Einführung
in die
Theoretische Physik

7. Teil: Elektrostatik I

Siegfried Petry

Fassung vom 18. Januar 2013

I n h a l t :

1 Elektrische Ladungen 2

2 Das COULOMB-Gesetz 2

3 Die elektrische Feldstärke 3

4 Fluss und Flussdichte des elektrischen Feldvektors *E* 5

5 Das elektrische Feld mehrerer Kugelladungen 7

5.1 Diskrete Ladungen 7

5.2 Kontinuierliche Ladungsverteilung 8

6 Das elektrostatische Potential 12

6.1 Das Potential des Feldes einer Kugelladung 14

6.2 Das Potential des Feldes mehrerer Kugelladungen 15

6.3 Das Potential im Feld einer kugelförmigen Raumladung 15

6.4 Das Potential des Feldes eines unendlich langen geraden Drahtes 17

6.5 Allgemeine Feldgleichungen 17

1 Elektrische Ladungen

In den Atomen aller chemischen Elemente gibt es »Elementarteilchen«, nämlich Protonen und Elektronen, die anziehende oder abstoßende Kräfte aufeinander ausüben. Diese Kräfte werden als »elektrostatische Kräfte«; bezeichnet. Ihre Ursache ist eine besondere Eigenschaft der Protonen und Elektronen, die man »elektrische Ladung« nennt. Es gibt genau zwei Arten von elektrischer Ladung, die man positiv und negativ genannt hat, weil sie einander teilweise oder ganz kompensieren können. Ganz willkürlich und – wie sich später herausgestellt hat – nicht besonders glücklich wurde die Protonenladung als positiv, die Elektronenladung als negativ bezeichnet. Beide Ladungen sind – vom Vorzeichen abgesehen – gleich groß und können einander zu null kompensieren. Da es die kleinsten Ladungen sind, die in der Natur vorkommen, heißen sie Elementarladungen.

Wie man schon mit sehr einfachen Experimenten zeigen kann, stoßen Ladungen mit gleichen Vorzeichen einander ab, während Ladungen mit entgegengesetzten Vorzeichen einander anziehen.

Die so genannte »Erzeugung« größerer elektrischer Ladungsmengen beruht nicht etwa auf der Neuschöpfung elektrischer Ladungen, sondern auf der Trennung der positiven und der negativen Ladungen, die in der Materie ja immer in gleicher Menge vorhanden sind. Diese Trennung kann z. B. durch intensive Berührung zweier verschiedenartiger Körper geschehen (so genannte Reibungselektrizität) – die älteste und einfachste Form der Ladungstrennung.

Die SI-Einheit der elektrischen Ladung (oder Elektrizitätsmenge) ist das Coulomb (C). 1 Coulomb = 1 Amperesekunde (As).

Reibt man einen Stab aus Glas oder Kunststoff mit einem Stück Stoff, so fließen Elektronen entweder vom Stab auf den Stoff oder umgekehrt. (Die positiv geladenen Protonen befinden sich in den Atomkernen und können diese nicht verlassen.) Dementsprechend hat der Stab dann ein Defizit oder einen Überschuss an negativen elektrischen Ladungen und ist positiv oder negativ »geladen«. Durch Berührung des Stabes mit einer isoliert aufgehängten Metallkugel kann diese ebenfalls positiv oder negativ aufgeladen werden. Wegen der gegenseitigen Abstoßung befindet sich das Defizit bzw. der Überschuss an Elektronen unmittelbar an der Oberfläche der Kugel, und zwar wegen der Symmetrie der Kugel gleichmäßig verteilt. (Bei einem anderen, weniger regelmäßig geformten Körper ist die Verteilung ungleichmäßig, aber auch dann befinden sich die Ladungen nur an der Oberfläche. Man kann daher für diese Versuche anstelle von Massivkörpern auch metallische oder dünn metallisierte Hohlkörper benutzen.) Nähert man zwei derart geladene Kugeln einander an, so wird die Gleichmäßigkeit der Ladungsverteilung durch die Kräfte zwischen den Ladungen sofort zerstört. Es ist dann schwer, den Abstand der beiden »Kugelladungen« richtig zu bestimmen. Zu diesem Zweck müsste man die Kugeln möglichst klein machen, aber das wiederum schränkt die Größe der Ladungen ein, weil bei größerer Ladungsdichte eine »Sprühentladung« einsetzt (»Sankt-Elms-Feuer«). Daher hatte COULOMB bei seinen Bemühungen, das Gesetz für die Kraft zwischen zwei Ladungen zu bestimmen, große Schwierigkeiten.

2 Das COULOMB-Gesetz

So wurde denn das Grundgesetz der Elektrostatik 1785 von COULOMB eher erraten und behauptet als experimentell bestätigt. Es besagt, dass die Kraft zwischen zwei elektrischen »Punktladungen« (eigentlich: Ladungen auf hinreichend kleinen kugelförmigen Körpern) Q_1 und Q_2 proportional dem Produkt der beiden Ladungen und umgekehrt proportional dem Quadrat ihres Abstandes r ist. (Als Abstand gilt angenähert der Abstand der Kugelmittelpunkte.)

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Das COULOMB-Gesetz entspricht somit formal genau dem Gravitationsgesetz.

Die Kraft hat die Richtung der Verbindungsgeraden der beiden Ladungen, ist also eine so genannte »Zentralkraft«. Legt man die Ladung Q_1 in den Ursprung O eines Koordinatensystems und bezeichnet den Ortsvektor von Q_2 mit $\boldsymbol{r}$, so kann man das COULOMB-Gesetz als Vektorgleichung wie folgt schreiben. (Dabei ist $\boldsymbol{F}_2$ die Kraft auf Q_2.)

$$\boldsymbol{F}_2 = k\frac{Q_1 Q_2}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Für die Kraft $\boldsymbol{F}_1$ gilt wegen »actio = reactio« :

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2.$$

Ist das Produkt Q_1Q_2 negativ (d. h. ist genau eine der beiden Ladungen negativ), ist $\boldsymbol{F}_2$ auf Q_1 hin gerichtet.

3 Die elektrische Feldstärke

Der elektrischen Feldtheorie liegt die Vorstellung zugrunde, dass jede elektrische Ladung den Raum in ihrer Umgebung verändert, indem sie ein »elektrisches Feld« um sich herum aufbaut. Worin die Veränderung des Raumes dabei besteht, ist noch immer ein Geheimnis. Wir können lediglich sagen: Ein elektrisches Feld ist ein Raum, in dem eine elektrische Ladung eine Kraft erfährt. Das Feld wird beschrieben durch den Vektor $\boldsymbol{E}$ der elektrischen Feldstärke.

Definition: Die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$ in einem Punkt des Raumes ist der Quotient aus der Kraft $\boldsymbol{F}$, die eine »Probeladung« q in diesem Punkt erfährt und dieser Ladung:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}.$$

Für $q > 0$ haben $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{F}$ dieselbe Richtung, für $q < 0$ die entgegengesetzte.

Aus dem COULOMB-Gesetz ergibt sich mit $Q_1 = Q$ und $Q_2 = q$ für die Feldstärke im Feld einer »Punktladung« Q:

$$\boldsymbol{E} = k\frac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}.$$

Aus historischen Gründen wird der Proportionalitätsfaktor k in der Form

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

geschrieben.

Die Konstante ε_0 = 8,85419 10^{-12} As/Vm heißt elektrische Feldkonstante. Die Einheit der elektrischen Feldstärke ist das Newton/Coulomb = Volt/Meter (N/C = V/m).

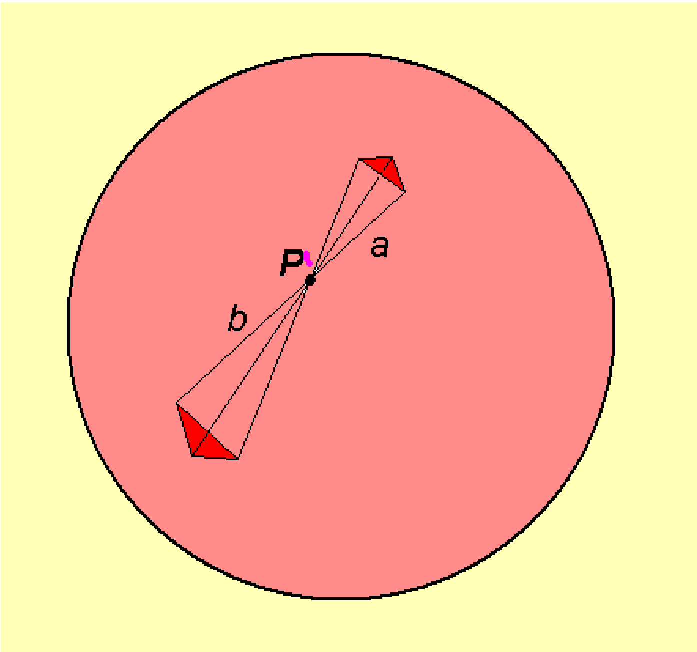
Im COULOMB-Gesetz und in der Gleichung für die Feldstärke einer Kugelladung taucht der Radius R der Kugel, auf der die Ladung gleichmäßig verteilt ist, nicht auf. Er hat also keinen Einfluss auf das Feld, außer dass dieses an der Oberfläche der Kugel, also im Abstand R vom Mittelpunkt, beginnt oder endet. Man kann theoretisch (!) den Radius der Kugel beliebig klein machen und so zu dem Ergebnis kommen:

Außerhalb einer Kugel, auf der eine Ladung Q gleichmäßig verteilt ist, verhält sich das Feld so, als ob die gesamte Ladung im Mittelpunkt der Kugel vereinigt wäre. Erhebliche Abweichungen treten auf, wenn in der Nachbarschaft eine andere Ladung vorhanden ist.

Daher können »Punktladungen«, die es ja nicht gibt, annähernd durch »Kugelladungen« ersetzt werden.

Das oben beschriebene Gesetz für die Feldstärke gilt nur für den Raum außerhalb der Kugel, welche die Ladung trägt. Im Innern der Kugel ist der Raum feldfrei. Begründung: Betrachten wir zunächst eine massive geladene Metallkugel. Wäre im Inneren ein elektrisches Feld vorhanden, dann würde dort auf die freien Elektronen des Metalls Kräfte ausgeübt und die Elektronen bewegt. Dies würde Wärme erzeugen, für deren Energie es keine Quelle gäbe. (Widerspruch zum Energiesatz.) Also ordnen sich die Elektronen so an, dass im Inneren kein Feld vorhanden ist. Dann kann man aber auch das Innere der Kugel aushöhlen, ohne dass sich an der Ladungsverteilung etwas ändern würde. Folglich existiert im Inneren auch dann kein Feld, wenn die Kugel hohl ist.

Es gibt aber auch noch einen anderen Beweis, der dann auch dazu dienen kann, das COULOMB-Gesetz zu verifizieren. Betrachten wir einen beliebigen Punkt P im Inneren der Hohlkugel. Drei eng beisammen liegende Gerade durch diesen Punkt bilden zusammen mit zwei Teilen der Kugelfläche zwei schlanke Tetraeder.



Man denke sich nun die Grundflächen der beiden Tetraeder auf (fast) einen Punkt hin schrumpfend. Dann wirken in P praktisch zwei elektrische Kräfte und zwei elektrische Felder in entgegengesetzter Richtung. Die Ladungen auf den beiden Flächen verhalten sich dabei stets wie a^2 / b^2, die Quadrate der Abstände der Ladungen zu P (= Höhen der Tetraeder) ebenfalls. Folglich sind die Kräfte und die Feldstärken in P entgegengesetzt gleich. Denkt man sich die ganze Kugel derart in ähnliche Tetraeder zerlegt, so erkennt man, dass die gesamte Feldstärke in P gleich null sein muss.

Elektrische Felder können durch Feldlinien anschaulich gemacht werden. Das sind Linien, deren Tangenten in jedem Punkt die Richtung der Kraft haben, die eine positive Ladung dort erfahren würde. So sind die Feldlinien einer positiven Punktladung radial nach außen gerichtet, die Feldlinien einer negativen Ladung radial nach innen. Die elektrischen Feldlinien gehen also von positiven Ladungen (»Quellen«) aus und enden in negativen Ladungen (»Senken«).

Wie man am Feld einer Punktladung erkennen kann, ist die Flächendichte der Feldlinien proportional der Feldstärke.

Die Darstellung des elektrischen Feldes durch Feldlinien ist zwar recht anschaulich und einprägsam, hat aber einen gravierenden Mangel: Einerseits muss man annehmen, dass durch jeden Punkt eines Feldes eine Feldlinie geht. Die Flächendichte der Feldlinien wäre dann unendlich. Andererseits aber laufen die Feldlinien einer Kugelladung nach außen immer weiter auseinander, und ihre Flächendichte nimmt ab. Dieser Widerspruch bleibt unauflösbar. Darum wird für strenge Untersuchungen das Feldlinienkonzept durch eine andere Betrachtungsweise ergänzt, die im Folgenden vorgestellt wird.

4 Fluss und Flussdichte des elektrischen Feldvektors $\boldsymbol{E}$

Betrachten wir zunächst ein homogenes Feld. Hier ist der Feldvektor $\boldsymbol{E}$ unabhängig vom Ort. In einem solchen Feld liege ein ebenes Flächenstück vom Größenwert ΔA, das auf dem Feldvektor senkrecht steht. Sein Flächenvektor $\Delta\boldsymbol{A}$ sei also parallel zum Feldvektor $\boldsymbol{E}$ und außerdem von gleicher Orientierung. Dann bezeichnet man das Produkt aus dem Betrag E der Feldstärke und dem Größenwert ΔA der Fläche als den **elektrischen Fluss** $\Delta\Psi$ oder genauer als den Fluss des elektrischen Feldvektors durch die Fläche:

$$\Delta\Psi = E \cdot \Delta A.$$

Eine nützliche Analogie dazu ist der Fluss $v{\cdot}\Delta A$ einer Flüssigkeits- oder Gas-Strömung mit dem Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ durch das Flächenstück ΔA. Die Dimension dieses Flusses ist Geschwindigdigkeit mal Fläche = Volumen/Zeit. Die Dimension des elektrischen Flusses ist Feldstärke mal Fläche.

Der auf die (senkrecht zum Feld stehende) Fläche bezogene Fluss, also der Quotient $\Delta\Psi$ / ΔA heißt »Flussdichte« des Feldvektors. Die Flussdichte ist gleich dem Betrag der Feldstärke.

$$\text{Flussdichte } \frac{\Delta\Psi}{\Delta A} = E.$$

In einem inhomogenen Feld gilt

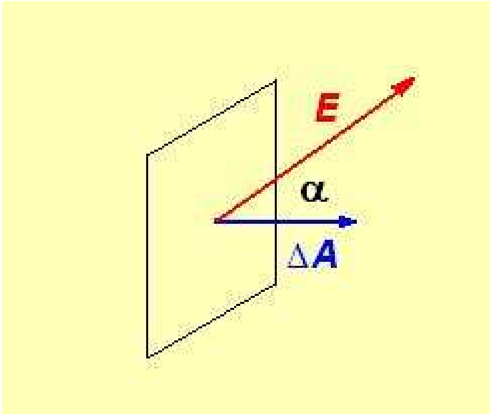
$$\text{Flussdichte} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta A} = E \qquad \Delta\boldsymbol{A} \uparrow\uparrow \boldsymbol{E}$$

Bildet der Feldvektor $\boldsymbol{E}$ mit dem Flächenvektor $\Delta\boldsymbol{A}$ den Winkel α, so ist der Fluss durch die Fläche

$$\Delta\Psi = E\,\Delta A \cos\alpha$$

Der Term auf der rechten Seite ist das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{E}$ und $\Delta\boldsymbol{A}$, also ist

$$\Delta\Psi = \boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{A}.$$



Für $\alpha = 90°$ ist $\Delta\Psi = 0$, für $90° < \alpha < 270°$ ist $\Delta\Psi < 0$.

Im inhomogenen Feld gilt für den Fluss durch ein hinreichend kleines Flächenstück

$$\Delta\Psi \approx \boldsymbol{E}_m \, \Delta\boldsymbol{A},$$

wobei $\boldsymbol{E}_m$ die Feldstärke in der Mitte des Flächenstücks ist. Für eine beliebig große Fläche A ergibt sich daraus nach Zerlegung der Fläche in hinreichend kleine Teile:

$$\Psi_A = \sum_A \Delta\Psi \approx \sum_A \boldsymbol{E}\,\Delta\boldsymbol{A}.$$

Für alle $\Delta\boldsymbol{A}$ gegen 0 wird daraus

$$\Psi_A = \lim_{\Delta\boldsymbol{A}\to 0} \sum_A \boldsymbol{E}\,\Delta\boldsymbol{A} = \int_A \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}.$$

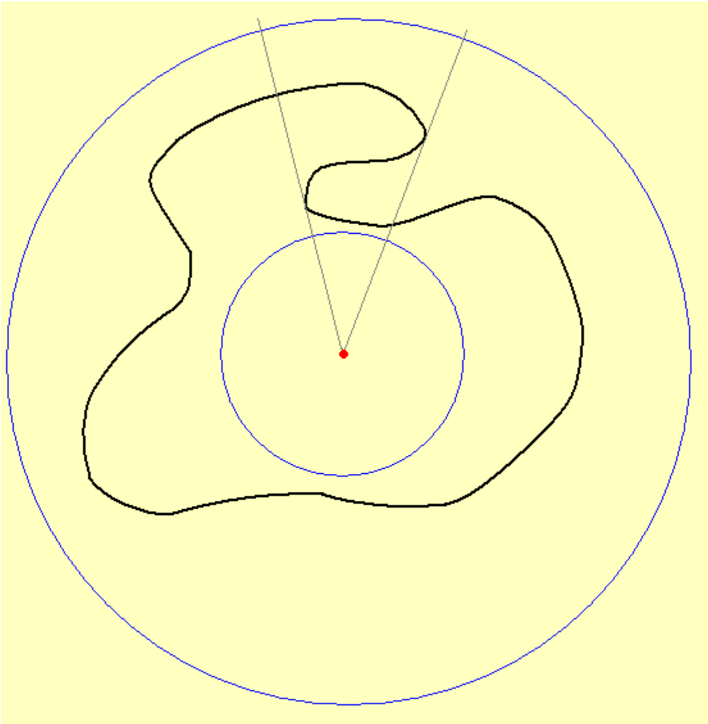
Wir untersuchen nun den Fluss des Feldes einer Kugelladung Q. Als Fläche A benutzen wir eine mit der Ladung konzentrische Kugelfläche vom Radius r. Der Feldvektor $\boldsymbol{E}$ steht überall auf dieser Fläche senkrecht. Außerdem ist sein Betrag dort konstant:

$$E = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}.$$

Weil die Vektoren $\boldsymbol{E}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ parallel sind, ist ihr Skalarprodukt gleich dem Produkt ihrer Beträge. Somit wird:

$$\Psi_A = \int_A \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_A E\,\mathrm{d}A = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}\int_A \mathrm{d}A = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}4\pi\, r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

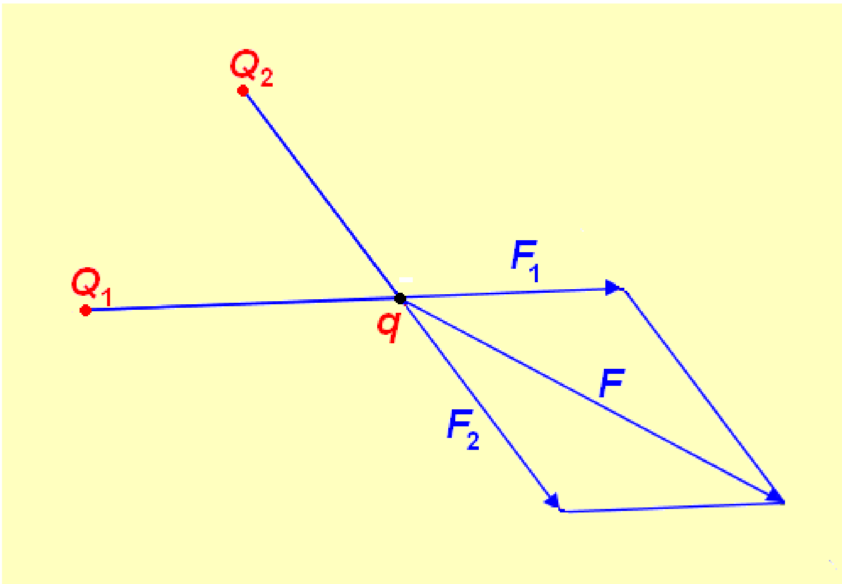
Dieses Ergebnis ist von der Gestalt der »Hüllfläche« unabhängig und gilt für jede die Ladung einhüllende geschlossene Fläche. Dies wird spätestens dann erkennbar, wenn man sich um die Ladung zwei (in der Abbildung blaue) Kugeln gelegt denkt, von denen eine ganz innerhalb der (schwarzen) Hüllfläche liegt und die andere diese ganz umschließt. Der Fluss durch die beiden blauen Kugeln ist gleich groß. Also muss er in gleicher Größe auch durch alle Flächen gehen, die dazwischen liegen. Dies gilt selbst dann, wenn die unregelmäßige Fläche in einzelnen Bereichen nach innen gekrümmt ist. (Man bedenke, dass die Flächennormale in einem Teil der Fläche mit dem Feldstärkevektor einen stumpfen Winkel bildet und das Skalarprodukt negativ ist.)



5 Das elektrische Feld mehrerer Kugelladungen

5.1 Diskrete Ladungen

Wie Messungen zeigen, erfährt eine Ladung q im Feld zweier Kugelladungen Q_1 und Q_2 eine Kraft $\boldsymbol{F}$, die gleich der Vektorsumme der beiden Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ ist, welche die beiden Ladungen Q_1 und Q_2 einzeln auf die Ladung q ausüben.



$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2.$$

Durch Division mit q erhält man daraus:

$$\frac{\boldsymbol{F}}{q} = \frac{\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2}{q} = \frac{\boldsymbol{F}_1}{q} + \frac{\boldsymbol{F}_2}{q} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2.$$

Bei der Überlagerung der beiden Felder addieren sich die Feldstärken wie Vektoren.

Für den Fluss Ψ_A des Gesamtfeldes durch eine Fläche A ergibt sich daraus:

$$\Psi_A = \int_A \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_A (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_A \boldsymbol{E}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \int_A \boldsymbol{E}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \Psi_{1,A} + \Psi_{2,A}.$$

Die Flüsse der beiden Feldvektoren summieren sich also skalar.

Schließt man die beiden felderzeugenden Ladungen Q_1 und Q_2 durch eine gemeinsame Hüllfläche H ein, so gilt für den Fluss durch diese Fläche:

$$\Psi_H = \Psi_{1,H} + \Psi_{2,H} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} + \frac{Q_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}.$$

Also gilt: Der Fluss des Feldvektors $\boldsymbol{E}$ durch eine Hüllfläche um die beiden Ladungen ist gleich der Summe dieser Ladungen dividiert durch ε_0.

Die gefundenen Gesetze für die Feldstärke und für den Fluss des elektrischen Feldvektors durch eine Fläche bzw. eine Hüllfläche lassen sich für beliebig viele Ladungen verallgemeinern:

$$\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_i, \qquad \Psi_A = \sum \Psi_{i,A}, \qquad \Psi_H = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum Q_i.$$

5.2 Kontinuierliche Ladungsverteilung

In einem Raumstück sei eine elektrische Ladung kontinuierlich – wenn auch nicht unbedingt gleichmäßig – verteilt. Man spricht dann von einer »Raumladung«. (Da elektrische Ladungen aus einzelnen Protonen und Elektronen bestehen, ist eine kontinuierliche Ladungsverteilung streng genommen nicht möglich: die Ladung ist »körnig«. Da aber die »Körner« und ihre Abstände sehr klein sind, kann man fast immer eine kontinuierliche Ladungsverteilung annehmen.)

Befindet sich in einem Teil des Raumes mit dem Volumen ΔV die Ladung ΔQ, so ist die mittlere Raumladungsdichte in diesem Teil

$$\rho_m = \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

Für ΔV gegen null ergibt sich daraus die Raumladungsdichte im Punkt P, auf den hin ΔV geschrumpft ist:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}.$$

Umgekehrt gilt für die in einem Raumstück vom Volumen V befindliche Ladung

$$Q_V = \int_V \mathrm{d}Q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V.$$

Betrachten wir nun eine das Raumstück umfassende Hüllfläche H. Der durch diese Hüllfläche tretende Fluss des Feldvektors $\boldsymbol{E}$ ist

$$\Psi_H = \frac{Q_V}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho\,\mathrm{d}V.$$

Andererseits ist

$$\Psi_H = \int_H \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A},$$

und somit

$$\int_H \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V.$$

Der Fluss des elektrischen Feldvektors durch eine geschlossene Hülle ist gleich der Summe der in der Hülle vorhandenen elektrischen Ladungen dividiert durch die elektrische Feldkonstante ε_0. (»Durchflutungsgesetz der Elektrostatik«)

Nach dem Integralsatz von GAUSS ist

$$\int_H \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V.$$

Er besagt Folgendes: Der Fluss eines Feldvektors durch eine Hüllfläche *H*, die ein Raumstück vom Volumen *V* umschließt, ist gleich der Summe der Ergiebigkeiten aller in der Hüllfläche liegenden Quellen und Senken. Bei kontinuierlicher Verteilung der Quellen und Senken im Raum ist die Summe der Ergiebigkeiten das Volumenintegral der so genannten Divergenz (= Quelldichte) des Feldvektors. (Siehe dazu Vektoranalysis, Teil III)

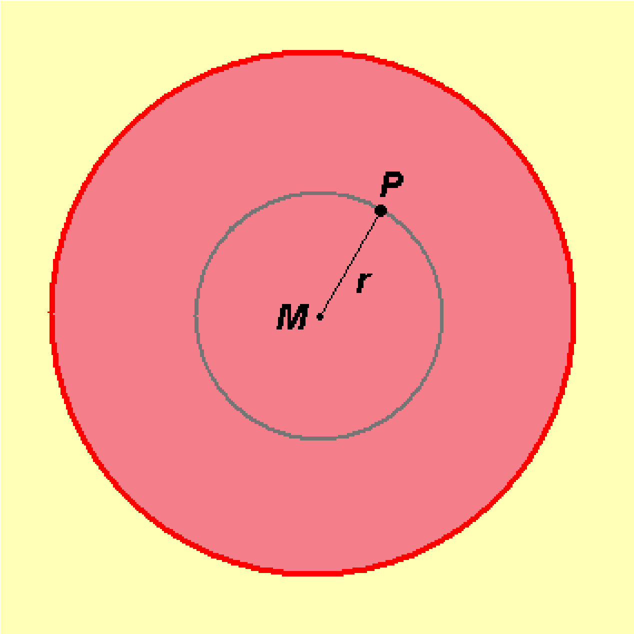
Der Vergleich der beiden oben stehenden Gleichungen ergibt:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Das bedeutet: **Die Quelldichte (Divergenz) des elektrischen Feldvektors in einem Punkt ist gleich der Raumladungsdichte in diesem Punkt dividiert durch die elektrische Feldkonstante.**

Beispiel:

Gegeben sei eine kugelförmige »Raumladungswolke« vom Radius *R* mit der konstanten Raumladungsdichte ρ sowie ein beliebiger Punkt im Abstand *r* vom Mittelpunkt *M*.



Erste Betrachtungsweise:

Auf Grund der bisher erworbenen Kenntnisse können wir sagen:

1. Liegt P außerhalb der Kugel (dann ist $r > R$), so verhält sich das Feld in P so, also ob die gesamte Ladung in M vereinigt wäre. Es ist also

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \qquad \rho = \text{ Raumladungsdichte}$$

2. Liegt P innerhalb der Kugel (dann ist $r < R$), so gilt:

a) Die Ladung in der Kugelschale mit den Radien r und R, auf deren inneren Fläche P liegt, erzeugt in P kein Feld.

b) Die Ladung der Kugel mit dem Radius r, auf deren Oberfläche der Punkt P liegt, erzeugt in P dasselbe Feld, als wenn die ganze Ladung dieser Kugel im M vereinigt wäre. Also ist

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Zweite Betrachtungsweise:

1. Liegt P außerhalb der Kugel, so ist der Fluss des Feldvektors $\boldsymbol{E}$ durch eine kugelförmige Hüllfläche H durch P:

$$\Psi_H = \int_H \boldsymbol{E}_1 \, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = E_1 \int_H \mathrm{d}A = E_1 4\pi r^2.$$

Andererseits ist

$$\Psi_H = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{\varepsilon_0}.$$

Ein Vergleich ergibt

$$E_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

2. Liegt P innerhalb der Kugel, dann ist der Fluss durch eine kugelförmige Hüllfläche durch P einerseits

$$\Psi_H = E_2 4\pi r^2$$

und andererseits

$$\Psi_H = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{\varepsilon_0},$$

woraus sich durch Vergleich ergibt

$$E_2 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Als Vektorgleichungen geschrieben:

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}.$$

Wir berechnen noch für beide Feldvektoren die Divergenz. Es ist

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Aus

$$\boldsymbol{E}_1 = c\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = c\,\frac{x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{mit} \quad c = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$$

folgt

$$E_x = c\,\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{usw.}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} &= c\,\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - x\,\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}\,2\,x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}\\ &= c\,\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3},\end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = c\,\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = c\,\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}_1 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Im Inneren der Kugel ist die Feldstärke

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\boldsymbol{r} = c\left(x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2 + z\,\boldsymbol{e}_3\right)$$

und

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = c,$$

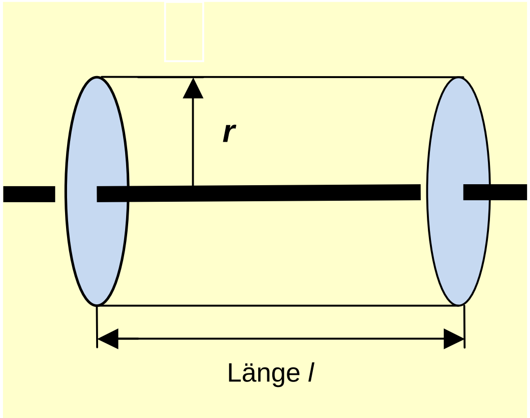
woraus folgt

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}_2 = 3c = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Diese Resultate entsprechen genau unseren Erwartungen.

Das nächste Beispiel zeigt, wie mit dem »Durchflutungsgesetz der Elektrostatik« **das Feld eines unendlich langen geraden elektrisch geladenen Drahtes** berechnet werden kann: Die Ladungen befinden sich auf der Oberfläche des Drahtes, und wegen der Gleichberechtigung aller Teile des Drahtes muss die längenbezogene Ladung $\lambda = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}l$ überall gleich sein. Aus dem gleichen

Grund müssen die Feldlinien radial nach außen verlaufen und das Feld »zylindersymmetrisch« sein. Zur Berechnung der Feldstärke in einemPunkt *P* im Abstand *r* von der Leiterachse betrachten wir einen mit dem Leiter koaxialen Zylinder der Länge *l*, dessen Mantelfläche durch *P* geht.



Der Fluss des Feldvektors $\boldsymbol{E}$ durch die Mantelfläche ist

$$\Psi = E\,2\pi\,r\,l;$$

die von dem Zylinder eingeschlossene Ladung ist

$$Q = \lambda\,l.$$

Wegen $\Psi = Q/\varepsilon_0$ ist

$$E\,2\pi\,r\,l = \frac{\lambda\,l}{\varepsilon_0}, \text{ woraus folgt: } E = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r}.$$

6 Das elektrostatische Potential

Im elektrostatischen Feld (das ist das Feld unbewegter Ladungen) gelten folgende Gesetze:

1. Es gibt im elektrostatischen Feld auch bei beliebiger Ladungsverteilung keine geschlossenen Feldlinien.
Beweis: Gäbe es im Feld eine geschlossene Feldlinie, so könnte eine elektrische Ladung unter der Wirkung der elektrischen Kraft beliebig oft darauf umhergeführt und dabei Arbeit gewonnen werden, ohne dass dafür an einer anderen Stelle Arbeit aufgewendet werden müsste. Dies wäre ein Verstoß gegen den Energieerhaltungssatz.

2. Die Arbeit *W*, die aufzuwenden ist, wenn in einem elektrostatischen Feld eine Ladung *q* von einem Punkt P_1 zu einem anderen Punkt P_2 bewegt wird, ist vom Weg unabhängig.
Beweis: Wenn dies nicht so wäre, so könnte man mit einer Ladung *q* einen geschlossenen Umlauf $P_1 - P_2 - P_1$ machen und dabei durch geschickte Wahl der Wege Arbeit gewinnen.

Die Arbeit, die bei Bewegung einer Ladung *q* in einem elektrischen Feld von P_1 nach P_2 aufzuwenden ist, beträgt

$$W_{P_1P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}W = \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}, \qquad \textbf{(6.1)}$$

wobei $\boldsymbol{F}$ die aufzuwendende Kraft ist, die der vom Feld auf die Ladung q wirkende Feldkraft *entgegengesetzt* gleich ist, und d$\boldsymbol{s}$ das Differential des Verschiebungsvektors ist. Für $q > 0$ ist daher $\boldsymbol{F} = -q\,\boldsymbol{E}$ und

$$W_{P_1 P_2} = -q \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -q \int_{P_1}^{P_2} E\,\mathrm{d}s \cos\varphi, \qquad \textbf{(6.2)}$$

wobei φ der von $\boldsymbol{E}$ und d$\boldsymbol{s}$ eingeschlossene Winkel ist.

Berechnet man das Arbeitsintegral über einen geschlossenen Weg, so ist $W = 0$ und daher stets

$$\oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0.$$

3. Da der Wert des Arbeitsintegrals vom Weg zwischen P_1 und P_2 unabhängig ist, ist auch die Arbeit W_P, die aufzuwenden ist, um eine Ladung q aus dem Unendlichen (praktisch: aus sehr großer Entfernung) zu einem Punkt P zu bringen, vom Weg unabhängig. Diese Arbeit hängt also nur von q und von der Lage des Punktes P ab. Sie ist proportional zu q, weil die Kraft auf die Ladung an jeder Stelle proportional zu q ist. Der Quotient W/q hängt dann nur noch von der Lage des Punktes P ab, ist also allein eine Funktion des Ortes und wird das (elektrostatische) Potential φ_P des Punktes P genannt.

$$\text{Potential } \varphi_P \overset{\text{Def}}{=} \frac{W_P}{q}. \qquad \textbf{(6.3)}$$

Das elektrostatische Potential eines Punktes in einem elektrischen Feld ist also die ladungsbezogene Arbeit, die aufzuwenden ist, um eine Ladung aus dem Unendlichen zu diesem Punkt zu bringen.

Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, dass W_P eine reelle Zahl und somit endlich groß ist. (Dass dies nicht immer der Fall sein muss, wird unten an einem Beispiel gezeigt.)

Wandert der Punkt P ins Unendliche, wird die aufzuwendende Arbeit immer kleiner und geht gegen 0. Daraus folgt, dass das Potential im Unendlichen gleich 0 ist.

Mit Gleichung (6.2) folgt aus (6.3)

$$\varphi_P = -\int_{\infty}^{P} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{\infty}^{P} E\,\mathrm{d}s \cos\varphi. \qquad \textbf{(6.4)}$$

Im Feld einer positiven Ladung ist das Potential positiv, im Feld einer negativen Ladung negativ.

Die SI-Einheit des elektrischen Potentials ist das Volt (V). 1 V = 1 Nm/As.

Übung: Beweisen Sie: Um eine Ladung Q von einem Punkt mit dem Potential φ_1 zu einem Punkt mit dem Potential φ_2 zu bringen, ist die Arbeit

$$W_{1,2} = Q\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = Q\,\Delta\varphi_{2,1}$$

aufzuwenden.

Die Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$ der Potentiale zweier Punkte heißt (elektrische) Spannung $U_{2,1}$ (zwischen den Punkten):

$$U_{2,1} = \Delta\varphi_{2,1} = \varphi_2 - \varphi_1.$$

6.1 Das Potential des Feldes einer Kugelladung

Es soll nun das Potential eines Punktes P im Abstand r_P von einer positiven Kugelladung Q berechnet werden. Dazu berechnen wir zunächst die Arbeit W, die nötig ist, um eine positive Ladung q aus dem Unendlichen nach P zu bringen. Da diese Arbeit vom Weg unabhängig ist, machen wir es uns bequem und bewegen die Ladung aus dem Unendlichen radial auf Q zu. Dann hat die aufzuwendende Kraft $\boldsymbol{F}$ stets dieselbe Richtung wie der Weg und es wird daher:

$$W_P = \int_\infty^P \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_\infty^P F\,\mathrm{d}s = \frac{Q\,q}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_\infty^P \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}s. \tag{6.5}$$

Da r und s entgegengesetzt gerichtet sind, ist ds = – dr und daher

$$W_P = -\frac{Q\,q}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_\infty^P \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = -\frac{Q\,q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left|-\frac{1}{r}\right|_\infty^{r_P} = \frac{Q\,q}{4\pi\,\varepsilon_0\,r_P}.$$

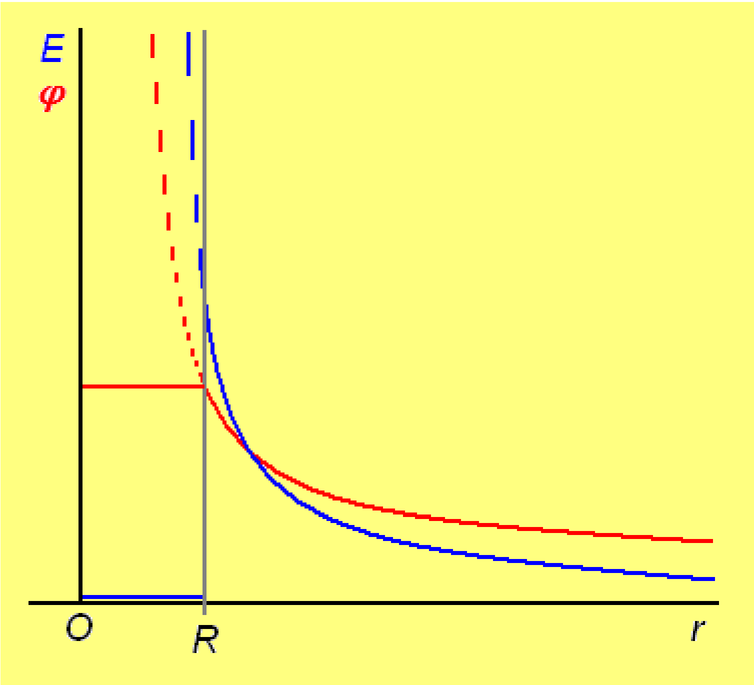
Folglich ist

$$\varphi_P = \frac{W_P}{q} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0\,r_P}. \tag{6.6}$$

Wie man erkennen kann, bleibt die gesamte Rechnung auch für $Q < 0$ gültig, lediglich wird dann auch $W < 0$ und somit auch $\varphi < 0$.

Das Potential des Feldes hat demnach das gleiche Vorzeichen wie die felderzeugende Ladung.

Da im Innern einer geladenen Kugelfläche die Feldstärke null ist, ist das Potential konstant: zum Bewegen einer Ladung ist keine Kraft und daher auch keine Arbeit erforderlich.



Feldstärke und Potential einer geladenen Kugelfläche

Wir berechnen nun noch den Gradienten des Potentials in diesem Feld. Es ist

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_3.$$

Die partiellen Ableitungen von φ nach x, y und z werden nach der Kettenregel berechnet:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x},\qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial r}{\partial x}$ findet man am bequemsten so:

$$r^2=x^2+y^2+z^2 \quad\Rightarrow\quad 2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}.$$

So erhält man

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{x}{r},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{y}{r},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{z}{r},$$

und daraus

$$\mathrm{grad}\,\varphi=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3\right)=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{E}.$$

Das bedeutet: Die Steigung des Potentials ist am größten in der Richtung, die dem Feldstärkevektor entgegengesetzt ist. Der Größenwert der größten Steigung ist gleich dem Betrag der Feldstärke.

Diese wichtige, unmittelbar einleuchtende Beziehung gilt in jedem beliebigen Potentialfeld. (Siehe unten: Potential und Feldstärke in einem beliebigen Feld.)

6.2 Das Potential des Feldes mehrerer Kugelladungen

Wie oben schon ausgeführt, addieren sich die Feldstärken diskreter Kugelladungen vektoriell:

$$\boldsymbol{E}=\sum\boldsymbol{E}_i.$$

Bewegt man in einem solchen Feld eine Probeladung aus sehr großer (unendlicher) Entfernung zu einem Punkt P, so muss dabei die vom Ort abhängige Kraft $\boldsymbol{F} = -q\,\boldsymbol{E}$ aufgewendet werden. Die aufzuwendende Arbeit ist daher

$$W_P=-q\int_\infty^P\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-q\int_\infty^P\left(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\ldots+\boldsymbol{E}_n\right)\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-q\int_\infty^P\boldsymbol{E}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}-\ldots-q\int_\infty^P\boldsymbol{E}_n\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$
$$=W_{1,P}+W_{2,P}+\ldots+W_{n,P}.$$

Durch Division mit q erhält man daraus

$$\frac{W_P}{q}=\frac{W_{1,P}}{q}+\frac{W_{2,P}}{q}+\ldots+\frac{W_{n,P}}{q}\quad\text{oder}\quad \varphi_P=\varphi_{1,P}+\varphi_{2,P}+\ldots+\varphi_{n,P}.$$

Das Gesamtpotential ist die Summe der Potentiale der einzelnen Felder.

6.3 Das Potential im Feld einer kugelförmigen Raumladung

Die Feldstärke dieses Feldes wurde schon im Beispiel des Kapitels 5.2 Kontinuierliche Ladungsverteilung berechnet.

Im Außenraum verhält sich das Feld wie das einer Kugel- oder Punktladung. Dort ist

$$E_1=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Für das Potential gilt dann entsprechend

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}.$$

An der Oberfläche der kugelförmigen Raumladung ist dann mit $r = R$

$$\varphi_R = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}.$$

Im Innenraum ($r < R$) kommt zu diesem Potential noch die ladungsbezogene Arbeit hinzu, die auf dem Weg zwischen R bis r aufzubringen ist. Es ist also

$$\varphi_r = \varphi_R + \int_R^r \boldsymbol{E}_2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

wobei (siehe Kapitel 5.2)

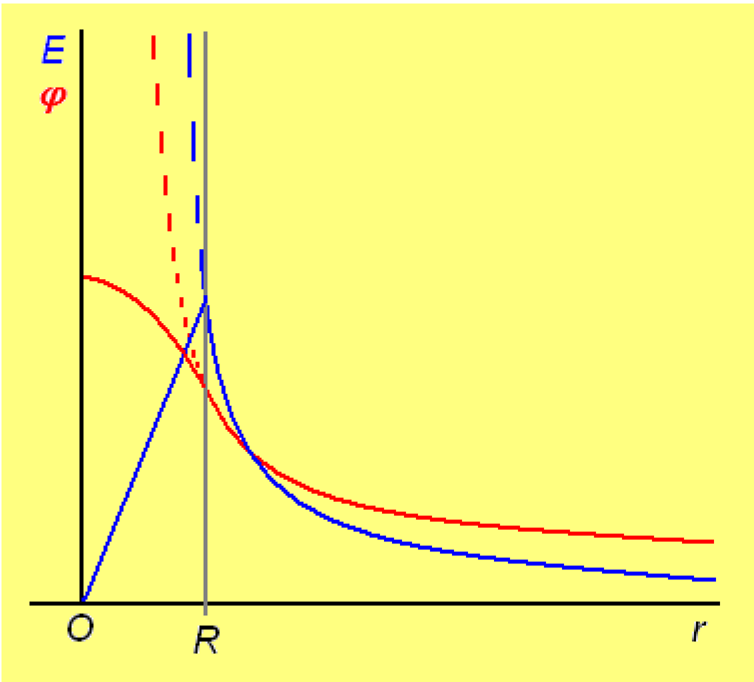
$$E_2 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

ist. Damit ergibt sich weiter

$$\varphi_r = \varphi_R + \int_R^r \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \varphi_R - \int_R^r E\,\mathrm{d}r = \varphi_R - \int_R^r \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\mathrm{d}r = \varphi_R - \left|\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\right|_R^r,$$

und schließlich

$$\varphi_r = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$



Feldstärke und Potential einer kugelförmigen Raumladung

6.4 Das Potential des Feldes eines unendlich langen geraden Drahtes

Hier begegnet uns eine interessante Besonderheit. Für das Potential eines Punktes im Abstand *r* von der Achse des Drahtes gilt (für radial nach innen gerichteten Weg)

$$\varphi(r) = \int_{\infty}^{r} E\,\mathrm{d}s \quad \text{und wegen} \quad \mathrm{d}s = -\mathrm{d}r: \quad \varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} E\,\mathrm{d}r$$

und mit $E = k\,(1/r)$

$$\varphi(r) = -k\int_{\infty}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r} = -k\left(\ln r - \ln\infty\right) = -k\,\ln r + k\ln\infty = -k\ln r + \infty \qquad k = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$$

Das bedeutet, dass das Potential an jeder Stelle des Feldes unendlich groß ist. Dies ist das Merkmal eines jeden Feldes, dessen Stärke „nur“ mit $1/r$ (oder noch langsamer) abnimmt (statt mit $1/r^n$, $n > 1$) und bedeutet, dass der Arbeitsaufwand für das Hereinbringen einer positiven Ladung aus dem Unendlichen an einen beliebigen Punkt des Raumes stets unendlich groß ist. Daher ist es hier auch nicht möglich, das Potential im Unendlichen als ich null zu definieren, wie das sonst im Allgemeinen geschieht. Aber immerhin ist es möglich, die Potentialdifferenz für zwei Punkte P_1 und P_2 zu berechnen:

$$\Delta\varphi_{2,1} = \varphi_2 - \varphi_1 = -k\int_{P_1}^{P_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = -k\left(\ln r_2 - \ln r_1\right) = -k\ln\frac{r_2}{r_1} = k\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

Verabredet man nun, dass z. B. für $r_1 = 1$ das Potential $\varphi_1 = 0$ sei, dann wird mit $\varphi_2 = \varphi$ und $r_2 = r$

$$\varphi(r) = k\,\ln\frac{1}{r} = -k\,\ln r.$$

Auf diese Weise lässt sich jedem Punkt des Feldes ein definiertes Potential zuordnen, was ja die wesentliche Eigenschaft eines Potentialfeldes ist.

6.5 Allgemeine Feldgleichungen

Aus der Gleichung

$$W = -q\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

folgt für das Differential d*W*

$$\mathrm{d}W = -q\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

und für das Differential $\mathrm{d}\varphi$ des Potentials im Fußpunkt des Vektors d**s**

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}W}{q} = -\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}. \qquad \textbf{(6.7)}$$

Das vollständige Differential $\mathrm{d}\varphi$ der skalaren Ortsfunktion $\varphi\,(x, y, z)$ ist andererseits

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Die rechts stehende Summe kann dargestellt werden als das Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$\mathrm{d}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 \right)\left(\mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_3\right).$$

Der erste Faktor ist der Vektor grad φ, der zweite Faktor ist der Vektor d$\boldsymbol{s}$. Folglich ist

$$\mathrm{d}\varphi = \operatorname{grad}\varphi \; \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Der Vergleich mit Gleichung (6.7) ergibt

$$\operatorname{grad}\varphi = -\boldsymbol{E}.$$

Die Feldstärke eines jeden Potentialfeldes (das ist ein Feld, in dem jeder Punkt ein definiertes Potential hat) ist also der negative Gradient des Potentials des Feldes.

Wegen

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

ist

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{POISSON-Gleichung}$$

Die POISSON-Gleichung gilt für jeden Punkt eines beliebigen elektrostatischen Feldes mit der Ladungsdichte ρ.

In jedem Punkt eines beliebigen elektrostatischen Feldes mit der Ladungsdichte null dagegen gilt

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0 \qquad \text{LAPLACE-Gleichung}$$

In kartesischen Koordinaten lauten die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ bzw. } 0$$

Befinden sich insbesondere in einem Raumstück mehrere Kugelladungen, so summieren sich in jedem Punkt deren Potentiale wie Skalare, ihre Feldstärken dagegen wie Vektoren.

$$\varphi = \sum \frac{Q_i}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_i}.$$

Bei kontinuierlicher Ladungsverteilung (Raumladung mit der Raumladungsdichte ρ oder Flächenladung mit der Flächenladungsdichte σ) ist

$$\varphi = \int_V \frac{\rho\,\mathrm{d}V}{4\pi\,\varepsilon_0\, r} \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \int_A \frac{\sigma\,\mathrm{d}A}{4\pi\,\varepsilon_0\, r}.$$

Aus der mit dem Energiesatz begründeten Aussage, dass das Linienintegral der elektrischen Feldstärke über eine geschlossene Linie gleich null ist,

$$\oint \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

folgt mit dem Integralsatz von STOKES (siehe Vektoranalysis: Teil IV), dass im ganzen Feld

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0$$

ist: Das elektrostatische Feld ist wirbelfrei. Die Wirbelfreiheit wiederum erweist sich (siehe a. a. O.) als die Voraussetzung dafür, dass ein Vektorfeld ein Potentialfeld besitzt, sodass jedem Punkt des Feldes eindeutig ein Potential zugeordnet werden kann.