Einführung
in die
Theoretische Physik

6. Teil: Mechanik flüssiger und gasförmiger Körper

Siegfried Petry

17. Januar 2013

I n h a l t :

1 Gleichgewichtszustände flüssiger und gasförmiger Körper

1.1 Der Druck in einem flüssigen oder gasförmigen Körper

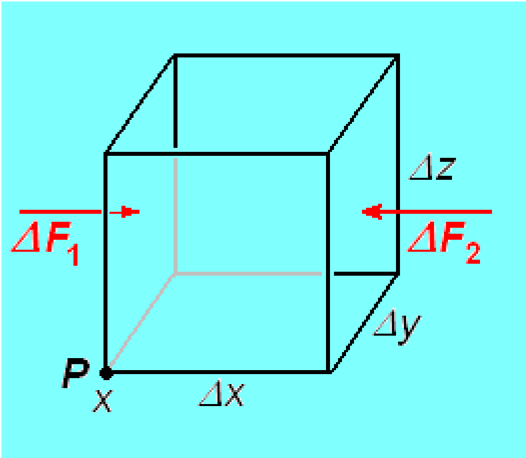
Auch Flüssigkeiten und Gase können in der Mechanik als homogene Kontinua angesehen und behandelt werden. Allerdings ist zur Erklärung ihres unterschiedlichen Verhaltens (auch im Vergleich mit Festkörpern) das Wissen um ihren Aufbau aus einzelnen, diskreten Atomen oder Molekülen wichtig. Da die Moleküle in Flüssigkeiten und Gasen nicht an einen festen Ort gebunden, sondern frei beweglich sind, setzen diese Körper einer Veränderung ihrer Form keinen Widerstand entgegen und passen ihre Gestalt der Form ihres Gefäßes an. Dass Flüssigkeiten fast nicht kompressibel sind, lässt darauf schließen, dass ihre Moleküle nahezu dicht gepackt sind. Dass sie andererseits aber eine hautähnliche Oberfläche mit einer Oberflächenspannung bilden und nicht – wie Gase – jeden ihnen gebotenen Raum einnehmen, zeigt, dass zwischen den Molekülen noch beträchtliche anziehende Kräfte wirken. Gase dagegen sind leicht komprimierbar und expandieren andererseits in jeden ihnen gebotenen Raum und üben auf die Gefäßwände einen Druck aus. Die erste Eigenschaft erklärt sich daraus, dass die Abstände der Moleküle ein Vielfaches ihrer Abmessungen betragen und zwischen ihnen keine abstoßenden Kräfte wirken. Die unbegrenzte Expansion und der Druck auf die Wände (auch auf die Oberfläche eines im Inneren des Gases befindlichen Körpers) rühren her von der beträchtlichen Geschwindigkeit, mit der sich die Gasmoleküle bewegen und auf die Wände stoßen.

Auch im Innern einer Flüssigkeit herrscht ein bestimmter Druck, wobei (in einem Gravitationsfeld) der durch das Gewicht der jeweils darüber befindlichen Flüssigkeit ausgeübte Druck (hydrostatischer Druck) eine besondere Rolle spielt. Die gleiche Ursache hat in Gasen der – naturgemäß viel kleinere – aerostatische Druck.

Wenn wir im Folgenden sehr kleine Volumenelemente betrachten, so sollen deren Abmessungen noch immer sehr groß sein gegen die Abmessungen und Abstände der Moleküle, denn nur dann gibt es einen definierten Druck. (Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, werden pro Sekunde nur noch sehr wenige Moleküle – oder auch einmal gar keine – auf die Oberfläche treffen, und dann gibt es keinen bestimmten Druck.)

Im Allgemeinen herrscht im Innern einer Flüssigkeit und eines Gases (im Folgenden »Medium« genannt) ein von Ort zu Ort variierender Druck, der sich außerdem mit der Zeit verändern kann. Wir betrachten zunächst eine Momentaufnahme des Mediums, sodass es keine zeitlichen Veränderungen gibt.

Wir denken uns in das Innere des Mediums einen kleinen Quader gebracht, dessen Kanten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems seien. Dann wirken auf die Begrenzungsflächen des Quaders von außen der Druck des Mediums und die daraus resultierenden Kräfte. Wenn wir von Reibungskräften zunächst absehen, wirken die Druckkräfte senkrecht auf die Flächen ein, weil mangels Reibung keine tangentialen Kräfte übertragen werden können.



Wir betrachten zunächst die parallel zur X-Achse wirkenden Kräfte ΔF_1 und ΔF_2. Die zu den Kräften gehörigen Drucke seien p_1 und p_2.

Unter der Voraussetzung, dass die Druckverteilung in einer hinreichend großen Umgebung des betrachteten Punktes P durch eine Funktion $p(\boldsymbol{r})$ dargestellt werden kann, die stetig ist und stetige partielle Ableitungen besitzt, gelten folgende Überlegungen ($\boldsymbol{r}$ sei der Ortsvektor von P): Es ist

$$p_2 \approx p_1 + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x,$$

wobei die partielle Ableitung an der Stelle P zu bilden ist.

Die Druckkräfte auf die betrachteten Seitenflächen sind dann

$$\Delta \boldsymbol{F}_1 \approx p_1 \Delta y \Delta z\, \boldsymbol{e}_1, \quad \Delta \boldsymbol{F}_2 \approx -p_2 \Delta y \Delta z\, \boldsymbol{e}_1 \approx -\left(p_1 + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \right) \Delta y \Delta z\, \boldsymbol{e}_1.$$

Die auf den Quader in X-Richtung insgesamt einwirkende Kraft ist dann

$$\Delta F_x = \Delta \boldsymbol{F}_1 + \Delta \boldsymbol{F}_2 \approx -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z\, \boldsymbol{e}_1 = -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta V\, \boldsymbol{e}_1,$$

wobei ΔV das Volumen des Quaders ist.

Analog findet man für die Kräfte in Y- und Z-Richtung:

$$\Delta \boldsymbol{F}_y \approx -\frac{\partial p}{\partial y}\Delta V \boldsymbol{e}_2, \qquad \Delta \boldsymbol{F}_z \approx -\frac{\partial p}{\partial z}\Delta V \boldsymbol{e}_3.$$

Die Gesamtkraft auf den Quader ist dann

$$\Delta \boldsymbol{F} = \Delta \boldsymbol{F}_x + \Delta \boldsymbol{F}_y + \Delta \boldsymbol{F}_z \approx -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{e}_3 \right)\Delta V = -\Delta V \operatorname{grad} p.$$

Wie zu erwarten, ist die Kraft dem Gradienten von p, also der Richtung des stärksten Anstiegs von p, entgegengesetzt gerichtet.

Für die »volumenbezogene Kraft« in P gilt dann

$$\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V} \approx -\operatorname{grad} p \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}V} = -\operatorname{grad} p.$$

Dividiert man die rechte Gleichung durch die Dichte ρ des Mediums, so erhält man die »massebezogene Kraft« in P

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\rho\,\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}m} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ p.$$

Bei Anwendung der letzten Gleichung muss berücksichtigt werden, dass die Dichte ρ eine Funktion der Temperatur und – bei Gasen – auch eine Funktion des Drucks ist.

Die nächste Frage ist: Was richten diese »bezogenen Kräfte« aus? Anders ausgedrückt: Nach dem Newtonschen Axiom »actio = reactio« muss es eine entgegengesetzt gleich große »bezogene Kraft« geben, die der ersten das Gleichgewicht hält. Welche ist das?

Wenn das Medium sich nicht bewegt (statischer Zustand), können diese Kräfte nur vom Gewicht des Mediums herrühren. In diesem Fall ist das Gewicht des Mediums die Ursache des Druckanstiegs mit zunehmender Tiefe. Wenn sich das Medium bewegt (dynamischer Zustand), können die Gegenkräfte außerdem von Trägheitskräften (bei Beschleunigung des Mediums) stammen. Bezeichnen wir die Gewichtskraft mit $\boldsymbol{G}$ und die Trägheitskraft mit $\boldsymbol{T}$, so gilt für die volumenbezogenen Kräfte:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}V} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}V} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}V} = \mathrm{grad}\ p$$

und für die massebezogenen Kräfte

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}m} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}m} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}m} = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ p.$$

Bezeichnen wir den Vektor der Erdbeschleunigung mit $\boldsymbol{g}$, so ist $\mathrm{d}\boldsymbol{G}/\mathrm{dm} = \boldsymbol{g}$, und da

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}m} = -\boldsymbol{a} = -\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

ist, gilt

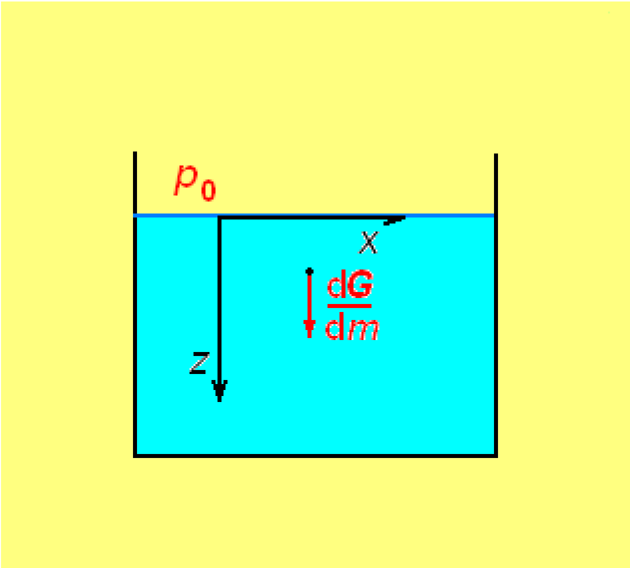
$$\boldsymbol{g} - \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ p. \qquad \textbf{(1)}$$

Das Minuszeichen bei der Trägheitskraft rührt daher, dass die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ der Trägheitskraft entgegengesetzt gerichtet ist.

Kennt man die Größen auf der linken Seite der Gleichung (1), kann man grad p berechnen.

1.1.1 Drei einfache Beispiele

1. Hydrostatischer Druck in einer Flüssigkeit



Hier gilt:

$$\operatorname{grad} p = \rho\,\boldsymbol{g} = \rho\, g\, \boldsymbol{e}_3, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 = \rho\, g\, \boldsymbol{e}_3.$$

Durch Komponentenvergleich ergibt sich daraus:

$$1. \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad 2. \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\, g.$$

Der Druck p hängt also nur von z ab, d. h. die horizontalen Ebenen in der Flüssigkeit sind Flächen gleichen Drucks (Isobaren). Weiter folgt:

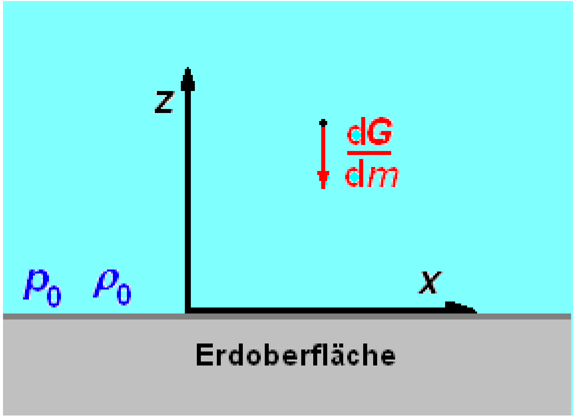
$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \rho\, g \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}p = \rho\, g\, \mathrm{d}z.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen 0 und z ergibt sich daraus:

$$p(z) = \rho\, g\, z + p(0).$$

Dabei ist $p(0)$ ist der atmosphärische Luftdruck.

2. Aerostatischer Druck (Barometrische Höhenformel)



Da hier die Z-Achse nach oben gerichtet ist, gilt:

$$\operatorname{grad} p = -\rho\, g\, \boldsymbol{e}_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dz}} = -\rho\, g.$$

Bei konstanter Temperatur gilt das BOYLE-MARIOTTE-Gesetz

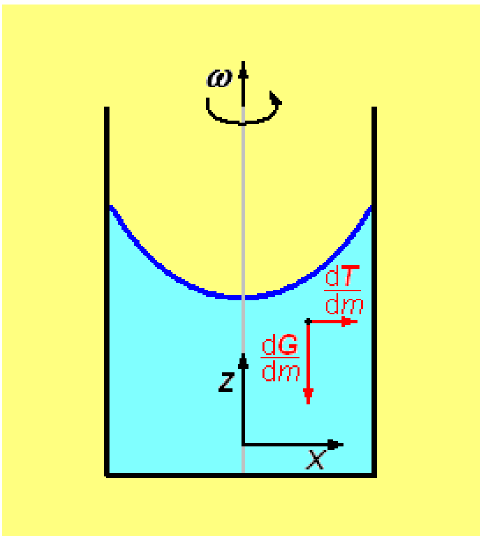
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,z} = -\frac{\rho_0}{p_0} g\, p \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,p}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g\,\mathrm{d}z.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen 0 und z ergibt sich daraus:

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} g\, z \quad \Rightarrow \quad p = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g\, z}.$$

3. Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit

Wegen der Rotationssymmetrie genügt eine zweidimensionale Betrachtung:



Hier gilt:

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}m} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}m} = -g\,\boldsymbol{e}_3 + \omega^2 x\,\boldsymbol{e}_1.$$

Durch Komponentenvergleich findet man:

$$1.\quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\,\omega^2 x, \qquad 2.\quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\, g.$$

Aus 1. folgt:

$$p = \frac{\rho\,\omega^2}{2}x^2 + f(z).$$

Aus 2. folgt dann

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = -\rho g \quad \text{und weiter} \quad f(z) = -\rho\, g\, z + K_1.$$

Damit ergibt sich

$$p = \frac{\rho\,\omega^2}{2}x^2 - \rho\, g\, z + K_1.$$

Wir suchen nun die Flächen gleichen Drucks, wozu auch die Oberfläche gehört, da hier überall derselbe atmosphärische Luftdruck herrscht. Hier sei p = konst. = : K_2. Damit ergibt sich:

$$K_2 = \frac{\rho\,\omega^2}{2}x^2 - \rho\, g\, z + K_1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + K.$$

Legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in den tiefsten Punkt dieser Parabel, so wird $K = 0$ und

$$z = \frac{\omega^2}{2g}x^2.$$

2 Die hydrodynamischen Grundgleichungen

Wir greifen auf die Gleichung (1) im vorigen Kapitel zurück und schreiben sie in folgender Form:

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \equiv \boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \tag{2}$$

Sie heißt **hydrodynamische Grundgleichung oder EULER-Gleichung der Hydrodynamik.**

Nun betrachten wir ein in seinem Inneren bewegtes, also strömendes Medium. Der Ort $P(x, y, z)$ eines bestimmten Volumen- oder Massenelements ist dann eine Funktion der Zeit:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Seine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ und deren skalare Komponenten v_x, v_y, v_z sind ebenfalls Funktionen des Ortes und damit auch indirekt Funktionen der Zeit:

$$v_x = v_x\left[x(t), y(t), z(t)\right], \quad \text{usw.}$$

Wenn die Strömung nicht stationär ist, also sich im Laufe der Zeit auch am selben Ort verändert, sind die Geschwindigkeitskomponenten außerdem auch unmittelbare Funktionen der Zeit:

$$v_x = v_x\left[t,\, x(t),\, y(t),\, z(t)\right], \quad \text{usw.}$$

Dasselbe gilt auch für die Komponenten der Beschleunigung

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

Diese sollen jetzt näher untersuchet werden.

Die vollständigen Differentiale der skalaren Komponenten der Geschwindigkeit sind:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}v_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z,\\
\mathrm{d}v_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathrm{d}z,\\
\mathrm{d}z &= \frac{\partial v_z}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial v_z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Division durch dt ergibt:

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\\
&= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Damit lauten die **»EULER-Gleichungen der Hydrodynamik«** in Komponentenform:

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z}v_z = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
a_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z}v_z = g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
a_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x}v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y}v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z}v_z = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Der erste Summand jeder Gleichung gibt die (zeitabhängige) Beschleunigung an, die das Element auch dann erfährt, wenn sich sein Ort nicht ändert (»lokale Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{\text{lok}}$«), die übrigen drei Summanden geben die Beschleunigung an, die das Element infolge seiner Ortsveränderung erfährt, weil am neuen Ort das Element im Allgemeinen auch dann eine andere Geschwindigkeit hat, wenn die Strömung stationär ist, sich also im Laufe der Zeit nicht verändert. Diese Beschleunigung heißt »konvektive Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{\text{konv}}$«. Die linken Seiten der Gleichungen sind also die Komponenten des Vektors

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{lok}} + \boldsymbol{a}_{\text{konv}},$$

mit

$$\boldsymbol{a}_{\text{lok}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_x}{\partial t}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial v_y}{\partial t}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial v_z}{\partial t}\boldsymbol{e}_3$$

und

$$\boldsymbol{a}_{\text{konv}} = \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)\boldsymbol{e}_1 + \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)\boldsymbol{e}_2 + \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)\boldsymbol{e}_3.$$

Die rechten Seiten der EULER-Gleichungen (3) sind die Komponenten des Vektors

$$\boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\,\text{grad}\; p.$$

Also ist

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{lok}} + \boldsymbol{a}_{\text{konv}} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\,\text{grad}\; p.$$

Die Komponenten der konvektiven Beschleunigung können als das Skalarprodukt zweier Vektoren aufgefasst werden:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \left(v_x\boldsymbol{e}_1 + v_y\boldsymbol{e}_2 + v_z\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial v_x}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial v_x}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 \right) = \boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\, v_x,$$

und analog

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\, v_y,$$
$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\, v_z.$$

Man kann daher schreiben:

$$\boldsymbol{a}_{\text{konv}} = \boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\, v_x\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\, v_y\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\, v_z\boldsymbol{e}_3.$$

Der Differentialoperator »grad« kann als symbolischer Vektor aufgefasst werden, der auf eine dahinter stehende skalare Funktion angewendet wird (hier: v_x usw.):

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_3.$$

Wir wollen diesen symbolischen Vektor jetzt aus der üblichen Anwendung herauslösen und auf andere Weise verwenden. Wenn wir den Vektor »grad« skalar mit dem Vektor $\boldsymbol{v}$ multiplizieren und dabei die für Vektoren geltenden Rechenregeln anwenden, erhalten wir:

$$\boldsymbol{v}\cdot\text{grad} = \left(v_x\boldsymbol{e}_1 + v_y\boldsymbol{e}_2 + v_z\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \right) = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Multiplizieren wir dieses »Skalarprodukt« – das einen skalaren Differentialoperator darstellt – wiederum skalar mit dem Vektor $\boldsymbol{v}$, so ergibt das:

$$\left(\boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\right)\boldsymbol{v} = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} \right)\boldsymbol{v} = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} \right)\left(v_x\boldsymbol{e}_1 + v_y\boldsymbol{e}_2 + v_z\boldsymbol{e}_3\right).$$

Führt man die beschriebene Differentialoperation aus, so erhält man neun Produkte, von denen jeweils drei denselben Einheitsvektor als Faktor haben:

$$(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}=\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_2$$
$$+\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Das Ergebnis ist identisch mit dem Vektor $\boldsymbol{a}_{\text{konv}}$:

$$\boldsymbol{a}_{\text{konv}}=(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}.$$

Damit lautet die **EULER-Gleichung in Vektorform:**

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p,$$

und für eine stationäre Strömung

$$(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{g}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p.$$

Der Vektor $\boldsymbol{g}$ – die Gravitationsfeldstärke – kann nun noch als Gradient des Gravitationspotentials Φ dargestellt werden:

$$\boldsymbol{g}=-\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi},$$

Womit sich schließlich ergibt:

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}=-\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p,$$

und für eine stationäre Strömung

$$(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}=-\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi}-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p.$$

Diese hydrodynamische Grundgleichung wird ergänzt durch eine zweite Gleichung, welche die Massenänderung eines Volumenelements betrifft.

Die Masse in einem eines beliebigen Volumens V des Mediums ist

$$m=\int_V\rho\,\mathrm{d}V,$$

Und die Änderungsgeschwindigkeit dieser Masse ist

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho\,\mathrm{d}V.$$

Die in dem (als konstant betrachteten) Volumen V enthaltene Masse kann sich nur durch Zu- oder Abfluss von Materie durch die Begrenzungsfläche des betrachteten Raumteils ändern. (Das Vorhandensein von Quellen im Innern sei ausgeschlossen.) Die Änderungsgeschwindigkeit der Masse bei ausströmender Materie ist

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \oint_A \rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}A,$$

wobei $\boldsymbol{v}$ der Geschwindigkeitsvektor und d$\boldsymbol{A}$ der nach außen gerichtete Normalenvektor eines Flächenelements ist. A ist die das Volumen V einschließende Hülle. Unter Berücksichtigung des Vorzeichens ist dann

$$\oint_A \rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V.$$

Nach dem GAUSS-Integralsatz ist

$$\oint_A \rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int \mathrm{div}\left(\rho V\right)\mathrm{d}V,$$

und daher

$$\int_V \mathrm{div}\left(\rho V\right)\mathrm{d}V = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V.$$

Bei Anwendung auf ein einzelnes Volumenelement dV ergibt sich daraus

$$\mathrm{div}\left(\rho\,\boldsymbol{v}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Diese Gleichung heißt **Kontinuitätsgleichung.**

Für inkompressible Flüssigkeiten (ρ = konst.) vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung zu

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0.$$

In Koordinatenschreibweise lauten diesen beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\left(\rho v_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho v_z\right)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{bzw. } 0$$

Nach den Gesetzen der Vektoranalysis ist

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{w} = \mathrm{grad}\left(\boldsymbol{v}_c \cdot \boldsymbol{w}\right) - \left(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\right)\boldsymbol{w},$$

wobei der Index c bedeutet, dass der so indizierte Vektor bei der Differentialoperation als konstanter Vektor zu behandeln ist. Für $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ folgt daraus

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\left(\boldsymbol{v}_c \cdot \boldsymbol{v}\right) - \left(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,v^2 - \left(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v}$$

und

$$\left(\boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}\right)\boldsymbol{v} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,v^2 - \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}.$$

Dies in die hydrodynamische Grundgleichung für eine stationäre Strömung eingesetzt ergibt

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,v^2 - \boldsymbol{v} \times \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p.$$

Diese Gleichung wird erheblich vereinfacht und wesentlich leichter integrierbar, wenn im ganzen Raum rot $\boldsymbol{v} = 0$ ist (wirbelfreie Strömung). Das werden wir im Folgenden voraussetzen.

3 Stationäre Strömungen

Bei stationären Strömungen ist das Strömungsfeld unabhängig von der Zeit.

3.1 Stromlinien und Bahnlinien

Stromlinien sind gedachte Linien in einer Strömung, deren Tangenten die Richtung der Geschwindigkeit der strömenden Teilchen im jeweils betrachteten Punkt haben.

Die **Bahnlinie** eines Teilchens dagegen ist die Kurve, die das Teilchen im Laufe der Zeit durchläuft.

Bei einer stationären Strömung sind die Stromlinien zeitunabhängig; die Bahnlinien und die Stromlinien fallen zusammen.

Bei nicht stationären Strömungen verändern sich die Stromlinien im Laufe der Zeit ständig. Daher sind Stromlinienbilder dann nur Momentaufnahmen und haben keine den Augenblick überdauernde Bedeutung. Auch die Bahnlinien ändern sich im Laufe der Zeit, aber immerhin gelten sie für jeweils ein bestimmtes Teilchen für die Zeit seiner Bewegung im Strömungsfeld.

3.2 Die BERNOULLI-Gleichung

Wir betrachten die zuletzt abgeleitete Gleichung für eine stationäre Strömung und setzen für $\boldsymbol{g}$ wieder – grad Φ:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \qquad \textbf{(1)}$$

Für inkompressible Flüssigkeiten (ρ = konst.) gilt

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}\frac{p}{\rho}$$

und damit

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi} + \operatorname{grad}\frac{p}{\rho} = \operatorname{grad}\left(\boldsymbol{\Phi} + \frac{p}{\rho}\right).$$

Dann wird aus Gleichung (1):

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{grad} v^2 - \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\left(\boldsymbol{\Phi} + \frac{p}{\rho}\right).$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit d$\boldsymbol{r}$ und integrieren sie zwischen zwei Punkten P_0 und P des Strömungsfeldes:

$$\tfrac{1}{2}\int_{P_0}^{P}\operatorname{grad} v^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{P_0}^{P}(\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{P_0}^{P}\operatorname{grad}\left(\boldsymbol{\Phi} + \frac{p}{\rho}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \qquad \textbf{(2)}$$

Für die Integration des Gradienten einer Funktion $U(x, y, z)$ nach $\boldsymbol{r}$ gilt:

$$\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \operatorname{grad} U \,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 \right) \left(\mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_3 \right)$$

$$= \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z \right) = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \mathrm{d}U = U(\boldsymbol{r}_2) - U(\boldsymbol{r}_1),$$

da der Integrand das vollständige Differential dU der Funktion U ist.

Folglich wird aus Gleichung (2):

$$\tfrac{1}{2}\left| v^2 \right|_{P_0}^{P} - \left| \boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v} \right|_{P_0}^{P} = \left| \boldsymbol{\Phi} + \frac{p}{\rho} \right|_{P_0}^{P}.$$

Nehmen wir die Integration längs einer Stromlinie – also überall in Richtung des Geschwindigkeitsvektors vor, dann ist auf dem ganzen Weg

$$(\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}) \perp \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{und daher} \quad (\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}.$$

Dann gilt:

$$\frac{v^2}{2} + \boldsymbol{\Phi} + \frac{p}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + \boldsymbol{\Phi}_0 + \frac{p_0}{\rho}.$$

Das bedeutet: Die linke Seite der Gleichung hat – unabhängig von der Lage des Punktes P auf der Stromlinie – immer denselben Wert, ist also längs der Stromlinie konstant.

Diese **»BERNOULLI-Gleichung«** gilt (längs einer Feldlinie) für jede Art von stationären Strömungen, für wirbelfreie und nicht wirbelfreie. Der konstante Wert ist dabei im Allgemeinen von Stromlinie zu Stromlinie verschieden. Ist die Strömung wirbelfrei, d. h. ist im ganzen Strömungsgebiet rot $\boldsymbol{v} = 0$, so ist das zweite Integral auf der linken Seite der Gleichung (2) auch dann null, wenn die Integration nicht längs einer Stromlinie erfolgt. Das heißt: Die oben genannte Summe ist bei Wirbelfreiheit im ganzen Strömungsgebiet konstant.

Der Umkehrschluss von der Konstanz der Summe auf die Wirbelfreiheit des Gebiets ist nicht unbedingt zulässig, da $\boldsymbol{v}$ parallel zu rot $\boldsymbol{v}$ sein könnte und daher das Vektorprodukt null wäre, obwohl rot $\boldsymbol{v}$ nicht null ist. Wohl aber kann geschlossen werden: Stammt die Strömung aus einem wirbelfreien Gebiet, in dem die oben genannte Summe für alle Stromlinien denselben Wert hat, dann bleibt die Strömung im ganzen Raum wirbelfrei.

3.3 Wirbelfreie stationäre Strömungen

Nach einem Satz der Vektoranalysis kann der Feldvektor eines wirbelfreien Feldes stets als Gradient einer Ortsfunktion U dargestellt werden. Die Funktion U heißt Potentialfunktion des Feldes.

In einem Strömungsgebiet mit dem Feldvektor v, in dem überall rot $\boldsymbol{v} = 0$ ist, lässt sich demnach $\boldsymbol{v}$ als Gradient einer Funktion U darstellen, die Geschwindigkeitspotential(funktion) genannt wird. Es ist dann

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} U.$$

Damit lautet die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \operatorname{div}\operatorname{grad} U = 0.$$

In der Koordinatendarstellung ist

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_3\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Mit dem **»LAPLACE-Operator«**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

kann die Kontinuitätsgleichung so geschrieben werden:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} U \equiv \Delta U = 0.$$

Jede Funktion U, welche der »LAPLACE-Differentialgleichung« $\Delta U = 0$ genügt, kann also das Geschwindigkeitspotential einer wirbelfreien Strömung darstellen.

Unter den zahlreichen Lösungen dieser Differentialgleichung muss von Fall zu Fall diejenige bestimmt werden, welche den jeweiligen physikalischen Gegebenheiten – den Randbedingungen – entspricht. Dann kann durch Gradientenbildung das Geschwindigkeitsfeld berechnet werden. Zur anschließenden Ermittlung der Druckverteilung wird dann die hydrodynamische Grundgleichung benutzt.

3.3.1 Beispiele:

1. Die kugelsymmetrische Strömung

Die einfachste nicht-triviale räumliche Potentialströmung (das ist ein Strömungsfeld, dessen Geschwindigkeitsvektor ein Potential U hat) ist eine kugelsymmetrische Strömung, bei der U nur von r abhängt:

$$U = U(r), \quad \text{wobei} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Es soll nun

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

berechnet werden. Es ist

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{x}{r}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r},$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2}\frac{x}{r}\frac{x}{r} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{r - x\frac{x}{r}}{r^2} = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

Analog findet man

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{r^2 - y^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2}\frac{z^2}{r^2} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{r^2 - z^2}{r^3}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2}\,\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\,\frac{r^2-x^2+r^2-y^2+r^2-z^2}{r^3} \\ &= \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die LAPLACE-Gleichung ergibt sich

$$\Delta U = \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = 0.$$

Wie man durch Ableiten und Einsetzen bestätigen kann, ist

$$U = \frac{A}{r} + B$$

eine Lösung der Differentialgleichung, und zwar die allgemeine Lösung. Durch Gradientenbildung erhält man daraus

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} U = \operatorname{grad}\left(\frac{A}{r} + B\right) = -\frac{A}{r^3}\boldsymbol{r} = -\frac{A}{r^2}\boldsymbol{r}_0,$$

wobei $\boldsymbol{r}_0$ der Einheitsvektor in der Richtung von $\boldsymbol{r}$ ist.

Die Strömung verläuft also – je nach dem Vorzeichen von A – radial nach außen oder innen. Im ersten Fall muss sich in O eine Quelle befinden, im zweiten Fall eine Senke. Die Ergiebigkeit (die »Schüttung«) $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ der Quelle bestimmt die Konstante A. Die Ergiebigkeit ist gleich dem zeitbezogenen Flüssigkeitsvolumen, das durch die Oberfläche einer Kugel um O nach außen strömt, und dies ist

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 v = -4\pi A,$$

woraus folgt

$$A = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}.$$

Die Konstante B ist für die Strömung belanglos, da sie bei der Gradientenbildung wegfällt. Sie hat aber Einfluss auf das Potential der Strömung. Wenn man dieses – wie üblich – so normiert, dass es im Unendlichen null wird, ist $B = 0$.

Interessant ist die vollkommene Analogie zum elektrischen Feld einer Punktladung.

2. Zerreißen eines Flüssigkeitsfadens

Wenn aus einem Wasserhahn ein Flüssigkeitsfaden austritt, wird er wegen der zunehmenden Geschwindigkeit zunächst dünner und zerreißt schließlich in einzelne Tropfen. Dieser Vorgang soll genauer betrachtet werden. Aus der BERNOULLI-Gleichung folgt

$$p = -\rho\Phi - \frac{\rho v^2}{2} \ .$$

Für eine ruhende Flüssigkeit dagegen lautet die Gleichung:

$$p_{\text{stat}} = -\rho\Phi.$$

Der Index »stat« soll darauf hinweisen, dass es sich dabei um den hydrostatischen Druck handelt. In die obere Gleichung eingesetzt ergibt:

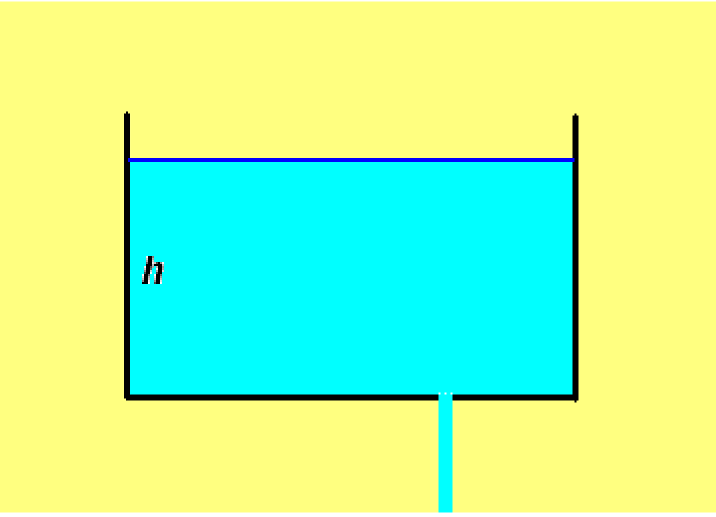
$$p = p_{\text{stat}} - \frac{\rho v^2}{2} \ .$$

Das bedeutet: Der hydrodynamische Druck p ist um $\rho\ v^2/2$ kleiner, als der hydrostatische Druck an derselben Stelle wäre, wenn sich die Flüssigkeit nicht bewegen würde. Er nimmt mit zunehmender Geschwindigkeit ab. Da Flüssigkeiten keinen Zug aushalten können, ohne zu zerreißen, darf der hydrodynamische Druck nicht kleiner als 0 werden, wenn die Flüssigkeit nicht zerreißen soll. Der höchste zulässige Wert für die Geschwindigkeit ist demnach

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2\,p_{\text{stat}}}{\rho}}.$$

3. Das Theorem von TORRICELLI

Ein Gefäß sei bis zur Höhe h mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ angefüllt. Im Boden des Gefäßes befinde sich ein Loch, dessen Querschnitt sehr klein ist gegenüber der Oberfläche der Flüssigkeit im Gefäß. Gesucht ist die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit ausströmt.



Da an der Oberfläche der Flüssigkeit überall derselbe Druck p_0 (der Atmosphärendruck) herrscht, die Flüssigkeitsteilchen alle dieselbe Geschwindigkeit v (praktisch gleich 0) haben und sie außerdem in derselben Höhe h liegen, hat für alle Punkte der Oberfläche die Summe

$$\frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho}$$

denselben Wert. Setzen wir das Potential Φ am Boden des Gefäßes gleich 0, dann ist es an der Oberfläche gleich $g\,h$. Wegen $v = 0$ hat die Summe dann den Wert

$$g\,h + \frac{p_0}{\rho},$$

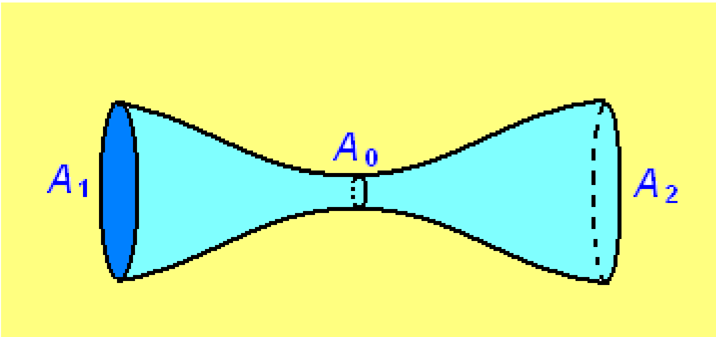
wobei p_0 der atmosphärische Luftdruck ist. Außerdem ist das Gebiet der Oberfläche wirbelfrei. Da die Summe längs einer Stromlinie ihren Wert behält, muss überall rot v null sein. Wir können also die BERNOULLI-Gleichung anwenden. In der Ebene der Öffnung unten ist die Geschwindigkeit v, der Druck ebenfalls p_0 und das Potential 0. Also ist

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = g\,h + \frac{p_0}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2\,g\,h}.$$

Das Ergebnis entspricht dem Energiesatz: Wenn unten das Volumen ΔV austritt, verschwindet an der Oberfläche eine gleiche Menge. Die Flüssigkeitsteilchen, die unten austreten, haben dieselbe Geschwindigkeit, als wenn sie die Höhe h frei durchfallen hätten. Für die oben verschwindende potentielle Energie tritt unten der gleiche Betrag an kinetischer Energie auf.

4. Prinzip der Wasserstrahlpumpe

Wir betrachten ein sich in der Mitte verengendes Rohr, das wirbelfrei von einer Flüssigkeit durchströmt wird.



Das Gravitationspotential sei für die drei Querschnitte A_0, A_1 und A_2 gleich oder (bei senkrechter Anordnung) annähernd gleich. Anwendung der BERNOULLI-Gleichung auf die Querschnitte A_0 und A_2 liefert:

$$\tfrac{1}{2}\left(v_0^2 - v_2^2\right) = \frac{p_2 - p_0}{\rho}.$$

Da die Flüssigkeit nicht kompressibel ist, gilt:

$$v_0 A_0 = v_2 A_2,$$

womit man schließlich erhält:

$$p_2 - p_0 = \frac{\rho}{2} v_0^2 \left(\frac{A_2^2}{A_0^2} - 1 \right).$$

Wenn $A_2 >> A_0$ ist, dann ist (erst recht) $p_2 >> p_0$. Wenn die Flüssigkeit in die Atmosphäre ausströmt, ist p_2 gleich dem Atmosphärendruck und p_0 sehr viel kleiner als dieser. Bohrt man die Röhre an der engsten Stelle an, so saugt die vorbeiströmende Flüssigkeit dort Luft an.

3.5 Zweidimensionale stationäre Strömungen

Zweidimensionale stationäre Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten stehen in einem interessanten Zusammenhang mit den Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die in der Funktionentheorie behandelt werden. Dieser Zusammenhang soll zunächst dargestellt werden.

Unter einer Funktion $w(z)$ einer komplexen Variablen $z = x + \mathrm{i}y$ versteht man eine Funktion der beiden Variablen x und y, in der x und y nur in der der Verbindung $(x + \mathrm{i}y)$ vorkommen.

Die partiellen Ableitungen der Funktion w nach x und y sind dann

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \cdot 1 =: w'(z),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}\, w'(z).$$

Ein Vergleich zeigt, dass

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \mathrm{i}\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3}$$

Die Werte, welche die Funktion w annimmt, sind selbst wieder komplexe Zahlen, die wir in einen Realteil und einen Imaginärteil zerlegen können:

$$w(z) = \varphi(x, y) + \mathrm{i}\,\psi(\mathrm{x,y}).$$

Die Gleichung (3) kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \mathrm{i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.1) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4.2) \tag{4}$$

Differenziert man (4.1) partiell nach y und (4.2) partiell nach x, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Nach dem Satz von SCHWARZ ist bei Stetigkeit der beiden Ableitungen

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}$$

und daher

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Auf analoge Weise findet man:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

Diese beiden LAPLACE-Differentialgleichungen besagen, dass sowohl $\varphi(x,\, y)$ als auch $\psi(x, y)$ die Funktion des Geschwindigkeitspotentials einer zweidimensionalen Strömung sein kann.

Multipliziert man (4.1) und (4.2) mit einander, so erhält man:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi=0.$$

Das bedeutet: Die Kurven φ = konst. und ψ = konst. stehen in jedem gemeinsamen Punkt aufeinander senkrecht (sie sind »Orthogonaltrajektorien«). Jede der beiden Kurvenscharen kann als die Schar der Stromlinien aufgefasst werden, die jeweils andere ist dann die Schar der Äquipotentiallinien (oder Niveaulinien) des Geschwindigkeitspotentials.

Zusammenfassung: Sowohl der reelle wie der imaginäre Bestandteil einer beliebigen Funktion einer komplexen Veränderlichen kann als Geschwindigkeitspotentialfunktion einer zweidimensionalen stationären Flüssigkeitsströmung angesehen werden. Betrachten wir den reellen Teil, so sind die Kurven φ = konst. die Niveaulinien und die Kurven ψ = konst. die Stromlinien, und umgekehrt. Man erhält also mit jeder Funktion einer komplexen Veränderlichen gleich zwei mögliche Strömungsfelder.

Nun gibt es in der Realität zwar keine ebenen Strömungen, aber es gibt Strömungen, die in parallelen Ebenen völlig gleich verlaufen, bei denen also die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und das Potential φ nur Funktionen von x und y sind.

3.5.1 Beispiele:

1. Ebene Quell- und Zirkulationsströmung

Es sei

$$w(z)=a\ln z=a\ln\left(x+\mathrm{i}y\right),$$

wobei a eine Konstante ist. Setzen wir

$$a\ln\left(x+\mathrm{i}y\right)=\varphi+\mathrm{i}\,\psi,$$

dann ist

$$x+\mathrm{i}y=e^{\frac{\varphi+\mathrm{i}\psi}{a}}=e^{\frac{\varphi}{a}}e^{\frac{\mathrm{i}\psi}{a}}=e^{\frac{\varphi}{a}}\left(\cos\frac{\psi}{a}+\mathrm{i}\sin\frac{\psi}{a}\right)=e^{\frac{\varphi}{a}}\cos\frac{\psi}{a}+\mathrm{i}e^{\frac{\varphi}{a}}\sin\frac{\psi}{a}.$$

Also ist

$$x = e^{\frac{\varphi}{a}} \cos\frac{\psi}{a} \quad \text{und} \quad y = e^{\frac{\varphi}{a}} \sin\frac{\psi}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \tan\frac{\psi}{a}.$$

Ferner ist

$$x^2 + y^2 = e^{\frac{2\varphi}{a}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\varphi}{a} = \ln\left(x^2 + y^2\right) = \ln r^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = a \ln r.$$

Für ψ = konst. ist dann $y = c\,x$; für φ = konst. ist r = konst.

Wir erhalten also einerseits eine Schar von Geraden durch den Ursprung, andererseits eine Schar von konzentrischen Kreisen um O. Betrachten wir die Geraden als Stromlinien, so erhalten wir das ebene Gegenstück zu der früher betrachteten Kugelströmung. Die Kreise sind dann die Niveaulinien des Geschwindigkeitspotentials.

Wir können aber auch die Kreise als Stromlinien betrachten. Wenn wir den Nullpunkt durch einen kleinen Kreis um ihn herum ausschließen, ist das übrige Gebiet wirbelfrei. Die Flüssigkeitsteilchen bewegen sich allerdings im Kreis herum und das Linienintegral der Geschwindigkeit über einen solchen Kreis oder über eine andere geschlossene Linie um O ist nicht null. Eine solche »Zirkulationsströmung« findet sich zum Beispiel bei den magnetischen Feldlinien eines langen Leiters.

1. Fall: Quellströmung

Das Geschwindigkeitspotential der Strömung sei $\varphi = a \ln r$. Dann ist:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\left(a \ln r\right) = \operatorname{grad}\left(a \ln\sqrt{x^2 + y^2}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a \ln\sqrt{x^2 + y^2}\right)\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(a \ln\sqrt{x^2 + y^2}\right)\boldsymbol{e}_2 \\ &= \frac{a}{r}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{e}_1 + \frac{y}{r}\boldsymbol{e}_2\right) = \frac{a}{r^2}\boldsymbol{r}. \end{aligned}$$

Deutung: Die Geschwindigkeit der Strömung ist von O radial nach außen oder innen gerichtet. Folglich muss sich in O sich eine Quelle oder Senke befinden. Ihre Ergiebigkeit ist gleich der auf die Zeit bezogene Fläche, die durch einen Kreis um O hindurch strömt:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 2\pi r\, v = 2\pi a.$$

2. Fall: Zirkulationsströmung

Das Geschwindigkeitspotential der Strömung sei nun $\psi = \arctan y/x$. Dann ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\psi &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan\frac{y}{x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\arctan\frac{y}{x}\boldsymbol{e}_2 \\ &= \frac{a}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{x}{x^2}\boldsymbol{e}_2\right) = \frac{a}{x^2 + y^2}\left(-y\,\boldsymbol{e}_1 + x\,\boldsymbol{e}_2\right). \end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor steht also auf dem Radiusvektor senkrecht; sein Betrag ist

$$v = \frac{a}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Das Linienintegal über $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ längs einer beliebigen geschlossenen Kurve, die den Punkt O umschließt, hat denselben Wert wie das Linienintegral über einen Kreis um O, nämlich

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{a}{r}2\pi r = 2\pi a.$$

3. Ebene Parallelströmung

Wir betrachten nun die sehr einfache Funktion

$$w(z) = z = x + \mathrm{i}y.$$

Hier ist

$$\varphi = x, \quad \psi = y.$$

Die Kurven φ = konst. haben die Gleichung x = konst.; die Kurven ψ = konst. haben die Gleichung y = konst.

Wir haben also, je nach Interpretation, eine Parallelströmung parallel zur X-Achse oder parallel zur Y-Achse. Die Niveaulinien sind dann die jeweils andere Kurvenschar.

4. Umströmter Kreiszylinder

Wir betrachten die Funktion

$$w(z) = Az + \frac{B}{z},$$

wobei A und B positive Konstanten seien. Ausführlich geschrieben ist

$$w = A(x+\mathrm{i}\,y) + \frac{B}{x+\mathrm{i}\,\mathrm{y}} = A(x+\mathrm{i}\,y) + \frac{B(x-\mathrm{i}\,\mathrm{y})}{x^2+y^2}.$$

Es ist daher

$$\varphi = Ax + \frac{Bx}{x^2+y^2}, \quad \psi = Ay + \frac{By}{x^2+y^2}.$$

Wenn wir φ = konst. als die Gleichung der Niveaulinien ansehen und ψ = konst. als die Gleichung der Stromlinien, dann ist wegen $\boldsymbol{v}$ = grad φ

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = A + \frac{B\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad \text{und} \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{2Bxy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

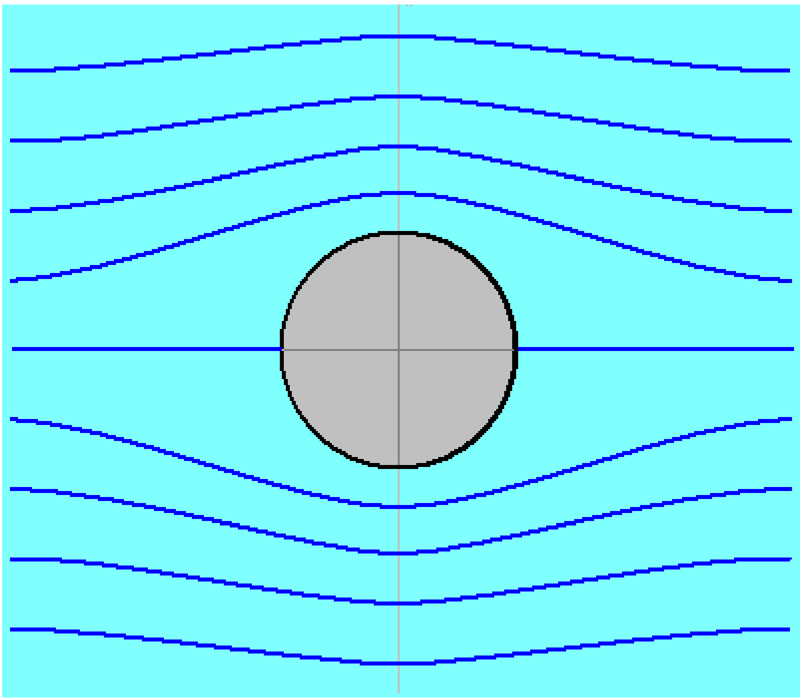
Für $x \to \pm\infty$ geht offensichtlich $v_x \to A$ und $v_y \to 0$, das heißt, die Strömung verläuft im Unendlichen parallel zur X-Achse. Betrachten wir nun die Stromlinie mit $\Psi = 0$. Deren Gleichung ist

$$y\left(A - \frac{B}{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch die Funktionen

$$y = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = \frac{A}{B}.$$

Die erste Gleichung stellt die X-Achse dar, die zweite den Kreis um O mit dem Radius $r = \sqrt{B/A}$. In den Kreis dringen keine Stromlinien ein, denn sowie Ψ auch nur ein wenig von null abweicht, verläuft die dazu gehörige Stromlinie außerhalb des Kreises. Und dort, wo die X-Achse auf den Kreis trifft, ist die Strömungsgeschwindigkeit null. Wir können daher den Kreis durch einen Festkörper ersetzen, ohne dass sich am Strömungsverlauf etwas ändert. Wir haben somit einen ebenen Schnitt durch eine räumliche, ursprünglich parallele Strömung vor uns, in die senkrecht zu den Stromlinien ein Kreiszylinder eingebracht wurde.



4 Wirbel- und Zirkulationsströmungen

4.1 Zirkulation

Unter der Zirkulation Γ eines Feldvektors $\boldsymbol{v}$ längs einer geschlossenen Kurve C versteht man das Linienintegral über diesen Vektor längs der Kurve:

$$\text{Zirkulation } \Gamma = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Nach dem Satz von STOKES besteht zwischen der Zirkulation und der Rotation eines Vektors folgender Zusammenhang:

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}.$$

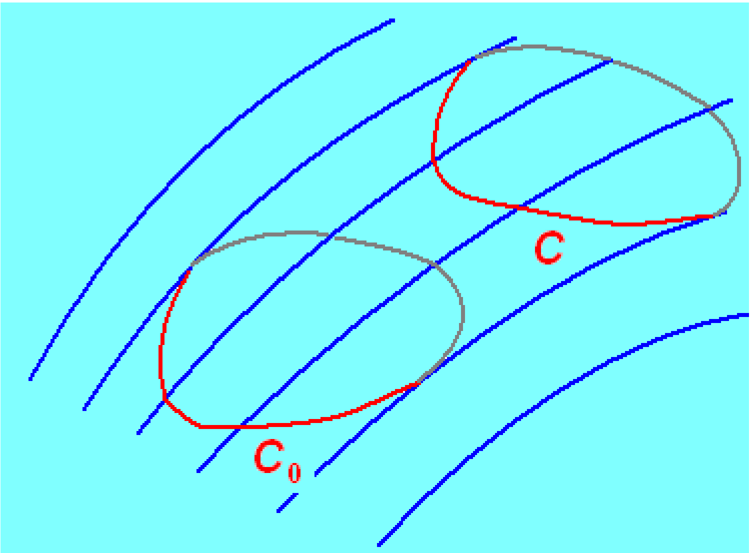
Dabei ist A eine beliebige Fläche, deren Umrandung die Kurve C ist. (Die Fläche A muss jedoch »einfach zusammenhängend« sein, d. h. sie darf nur eine einzige Umrandung haben. Es darf also im Innern kein Flächenstück herausgeschnitten worden sein.) Das Integral über rot $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ heißt Wirbelstärke. Also gilt:

Die Zirkulation des Feldvektors längs einer geschlossenen Kurve ist gleich seiner Wirbelstärke in der von der Kurve umschlossenen Fläche.

4.2 Der Satz von THOMSON über die Erhaltung der Zirkulation

Da die Stromlinien in einer Strömung einander nicht überschneiden, bleiben Flüssigkeitsteilchen, die zu irgendeinem Zeitpunkt t_0 benachbart sind, ständig benachbart, solange die Flüssigkeit nicht zerreißt.

Wir betrachten nun eine geschlossenen Kurve C_0 in einer Strömung, die zur Zeit t_0 aus lauter benachbarten Teilchen gebildet wird, eine so genannte »materielle Kurve«. Zu irgendeiner Zeit t bilden diese Teilchen noch immer eine geschlossene Kurve C, die allerdings eine völlig andere Gestalt als C_0 haben kann.



Der Satz von THOMSON über die Erhaltung der Zirkulation besagt nun, dass

$$\oint_{C_0} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_{C} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{konst.}$$

wenn die wirkenden äußeren Kräfte (das sind i. A. die Gravitationskräfte) ein Potential besitzen.

4.3 Die HELHOLTZ-Wirbelsätze

Wir betrachten nun das Feld des Vektors $\boldsymbol{V}$ = rot $\boldsymbol{v}$, wobei $\boldsymbol{v}$ der Geschwindigkeitsvektor einer Flüssigkeitsströmung ist. Die Feldlinien des Vektors V sind dann die Kurven, deren Tangenten in jedem Punkt die Richtung von rot $\boldsymbol{v}$ haben, also die Richtung der Drehachsen der Flüssigkeitsteilchen.

Diese Feldlinien nennen wir »Wirbellinien«.

Da nach einem Satz der Vektoranalysis stets div rot $\boldsymbol{v} = 0$ ist, gibt es in der Flüssigkeit keine Quellen oder Senken der Wirbellinien, also Stellen, in denen Wirbellinien beginnen oder enden. Die Wirbellinien sind also entweder geschlossene Linien oder sie beginnen oder enden (im Falle einer begrenzten Flüssigkeit) an den Grenzflächen.

Eine schlauchartige Fläche, deren Oberfläche von Wirbellinien gebildet wird, heißt »Wirbelröhre«. Eine Wirbelröhre von so geringem Querschnitt, dass auf ihm rot $\boldsymbol{v}$ als konstant angesehen werden kann, heißt »Wirbelfaden«. Die Wirbelstärke eines Wirbelfadens ist dann einfach das Produkt aus seinem Querschnitt q und dem Betrag von rot $\boldsymbol{v}$.

Die Wirbelstärke eines Wirbelfadens und einer Wirbelröhre ist längs des ganzen Fadens bzw. der Röhre konstant.

Beweis: Da im Innern der Wirbelröhre keine Wirbellinien entstehen oder enden können, auch keine Wirbellinien die Seitenflächen durchdringen oder dort enden, bleibt die Anzahl der Wirbellinien in einer Röhre unverändert.

Außerdem gelten folgende Sätze:

Eine Wirbelröhre besteht immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen.

In einer reibungslosen Flüssigkeit sind die Wirbelstärken der Wirbelröhren auch zeitlich konstant.

4.4 Das BIOT-SAVART-Gesetz der Hydrodynamik

Der durch den Satz von STOKES ausgedrückte Zusammenhang zwischen v und rot v ist nicht nur ein quantitativer, sondern ein »kausaler«: Eine Wirbelröhre e r z e u g t um sich herum ein Strömungsfeld, dessen Zirkulation gleich der Wirbelstärke der Wirbelröhre ist. Ist der Vektor rot v als Funktion des Ortes gegeben, so lässt sich im Prinzip daraus das Strömungsfeld berechnen.

Der einfachste Fall ist das Feld eines einzelnen Wirbelfadens der Wirbelstärke Γ. Hier gilt (wegen rot $\boldsymbol{v}$ = konstant längs des Querschnitts q):

$$\left|\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\right| q = \Gamma.$$

Das Problem ist völlig analog der Berechnung des magnetischen Feldes eines dünnen Leiters, in dem ein Strom I fließt. Hier lautet die entsprechende Gleichung:

$$\left|\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\right| q = I.$$

Für das magnetische Feld aber ist die Lösung bekannt:

$$\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi}\int_s \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3},$$

woraus geschlossen werden kann, dass für den Beitrag d$\boldsymbol{H}$ eines einzelnen Leiterelements d$\boldsymbol{s}$ zur Feldstärke gilt

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

beträgt. Entsprechend gilt dann

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

5 Schallwellen in Flüssigkeiten und Gasen

Bei der Ausbreitung von Schallwellen in Flüssigkeiten und Gasen sind die auftretenden Teilchengeschwindigkeiten und Dichteänderungen so klein, dass alle Produkte dieser Größen vernachlässigt werden können. (Dies gilt nicht für die Ausbreitung von Schockwellen, wie sie z. B. bei Explosionen entstehen.) So kann in der EULER-Gleichung von dem Term (v grad)v abgesehen werden. Auch die Wirkung äußerer Kräfte (Schwerkraft) kann vernachlässigt werden. Damit vereinfacht sich die EULER-Gleichung zu:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \qquad \textbf{(1)}$$

Außerdem benötigen wir die Kontinuitätsgleichung:

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad \textbf{(2)}$$

Nun fehlt uns noch eine Beziehung zwischen p und ρ. Hier bietet sich zunächst wieder das für konstante Temperatur gültige BOYLE-MARIOTTE-Gesetz an, das jedoch zu falschen Ergebnissen führt, so z. B. zu einer Schallgeschwindigkeit in Luft bei 0 °C von ca. 280 m/s. Erst LAPLACE erkannte, dass wegen der Schnelligkeit der Druckschwankungen im Medium kein Temperaturausgleich stattfinden kann und der Vorgang nicht als isotherm, sondern als adiabatisch angesehen werden muss. Das einschlägige Gesetz lautet dann:

$$\frac{p}{p_\mathrm{m}} = \left(\frac{\rho}{\rho_\mathrm{m}}\right)^{\kappa} \qquad \kappa = \frac{c_p}{c_v}.$$

Dabei bedeuten p_m und ρ_m die Mittelwerte von p und ρ. cp und c_v sind die spezifischen Wärmekapazitäten des Gases bei konstantem Druck bzw. konstanter Temperatur. Wir setzen nun

$$\frac{\rho}{\rho_\mathrm{m}} =: 1+\sigma,$$

wobei $1+\sigma = 1+\sigma(x, y, z, t)$ die relative Abweichung der Dichte vom Mittelwert ist. Damit wird

$$\left(\frac{\rho}{\rho_\mathrm{m}}\right)^{\kappa} = (1+\sigma)^{\kappa} \approx 1+\kappa\sigma.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{grad} p \approx p_\mathrm{m}\,\kappa \operatorname{grad}\sigma$$

und mit

$$\rho \approx \rho_\mathrm{m}$$

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \approx \frac{p_\mathrm{m}\,\kappa}{\rho_\mathrm{m}}\operatorname{grad}\sigma.$$

In die vereinfachte hydrodynamische Grundgleichung (1) eingesetzt ergibt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \approx -\frac{p_{\mathrm{m}}\,\kappa}{\rho_{\mathrm{m}}} \operatorname{grad} \sigma \qquad \textbf{(3)}$$

Aus Gleichung (2) wird mit den entsprechenden Vernachlässigungen:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Zur Eliminierung von $\boldsymbol{v}$ wird diese Gleichung nochmals nach t differenziert

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2},$$

und von Gleichung (3) die Divergenz gebildet (die Reihenfolge zeitlicher und örtlicher Ableitungen darf vertauscht werden):

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = -\frac{p_{\mathrm{m}}}{\rho_{\mathrm{m}}} \operatorname{div} \operatorname{grad} \sigma.$$

Also ist

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \sigma \equiv \Delta \sigma = \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{p_{\mathrm{m}} \kappa} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}.$$

Dies ist eine (POISSON-)Differentialgleichung für σ, welches (siehe oben) angibt, um wie viel die relative Abweichung der Dichte vom Mittelwert von 1 differiert. Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist eine sich um O mit der Phasengeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{p_{\mathrm{m}} \kappa}{\rho_{\mathrm{m}}}}$$

ausbreitende Kugelwelle. Die mittlere Dichte ist temperaturabhängig:

$$\rho_{\mathrm{m}} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma \vartheta},$$

wobei ρ_0 die Dichte bei 0 °C, ϑ= die Celsius-Temperatur und γ = 1/273 Grad ist.

Damit ergibt sich schließlich:

$$v = \sqrt{\frac{p_{\mathrm{m}} \kappa (1 + \gamma \vartheta)}{\rho_0}}.$$

Da die Dichte ρ_0 dem mittleren Druck proportional ist, ist die Schallgeschwindigkeit vom Druck unabhängig.

6 Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten

6.1 Einfache lineare Laminarströmung; das HAGEN-POISSEUILLE-Gesetz

Von einer Laminarströmung spricht man, wenn sich die Flüssigkeit in Schichten mit verschiedener Geschwindigkeit unterteilen lässt, die aneinander vorbeigleiten. Infolge der inneren Reibung sucht die schneller fließende Schicht die angrenzende langsamere mitzunehmen und zu beschleunigen.

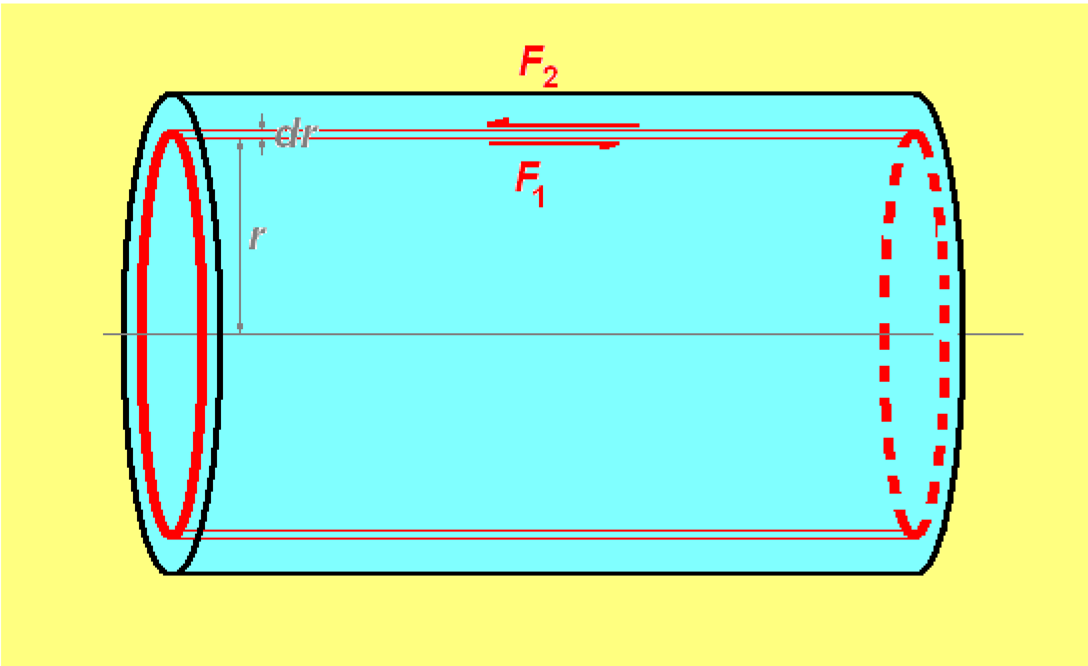
Umgekehrt wirkt die langsamere Schicht auf die schnellere verzögernd, wobei wieder »actio = reactio« ist. Für diese Kräfte hat schon NEWTON eine Annahme gemacht, die sich als richtig erwiesen hat: Jede der beiden Kräfte ist proportional der Größe der Berührungsfläche A und proportional dem Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Strömungsrichtung.

Im einfachsten Fall (lineare Laminarströmung) verläuft die Strömung geradlinig, z. B. parallel der *X*-Achse. Nimmt die Geschwindigkeit v in Richtung der positiven *Z*-Achse zu, so ist der Betrag der (Tangential-) Kraft zwischen zwei benachbarten Schichten

$$F_x = \eta A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}.$$

Der Proportionalitätsfaktor η heißt Zähigkeits- oder Viskositätskoeffizient der Flüssigkeit.

Wir betrachten nun die in Richtung der positiven *X*-Achse gerichtete laminare Strömung in einem Rohr von konstantem kreisförmigem Querschnitt.



Als Volumenelement nehmen wir einen Hohlzylinder der Länge *l* mit den Radien *r* und r + d*r*. Da nach innen benachbarte Schicht hat eine größere Geschwindigkeit und übt daher eine Kraft in Richtung der +*X*-Achse aus:

$$F_1 = -\eta\, l\, 2\pi r \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}. \qquad \textbf{(1)}$$

Durch das Minuszeichen wird berücksichtigt, dass d*v*/d*r* negativ ist , weil die Geschwindigkeit mit zunehmendem *r* abnimmt.

Die außen angrenzende Schicht dagegen ist langsamer und wirkt auf das betrachtete Volumenelement hemmend. Die von ihm ausgeübte Kraft ist

$$F_2 = \eta\, l\, 2\pi (r + \mathrm{d}r)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2}\mathrm{d}r\right), \qquad \textbf{(2)}$$

wobei berücksichtigt wurde, dass sich auf der Strecke d*r* auch das Geschwindigkeitsgefälle geändert hat. Es ist $F_2 < 0$ und dem Betrag nach größer als F_1. Herrscht an einem Ende des Rohres der Druck

p_1, am anderen Ende (d. h. am Ausfluss) der Druck p_0, so ist die Summe der an dem Hohlzylinder angreifenden Druckkräfte unter Berücksichtigung ihrer Richtung $2\pi\ r\ \mathrm{d}r\ (p_1 - p_0)$. Im stationären Zustand dient diese Kraft nur dazu, die Resultierende der Reibungskräfte $F_1 + F_2$ zu kompensieren. Unter Berücksichtigung des Vorzeichens ist also:

$$F_1 + F_2 = -2\pi r\,\mathrm{d}r\left(p_1 - p_0\right) = -2\pi r\,\mathrm{d}r\,\Delta p,$$

Setzt man auf der linken Seite die Werte für F_1 und F_2 aus Gleichung (1) und (2) ein, so erhält man unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\eta l\, 2\pi\,\mathrm{d}r\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} + r\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2}\right) = -2\pi r\,\mathrm{d}r\,\Delta p \quad\Rightarrow\quad \eta l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -r\,\Delta p, \tag{3}$$

weil

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} + r\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right).$$

Gleichung (3) kann leicht integriert werden:

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta p\, r^2}{2\eta l} + C \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta p\, r}{2\eta l} + \frac{C}{r}.$$

Nochmalige Integration liefert:

$$v = -\frac{\Delta p\, r^2}{4\eta l} + C\ln r + D.$$

Bestimmung der Integrationskonstanten:

1. Für $r = 0$ (d. h. in der Achse) muss v endlich bleiben, also muss $C = 0$ sein.

2. Für $r = \mathrm{a}$ (d. h. an der Rohrwand) muss $v = 0$ sein, da die Flüssigkeit erfahrungsgemäß an der Wand haftet. Daraus folgt:

$$D = \frac{\Delta p\, a^2}{4\eta l},$$

und somit

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(a^2 - r^2\right).$$

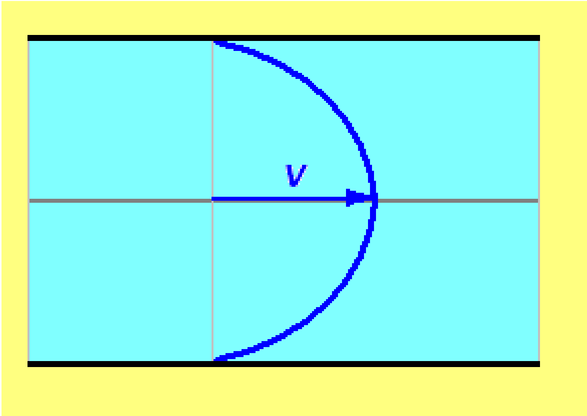
Die Stärke des Stromes durch das betrachtete Volumenelement ist

$$\mathrm{d}I = 2\pi r v\,\mathrm{d}r = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(a^2 - r^2\right)2\pi r\,\mathrm{d}r.$$

Die Integration über den Querschnitt des Rohres ergibt:

$$I = \int_0^a \frac{\pi\Delta p}{2\eta l}\left(a^2 - r^2\right) r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi\Delta p\, a^4}{8\eta l}.$$

Dies ist das HAGEN-POISSEUILLE-Gesetz. Beachtlich ist, dass unter sonst gleichen Bedingungen eine Verdoppelung des Rohrdurchmessers zur 16-fachen Durchflussmenge führt. Erwähnenswert ist noch das »parabolische Geschwindigkeitsprofil« im Rohr:


v