht werden kann, miteinander verbunden und befinden sich in der Entfernung a voneinander im Gleichgewicht.

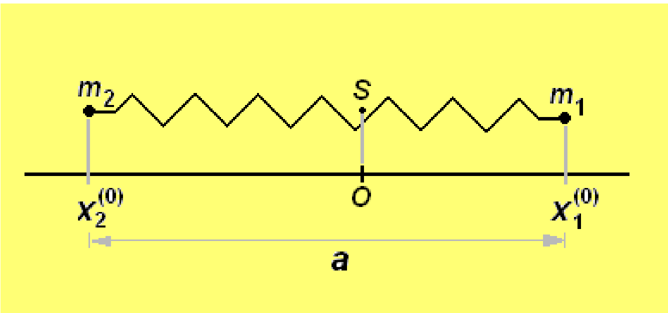

Abb. 3

Wird die Entfernung um eine kleine Strecke Δa verändert, treten Rückstellkräfte auf, die der Strecke Δa proportional sind. Wie lauten die Schwingungsgleichungen der beiden Massenpunkte?

Wir nehmen an, dass die Änderung der Entfernung durch zwei entgegengesetzt gleiche äußere Kräfte geschieht, die an m_1 und m_2 angreifen, sodass der Schwerpunkt S in Ruhe bleibt. Dann bleibt er auch bei der nachfolgenden Schwingbewegung in Ruhe, und es ist zweckmäßig, ihn zum Ursprung des Koordinatensystems zu machen. Die Koordinaten der beiden Massenpunkte seien in der Ruhelage $x_1^{(0)}$ und $x_2^{(0)}$, während der Bewegung x_1 und x_2.

Aus der Definition des Schwerpunkts folgt wegen $x_S = 0$, dass stets

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \tag{B1}$$

Ferner ist

$$x_1 - x_2 = a + \Delta a$$

und daher

$$\Delta a = x_1 - x_2 - a. \tag{B2}$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung für m_1:

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + k\left(x_1 - x_2 - a\right) = 0, \tag{B3}$$

wobei k die Federkonstante ist. Eliminiert man mit Gleichung (B1) x_2, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) x_1 = \frac{k\,a}{m_1}.$$

Setzt man

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu},$$

so wird daraus

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{\mu} x_1 = \frac{k\,a}{m_1}.$$

Dies ist eine gewöhnliche Schwingungsgleichung mit einem konstanten Glied auf der rechten Seite. Wie leicht zu erkennen ist, stellt $x_p = C$ ein partikuläres Integral dar. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich

$$x_p = C = \frac{a\,\mu}{m_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} a.$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} + A \sin\left(\omega t + \delta\right), \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

Die Bewegungsgleichung für m_2 findet man am einfachsten durch Anwendung von Gleichung (B1):

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2} x_1 = \frac{m_1}{m_2}\left[x_1^{(0)} + A\sin\left(\omega t + \delta\right)\right]$$
$$= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} a - \frac{m_1}{m_2} A\sin\left(\omega t + \delta\right).$$

Die beiden Massenpunkte schwingen also im Gegentakt um ihre Ruhelage; ihre Amplituden verhalten sich umgekehrt wie die Massen. Die Kreisfrequenz ist gleich der eines einfachen harmonischen Oszillators mit der Masse μ, welche die »reduzierte Masse« genannt wird.

---

2 Der Impulssatz

Der Impuls $\boldsymbol{p}$ eines Massenpunktes ist definiert als das Produkt aus seiner Masse m und seiner Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}. \tag{8}$$

Nach dieser Definition als skalares Vielfaches eines Vektors ist der Impuls selbst ein Vektor.

Den Impuls eines Systems von Massenpunkten definieren wir entsprechend:

$$\boldsymbol{p} = \sum_k m_k \boldsymbol{v}_k. \tag{9}$$

Haben alle Massenpunkte des Systems dieselbe Geschwindigkeit, vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\sum_k m_k = M\,\boldsymbol{v}. \tag{10}$$

Nach Gleichung (3) ist

$$\sum_k \boldsymbol{F}_k = \sum_k m_k \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \sum_k m_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k}{\mathrm{d}t}.$$

Wenn alle m_k konstant sind, kann diese Gleichung zwischen zwei beliebigen Grenzen t_1 und t_2 integriert werden:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_k \boldsymbol{F}_k \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t} \sum_k m_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sum_k m_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{v}_k = \left|\sum_k m_k \boldsymbol{v}_k\right|_{t_1}^{t_2} = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1).$$

Auf die linke Seite der Gleichung wenden wir den Satz an, dass das Integral über eine Summe gleich der Summe der Integrale über die einzelnen Summanden ist. Auf der rechten Seite der Gleichung steht die Änderung des Impulses des Systems im Zeitintervall von t_1 bis t_2. Also gilt:

$$\sum_k \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_k \,\mathrm{d}t = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1). \tag{11}$$

Auf der linken Seite steht nun die Summe aller »Kraftstöße«, die in der Zeit von t_1 bis t_2 auf die Massenpunkte des Systems einwirken. (Unter einem »Kraftstoß« verstehen wir das Zeitintegral über eine an einem Körper angreifende Kraft.) Also gilt:

Die Summe aller Kraftstöße, die in einem Zeitintervall auf die Massenpunkte eines Systems einwirken, ist gleich der Änderung des Impulses des Systems in diesem Zeitintervall.

Wirken auf ein System keine äußeren Kräfte ein, bleibt der Impuls des Systems konstant. (Satz von der Erhaltung des Impulses.)

3 Das Drehmoment

Wir betrachten zunächst einen Massenpunkt m in einem kartesischen Koordinatensystem, auf den eine Kraft $\boldsymbol{F}$ wirkt.

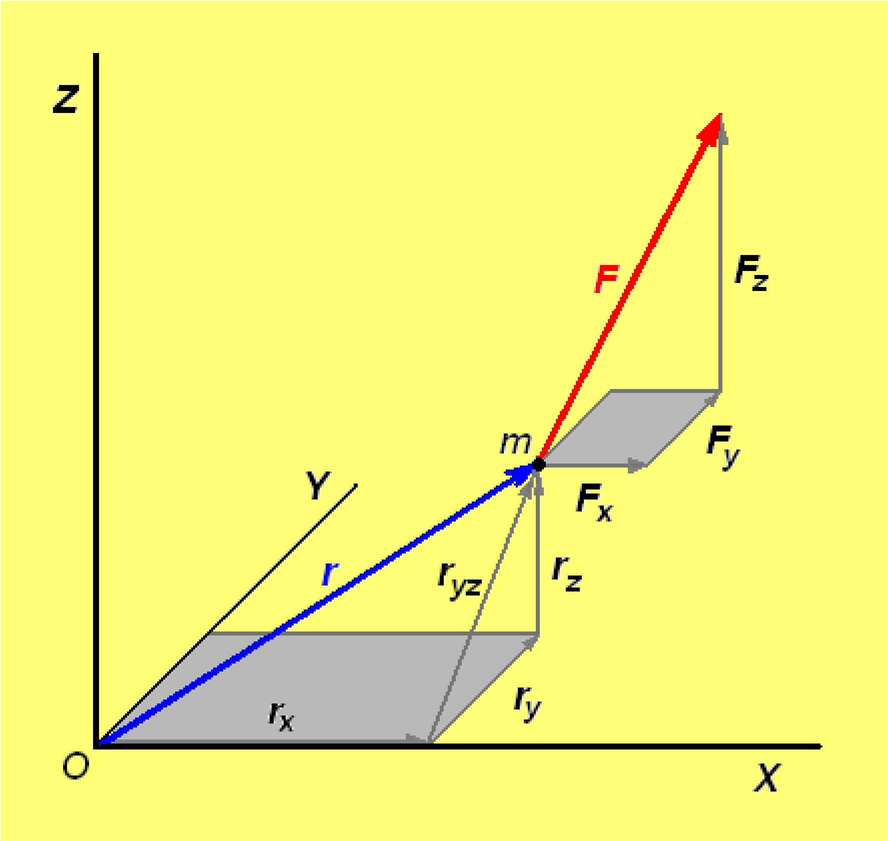

Abb. 4

Stellen wir uns zunächst einmal (und nur vorübergehend) die X-Achse als Drehachse vor, mit der der Massenpunkt m starr verbunden ist. Der Abstandsvektor des Massenpunktes von der Drehachse ist dann

$$\boldsymbol{r}_{yz} = \boldsymbol{r}_y + \boldsymbol{r}_z .$$

Für die Drehwirkung bezüglich der X-Achse zählt nur die auf $\boldsymbol{r}_{yz}$ senkrechte Komponente von $\boldsymbol{F}$. Diese ist

$$\boldsymbol{F}_{yz} = \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z .$$

Dabei wirkt auf $\boldsymbol{r}_y$ nur $\boldsymbol{F}_z$ und auf $\boldsymbol{r}_z$ nur $\boldsymbol{F}_y$, die jeweils senkrecht aufeinander stehen. Die Drehwirkung setzt sich also zusammen aus den Produkten

$r_y\, F_z$ (in Richtung der X-Achse gesehen rechts drehend) und

$r_z\, F_y$ (in Richtung der X-Achse gesehen links drehend).

Die gesamte Drehwirkung oder der Größenwert des **Drehmoments** der Kraft bezüglich der X-Achse ist daher

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y.$$

Entsprechend findet man die Drehmomente der Kraft bezüglich der beiden anderen Achsen:

$$M_y = r_z F_x - r_x F_z \quad \text{und} \quad M_z = r_x F_y - r_y F_x.$$

Wir können uns nun vorstellen, dass der Massenpunkt um alle drei Achsen drehbar wäre, etwa durch eine kardanische Aufhängung mit dem Zentrum in *O*. Nun führen wir drei Vektoren ein, welche die Richtungen der Koordinatenachsen haben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_x &= \left(r_y F_z - r_z F_y\right)\boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{M}_y &= \left(r_z F_x - r_x F_z\right)\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{M}_z &= \left(r_x F_y - r_y F_x\right)\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Die Summe dieser drei Vektoren ist der Vektor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O &= \boldsymbol{M}_x + \boldsymbol{M}_y + \boldsymbol{M}_z \\ &= \left(r_y F_z - r_z F_y\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(r_z F_x - r_x F_z\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(r_x F_y - r_y F_x\right)\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Wir erkennen in diesem Vektor das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \qquad \textbf{(12)}$$

Führen wir ein anderes Koordinatensystem mit demselben Ursprung *O* ein, so bleiben $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{F}$ davon unberührt. Der Vektor $\boldsymbol{M}_O$ bleibt also bei einer Drehung des Koordinatensystems um *O* unverändert. Wir bezeichnen ihn als das Drehmoment der in *m* angreifenden Kraft bezüglich des Punktes *O*. Er gibt hinsichtlich einer Drehung um *O* die Richtung der durch *O* gehenden Drehachse und den Größenwert des Drehmoments an, das $\boldsymbol{F}$ auf *m* ausübt. Sein Größenwert ist gleich $r\,F \sin \alpha$, wobei α der von $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{F}$ eingeschlossene Winkel ist. Der Größenwert des Drehmoments ist daher gleich dem Produkt aus dem Hebelarm bezüglich *O* und der dazu senkrechten Kraftkomponente.

Dieses Ergebnis übertragen wir nun wieder auf ein System von Massenpunkten und bezeichnen die Summe aller auf die Massenpunkte des Systems ausgeübten Drehmomente als das auf das System bezüglich *O* ausgeübte Drehmoment:

$$\boldsymbol{M}_O = \sum_k \left(\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k\right). \qquad \textbf{(13)}$$

4 Der Drehimpuls

Analog zum Impuls $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$ eines Massenpunktes wird – zunächst anscheinend etwas willkürlich – der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ eines Massenpunktes bezüglich einer Drehachse (in der Abbildung: *O*) definiert als ein Vektor, dessen Größenwert gleich dem Produkt aus dem Trägheitsmoment $J = m\,r^2$ des Massenpunktes (bezüglich *O*) und dem Größenwert ω seiner Winkelgeschwindigkeit ist:

$$L = J\,\omega = m r^2 \omega. \qquad \textbf{(14)}$$

Der Grund für diese Definition ist ihre Zweckmäßigkeit. Außerdem ergibt sich eine schöne Analogie: In der Impulsgleichung tritt anstelle des Impulses der Drehimpuls, anstelle der Masse das Trägheitsmoment und anstelle der Geschwindigkeit die Winkelgeschwindigkeit. (Daneben gibt es noch weitere Analogien.)

Als Richtung des Vektors $\boldsymbol{L}$ wählen wir die Richtung des der Winkelgeschwindigkeit zugeordneten Vektors $\boldsymbol{\omega}$ und somit die Richtung der Drehachse. Somit wird:

$$\boldsymbol{L} = J\,\boldsymbol{\omega} = m r^2 \boldsymbol{\omega}. \tag{15}$$

Zerlegen wir die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in eine Radialkomponente $\boldsymbol{v}_{rad}$ und in eine Transversalkomponente $\boldsymbol{v}_{trans}$, so ist

$$\omega = \frac{v_{trans}}{r}. \tag{16}$$

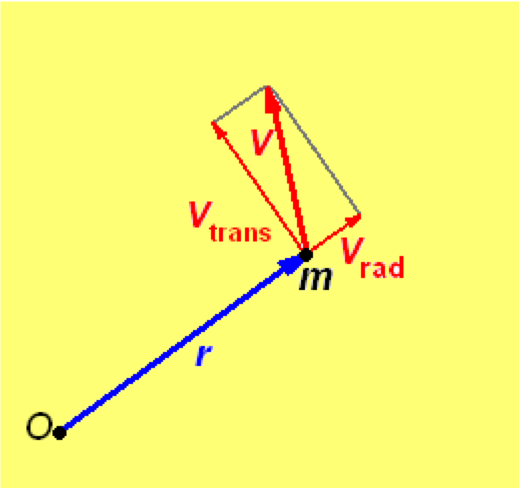

Abb. 5

Die Transversalkomponente der Geschwindigkeit ist die Projektion des Vektors $\boldsymbol{v}$ auf die zu $\boldsymbol{r}$ senkrechte Richtung:

$$v_{trans} = \frac{|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}|}{r} = \frac{\left|\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|}{r}.$$

Wegen Gleichung (16) und da der Vektor der Winkelgeschwindigkeit dieselbe Richtung hat wie das obige Vektorprodukt, ist

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}{r^2}. \tag{17}$$

Damit ergibt sich für den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ schließlich:

$$\boldsymbol{L} = J\,\boldsymbol{\omega} = m r^2 \frac{\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}}{r^2} = m\left(\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right). \tag{18}$$

Wir übertragen das Ergebnis auf ein System von Massenpunkten, indem wir verabreden:

Unter dem Drehimpuls eines Systems von Massenpunkten bezüglich *O* verstehen wir den Summenvektor

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_k m_k \left(\boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \right). \qquad \textbf{(19)}$$

5 Drehmoment und Drehimpuls

Um den Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehimpuls zu ermitteln, bilden wir die Ableitung der Drehimpulsgleichung nach *t*. Aus Gleichung (19) folgt dann:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_k m_k \left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \right) + \left(\boldsymbol{r}_k \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} \right) \right] = \sum_k \left(\boldsymbol{r}_k \times m_k \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} \right), \qquad \textbf{(20)}$$

da das erste der beiden Vektorprodukte null ist.

Nach der Bewegungsgleichung (siehe Gleichung (1)) ist

$$m_k \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_k + \sum_i \boldsymbol{F}_{ik},$$

wobei $\boldsymbol{F}_k$ die Resultierende aller Kräfte ist, die von außen auf m_k einwirken, während der zweite Term die Summe aller auf m_k einwirkenden inneren Kräfte ist. In Gleichung (20) eingesetzt ergibt das:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_k \left[\boldsymbol{r}_k \times \left(\boldsymbol{F}_k + \sum_i \boldsymbol{F}_{ik} \right) \right] = \sum_k \left(\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k \right) + \sum_k \sum_i \left(\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{ik} \right).$$

Die erste Summe ist die Resultierende $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$ der Drehmomente der äußeren Kräfte. Die zweite Summe ist die Resultierende der Drehmomente der inneren Kräfte. Wegen »actio = reactio« ist für jedes Paar von Massenpunkten stets $\boldsymbol{F}_{ki} = -\boldsymbol{F}_{ik}$ und daher gilt für die Summe der beiden Drehmomente, die irgendein Paar von Massenpunkten bezüglich *O* aufeinander ausübt:

$$\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{ik} + \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ki} = \left(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i \right) \times \boldsymbol{F}_{ik}.$$

Nun ist $\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_i$ der Vektor, der die beiden Massenpunkte verbindet. Da $\boldsymbol{F}_{ik}$ stets die Richtung der Verbindungsgeraden hat, ist das letzte Vektorprodukt null. Somit ist

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_k \left(\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_k \right) = \boldsymbol{M}_O.$$

Das bedeutet:

Die Änderungsgeschwindigkeit des Drehimpulses eines Systems ist gleich dem von außen wirkenden Drehmoment.

Durch Integration zwischen den Grenzen t_1 und t_2 folgt daraus:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_O(t_2) - \boldsymbol{L}_O(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_O \, \mathrm{d}t.$$

Das bedeutet:

Die Änderung des Drehimpulses eines Systems in einem Zeitintervall ist gleich dem auf das System in diesem Intervall ausgeübten »Drehmomentstoß« (das ist das Zeitintegral des Drehmoments).

Ferner:

Wirkt auf das System kein äußeres Drehmoment, so bleibt sein Drehimpuls konstant. (Satz von der Erhaltung des Drehimpulses.)

6 Die Energie eines Systems von Massenpunkten

Wir gehen wieder von der Bewegungsgleichung (Gleichung (1)) eines einzelnen Massenpunktes aus:

$$m_k \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{F}_k + \sum_i \boldsymbol{F}_{ik}.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k/\mathrm{d}t$:

$$m_k \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} = \left(\boldsymbol{F}_k + \sum_i \boldsymbol{F}_{ik} \right) \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}.$$

Der Term auf der linken Seite der Gleichung kann wie folgt umgeformt werden:

$$m_k \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t^2} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} m_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \right)^2 .$$

Somit ist

$$\frac{1}{2} m_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \right)^2 = \boldsymbol{F}_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} + \sum_i \boldsymbol{F}_{ik} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}.$$

Diese Gleichung gilt für jeden Massenpunkt des Systems. Nun summieren wir die Gleichungen aller Massenpunkte des Systems, wobei auf der linken Seite die Reihenfolge der Differentiation und der Summation vertauscht werden darf, und erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{1}{2} \sum_k m_k \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right] = \sum_k \boldsymbol{F}_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} + \sum_k \sum_i \boldsymbol{F}_{ik} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}.$$

Diese Gleichung wird mit $\mathrm{d}t$ multipliziert und zwischen den Grenzen t_1 und t_2 integriert:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{1}{2} \sum_k m_k \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right] \mathrm{d}t &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_k \boldsymbol{F}_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} + \sum_k \sum_i \boldsymbol{F}_{ik} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\boldsymbol{r}(t_1)}^{\boldsymbol{r}(t_2)} \left(\sum_k \boldsymbol{F}_k \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k + \sum_k \sum_i \boldsymbol{F}_{ik} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k \right)\end{aligned}$$

$$\left. \frac{1}{2} \sum_k m_k \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} \right)^2 \right|_{t_1}^{t_2} = \int_{\boldsymbol{r}(t_1)}^{\boldsymbol{r}(t_2)} \sum_k \boldsymbol{F}_k \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k + \int_{\boldsymbol{r}(t_1)}^{\boldsymbol{r}(t_2)} \sum_k \sum_i \boldsymbol{F}_{ik} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_k$$

und mit $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_k$

$$\frac{1}{2}\sum_k m_k\left[v(t_2)\right]^2 - \frac{1}{2}\sum_k m_k\left[v(t_1)\right]^2 = \int_{\boldsymbol{r}(t_1)}^{\boldsymbol{r}(t_2)} \sum_k \boldsymbol{F}_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k + \int_{\boldsymbol{r}(t_1)}^{\boldsymbol{r}(t_2)} \sum_k\sum_i \boldsymbol{F}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k. \qquad \textbf{(21)}$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht die Änderung der kinetischen Energie des Systems, rechts die Summe der Arbeit der äußeren und die der inneren Kräfte im betrachteten Zeitintervall. Die aufgewendeten Arbeiten führen also zu einer gleich großen Veränderung der kinetischen Energie des Systems. (Dies ist ein spezieller Fall des Satzes von der Erhaltung der Energie.)

Mit der kinetischen Energie kann man nun folgende Umformung vornehmen: Wir führen ein weiteres Koordinatensystem ein, dessen Ursprung *O'* im Schwerpunkt des Systems liegt. Dieser habe im ersten Koordinatensystem den Ortsvektor $\boldsymbol{r}*$. Der Ortsvektor des Massenpunktes m_k im neuen System sei $\boldsymbol{r}'_k$. Dann ist

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}* + \boldsymbol{r}'_k$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}*}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}*}{\mathrm{d}t}\right) + 2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}*}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

und damit

$$\frac{1}{2}\sum_k m_k\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}*}{\mathrm{d}t}\right)^2 \sum_k m_k + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}*}{\mathrm{d}t}\sum m_k \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\sum m_k\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k}{\mathrm{d}t}\right)^2. \qquad \textbf{(22)}$$

Nach der Definition des Schwerpunkts (Gleichung (4)) ist

$$\frac{1}{M}\sum_k m_k \boldsymbol{r}'_k = (\boldsymbol{r}*)',$$

wobei $(\boldsymbol{r}*)'$ die Koordinate des Schwerpunkts im zweiten (dem »gestrichenen«) System ist. Diese ist hier gleich null, und damit wird der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung (22) null. So ergibt sich schließlich:

$$\frac{1}{2}\sum_k m_k\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}*}{\mathrm{d}t}\right)^2 \sum_k m_k + \frac{1}{2}\sum m_k\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_k}{\mathrm{d}t}\right)^2. \qquad \textbf{(23)}$$

Das bedeutet:

Die kinetische Energie des Systems ist gleich der Summe aus der kinetischen Energie der im Schwerpunkt vereinigt gedachten Masse des Systems und der kinetischen Energie, welche die Massenpunkte des Systems infolge ihrer Bewegung relativ zum Schwerpunkt haben.

7 Ein System von Massenpunkten unter der Wirkung konservativer Kräfte

Wir wollen nun von den inneren Kräften annehmen, sie seien »konservativ«, das heißt, dass zu jeder von ihnen ein Potentialfeld gehört.

Die Masse m_i erzeuge am Ort der Masse m_k das Potential Φ_{ik}, die Masse m_k am Ort der Masse m_i das Potential Φ_{ki}.

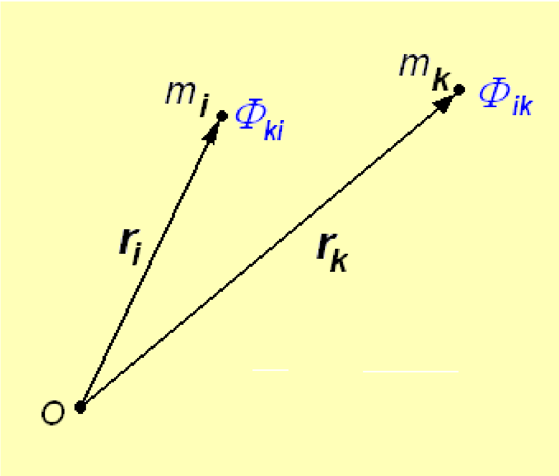

Abb. 6

Nehmen wir an, das Feld und damit das Potential eines jeden Massenpunktes werde erzeugt durch eine »Ladung« ρ_i bzw. ρ_k, die der jeweilige Massenpunkt besitzt (z. B. seine Masse, seine elektrische Ladung, ...) und das Feld wirke auf die »Ladung« des jeweils anderen Massenpunktes. Die »Ladung« der Massenpunkte sei die Ursache der Kräfte zwischen ihnen. Die Potentiale sind dann proportional der felderzeugenden Ladung. Bezeichnen wir das ladungsbezogene Potential Φ/ρ mit Ψ, dann ist

$$\Phi_i = \rho_i \Psi_i.$$

Das ladungsbezogene Potential Ψ_{ik} hängt dann nur noch vom Abstand d_{ik} der beiden betrachteten Massenpunkte ab:

$$\Psi_{ik} = f\left(d_{ik}\right) = f\left(\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}\right).$$

Nach einem Satz der Feldtheorie (siehe http://home.vrweb.de/~si.pe/ unter Vektoranalysis) ist die Kraft, die von der Masse m_i auf die Masse m_k ausgeübt wird,

$$\boldsymbol{F}_{ik} = -\rho_i\,\rho_k\,\mathrm{grad}\,\Psi_{ik} = -\rho_i\,\rho_k\left(\frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial x_k}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial y_k}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \Psi_{ik}}{\partial z_k}\boldsymbol{e}_3\right),$$

und analog

$$\boldsymbol{F}_{ki} = -\rho_i\,\rho_k\,\mathrm{grad}\,\Psi_{ki} = -\rho_i\,\rho_k\left(\frac{\partial \Psi_{ki}}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \Psi_{ki}}{\partial y_i}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \Psi_{ki}}{\partial z_i}\boldsymbol{e}_3\right).$$

Wegen »actio = reactio« ist $\boldsymbol{F}_{ki} = -\boldsymbol{F}_{ik}$ und daher

$$\mathrm{grad}\,\Psi_{ik} = -\mathrm{grad}\,\Psi_{ki}.$$

Nehmen wir nun an, die beiden Massen würden durch die jeweils einwirkende Kraft um kleine Strecken $d\boldsymbol{r}_i$ *bzw.* $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k$ verschoben, dann wird dabei von den Kräften die Arbeit

$$\boldsymbol{F}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{ki}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k = -\rho_i\,\rho_k\left(\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\varPsi}_{ki}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \mathrm{grad}\,\boldsymbol{\varPsi}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k\right).$$

verrichtet. Wegen $\boldsymbol{F}_{ki} = -\boldsymbol{F}_{ik}$ und grad $\varPsi_{ki} = -$ grad $\varPsi_{ik}$ gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{ki}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k &= -\boldsymbol{F}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k = -\rho_i\,\rho_k\left(\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\varPsi}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \mathrm{grad}\,\boldsymbol{\varPsi}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k\right)\\ &= -\rho_i\,\rho_k\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varPsi}_{ik}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial\boldsymbol{\varPsi}_{ik}}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i + \frac{\partial\boldsymbol{\varPsi}_{ik}}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i + \frac{\partial\boldsymbol{\varPsi}_{ik}}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k + \frac{\partial\boldsymbol{\varPsi}_{ik}}{\partial y_k}\mathrm{d}y_k + \frac{\partial\boldsymbol{\varPsi}_{ik}}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k\right).\end{aligned}$$

Der Term in der Klammer ist das vollständige Differential $\mathrm{d}\varPsi_{ik}$ der Funktion $\varPsi_{ik}$ mit ihren sechs Variablen. Also ist

$$\boldsymbol{F}_{ki}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k = -\rho_i\,\rho_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varPsi}_{ik}.$$

Wir greifen nun auf die Gleichung (21) des vorangegangenen Kapitels zurück:

$$\frac{1}{2}\sum_k m_k\left[v(t_2)\right]^2 - \frac{1}{2}\sum_k m_k\left[v(t_1)\right]^2 = \int\limits_{\boldsymbol{r}(t_1)}^{\boldsymbol{r}(t_2)}\sum_k \boldsymbol{F}_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k + \int\limits_{\boldsymbol{r}(t_1)}^{\boldsymbol{r}(t_2)}\sum_k\sum_i \boldsymbol{F}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k.$$

Wir können im ganz rechts stehenden Term das Produkt $\boldsymbol{F}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k$ durch das Differential $-\,\mathrm{d}\varPhi_{ik}$ ersetzen. Bei der Summierung müssen wir jedoch beachten, dass $-\,\mathrm{d}\varPhi_{ik}$ schon zwei der Summanden enthält, weshalb bei der Summierung jeder Summand doppelt vorkommt. Dies muss durch einen Faktor ½ berücksichtigt werden:

$$\sum_k\sum_i \boldsymbol{F}_{ik}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k = -\tfrac{1}{2}\sum_k\sum_i \rho_i\,\rho_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{\varPsi}_{ik} = -\tfrac{1}{2}\sum_k\sum_i \mathrm{d}\boldsymbol{\varPhi}_{ik}.$$

Das über diese Doppelsumme zu bildende Integral ist in einem Potentialfeld vom Weg unabhängig und hat den Wert

$$-\tfrac{1}{2}\sum_k\sum_i \boldsymbol{\varPhi}_{ik}(\boldsymbol{r}_2) + \tfrac{1}{2}\sum_k\sum_i \boldsymbol{\varPhi}_{ik}(\boldsymbol{r}_1).$$

Wenn wir nun außerdem annehmen, dass auch die äußeren Kräfte ein Potentialfeld haben, dann wird auch das erste Integral vom Weg unabhängig und kann so geschrieben werden:

$$-\sum_k \boldsymbol{\varPhi}_k(\boldsymbol{r}_2) + \sum_k \boldsymbol{\varPhi}_k(\boldsymbol{r}_1).$$

Dann nimmt Gleichung (21) folgende Form an:

$$E_{kin}(t_2) + \sum_k \boldsymbol{\varPhi}_k(t_2) + \tfrac{1}{2}\sum_k\sum_i \boldsymbol{\varPhi}_{ik}(t_2) = E_{kin}(t_1) + \sum_k \boldsymbol{\varPhi}_k(t_1) + \tfrac{1}{2}\sum_k\sum_i \boldsymbol{\varPhi}_{ik}(t_1).$$

Das bedeutet:

Die Summe aus der kinetischen Energie, der äußeren potentiellen Energie und der inneren potentiellen Energie eines Systems von Massenpunkten ist konstant, wenn sowohl die äußeren wie die inneren Kräfte ein Potentialfeld besitzen (konservative Kräfte sind). Dies ist eine erweiterte Form des Satzes von der Erhaltung der Energie.