Einführung
in die
Theoretische Physik

Der elektrische Strom – Wesen und Wirkungen

Teil I: Grundlagen

Siegfried Petry

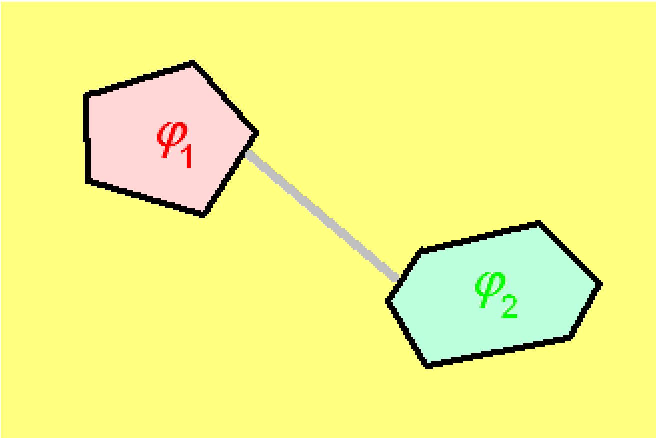
Fassung vom 19. Januar 2013

I n h a l t :

Für das Verständnis des Folgenden wird »Elektrostatik I u. II« vorausgesetzt.

1 Einleitung

Wir betrachten zwei beliebige isolierte Körper, die auf unterschiedliche Potentiale (oder Spannungen gegen Erde) φ_1 und φ_2 aufgeladen wurden, wobei auch negative Potentiale zugelassen sind. (Ein negatives Potential entsteht dadurch, dass der Körper einen Überschuss an negativen Ladungen hat.) Es sei nun $\varphi_1 > \varphi_2$,



Verbindet man anschließend die beiden Körper durch einen Leiter, z. B. durch einen Metalldraht, dann fließen elektrische Ladungen von einem Körper zum anderen, und zwar so lange, bis beide Körper dasselbe Potential haben. Das ist die Konsequenz des Satzes der Elektrostatik, dass ein leitender Körper überall dasselbe Potential hat. (Durch die leitende Verbindung ist aus den ursprünglich zwei Körpern ein einziger geworden.)

Dabei stellt man sich vor, dass von dem ersten Körper, der wegen seines höheren Potentials einen größeren Überschuss an positiven Ladungen hat als der zweite, positive Ladungen auf den zweiten fließen.

In unserem Beispiel klingt der elektrische Strom vom ersten auf den zweiten Körper sehr schnell ab, und es herrscht wieder »Elektrostatik«.

Es gibt aber Anordnungen, die einen elektrischen Potentialunterschied über längere Zeit aufrecht erhalten können, auch wenn ständig Ladungen abfließen. Solche Anordnungen heißen (elektrische) Spannungsquellen. Dazu gehören z. B. die Monozellen, die für elektrische und elektronische Geräte benutzt werden.

Wir betrachten hier zunächst nur elektrische Ströme in metallischen Leitern. Die bewegten elektrischen Ladungen sind dabei ausschließlich Elektronen, so genannte freie Elektronen, die nicht ständig an ein Atom gebunden sind und sich im Metall frei bewegen können. Diese Elektronen bewegen sich in einem elektrischen Feld entgegengesetzt zur Feldrichtung, also in Richtung zunehmenden Potentials, bei einer Monozelle folglich vom Minuspol zum Pluspol..

2 Stromstärke und Stromdichte

Fließt in der Zeit Δt durch einen Leiterquerschnitt die Ladung ΔQ, so ist die mittlere Stromstärke im Zeitintervall Δt

$$\overline{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Für die (momentane) Stromstärke I gilt:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Die SI-Einheit der elektrischen Stromstärke ist das Ampere (A). Das Ampere ist eine Basiseinheit des Internationalen Maßsystems (SI). Die Definition wird später angegeben.

Für die Richtung des Stromes (»technische Stromrichtung«) gilt die Verabredung: Der elektrische Strom fließt von den Punkten höheren Potentials zu den Punkten niedrigeren Potentials, bei einer Spannungsquelle also vom Pluspol zum Minuspol. Damit hat der Strom dieselbe Richtung wie das elektrische Feld. Die technische Stromrichtung ist der Bewegungsrichtung der Elektronen entgegengesetzt.

Die Stromdichte j an einer Stelle des Leiters ist

$$j = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A},$$

wobei ΔI die Stromstärke in dem senkrecht zur Stromrichtung liegenden Flächenstück ΔA ist.

3 Das Ohmsche Gesetz

Wie hängt die Stromstärke in einem Leiter vom Potentialunterschied (identisch gleich der elektrischen Spannung) zwischen den Enden des Leiters ab? Diese Frage kann nur experimentell beantwortet werden, obwohl man immerhin Folgendes sagen kann: Mit dem Potentialunterschied steigt proportional die Feldstärke im Leiter und damit die Kraft auf die Elektronen. Das Experiment bestätigt die nahe liegende Vermutung, dass die Stromstärke I der Spannung U proportional ist, allerdings nur bei konstanter Temperatur des Leiters. Da der Strom selbst zu einer Erwärmung des Leiters führt, ist die Proportionalität oft stark gestört. Also:

$$I \text{ prop. } U \text{ bei } T = \text{konst.}$$

Dies ist das **Ohmsche Gesetz.**

Der (bei konstanter Temperatur konstante) Quotient U/I ist ein Maß für den (Reibungs-)Widerstand, den der Leiter dem Strom entgegensetzt und heißt daher Ohmscher Widerstand des Leiters. Der Ohmsche Widerstand hängt von der Temperatur ab.

$$\text{Ohmscher Widerstand } R \overset{\text{Def.}}{=} \frac{U}{I}.$$

Hier besteht eine beträchtliche Begriffsverwirrung, zu der auch namhafte Lehrbücher beigetragen haben und noch immer beitragen: Diese Gleichung ist die »Definitionsgleichung des Ohmschen Widerstandes« und nicht das »Ohmsche Gesetz«.

Für einen homogenen Leiter der Länge l mit konstantem Querschnitt A gilt:

$$R = \rho \frac{l}{A}.$$

Dabei ist $\rho = \rho(T)$ der (temperaturabhängige) »spezifische elektrische Widerstand« des Leitermaterials. Der Kehrwert von ρ heißt »spezifischer elektrischer Leitwert« σ. Damit kann man schreiben

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U\,A}{\rho\, l} = \sigma \frac{U\,A}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{A} = \sigma \frac{U}{l} \quad \text{oder} \quad j = \sigma E \quad \text{und} \quad \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}.$$

Die letzte Gleichung ist die der elektrischen Feldtheorie (Nahewirkungstheorie) angemessene (weil »punktuelle«) Formulierung des Ohmschen Gesetzes.

4 Der Energieumsatz des elektrischen Stromes – Joulesche Wärme

Fließt in einem Leiter die elektrische Ladung Q von einem Punkt A mit dem Potential φ_1 zu einem Punkt B mit dem Potential φ_2, so wird dabei die Energie

$$W = Q(\varphi_1 - \varphi_2) = Q U_{1,2}$$

in Wärme (so genannte »Joulesche Wärme«) umgesetzt.

Dazu muss für

$$Q > 0: \quad \varphi_1 > \varphi_2,$$
$$Q < 0: \quad \varphi_1 < \varphi_2$$

sein.

Die mit dem Energieumsatz verbundene **Leistung** P bei konstanter Spannung U ist

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = U \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = U\,I.$$

Um auch hier einen der Feldtheorie entsprechenden Ausdruck zu erhalten, betrachten wir ein quaderförmiges Volumenelement dV, von dem vier Kanten (Länge dl) in Stromrichtung liegen. Die dazu senkrechten Stirnflächen dA sind dann Äquipotentialflächen des elektrischen Feldes im Leiter. Dann ist die Potentialdifferenz (elektrische Spannung) zwischen den Stirnflächen $\mathrm{d}U = E\,\mathrm{d}l$. Die Stromstärke ist $\mathrm{d}I = j\,\mathrm{d}A$ und daher $\mathrm{d}P = \mathrm{d}U\,\mathrm{d}I = E\,\mathrm{d}l\,j\,\mathrm{d}A = E\,j\,\mathrm{d}V$.

Damit erhalten wir die **Leistungsdichte** des Energieumsatzes

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = E\,j = \sigma E^2.$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der räumlichen Orientierung des betrachteten Volumenelements dV und gilt ganz allgemein.

5 Die magnetische Wirkung des elektrischen Stromes

5.1 Einleitung

Jeder elektrische Strom erzeugt um sich ein magnetisches Feld. Das charakteristische Merkmal eines magnetischen Feldes ist, dass »Magnetpole« darin eine Kraft erfahren. Analog zu elektrischen Feldern können auch Magnetfelder durch Feldlinien beschrieben werden.

Es liegt nahe, die magnetische Feldstärke analog zur elektrischen Feldstärke zu definieren als den Quotienten aus der Kraft, die das Feld auf einen Magnetpol ausübt, und der Polstärke des Magnetpols. Das setzt jedoch voraus, dass wir Polstärken messen können. Darauf wollen wir uns aber nicht einlassen und wählen daher einen ganz anderen Weg.

Wir begnügen uns zunächst mit einer relativen Messung magnetischer Feldstärken, das heißt, es genügt uns (zunächst), das Verhältnis zweier Feldstärken zu messen. Dazu reicht aber auch ein Magnetpol bzw. ein magnetischer Dipol unbekannter Stärke. Die Einzelheiten solcher Messungen sind Sache der Experimentalphysik und schon seit über 150 Jahren hinreichend bekannt.

Mit Hilfe entsprechender Methoden hat man herausgefunden, dass der Betrag H der magnetischen Feldstärke in irgendeinem Punkt außerhalb des Leiters proportional der Stromstärke I in dem (beliebig geformten) Leiter und im Falle eines sehr langen geraden Leiters zudem umgekehrt proportional zum Abstand r vom Leiter ist. Für die Richtung der in diesem Fall kreisförmigen Feldlinien hat man verabredet, dass sie in der technischen Stromrichtung gesehen im Uhrzeigersinn laufen.

5.2 Definition der Einheit der magnetischen Feldstärke

Für das Feld eines sehr langen geraden Drahtes gilt also:

$$H \sim \frac{I}{r} \quad \text{oder} \quad H = k\frac{I}{r}. \tag{1}$$

Berechnen wir nun das Linienintegral von $\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ über einen zum Leiter konzentrischen Kreis K mit dem Radius r, so finden wir, da $\boldsymbol{H}$ stets parallel zu $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ ist,

$$\oint_K \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = H\oint_K \mathrm{d}s = H\,2\pi r = k\frac{I}{r}2\pi r = k\,2\pi I.$$

Das Linienintegral hat also für alle konzentrischen Kreise denselben Wert und dieser hängt nur von I ab. Wie man an der Gleichung (1) erkennt, hängt die Proportionalitätskonstante k (was ihren Zahlenwert und ihre Einheit angeht) von den Maßeinheiten ab, die für die Größen H, I und r benutzt werden. Wir verabreden nun, die Einheit der magnetischen Feldstärke so festzulegen, dass die Konstante k den Betrag $1/(2\pi)$ annimmt. Dann wird

$$\oint_K \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = I$$

und

$$H = \frac{I}{2\pi r}.$$

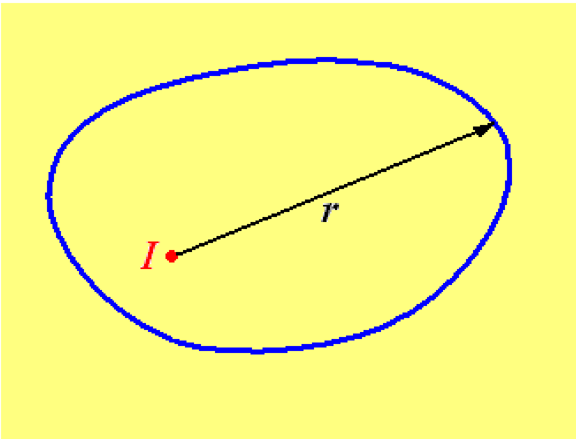
Damit haben wir die Einheit der magnetischen Feldstärke festgelegt, und nun gilt:

1. Die SI-Einheit der magnetischen Feldstärke ist 1 Ampere/Meter (A/m)

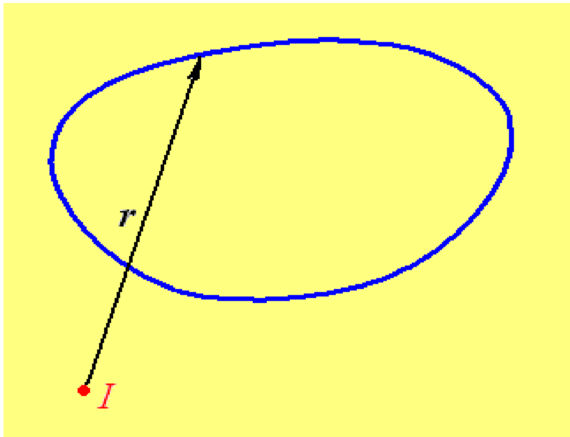
2. Die Feldstärke 1 A/m ist die Stärke des Feldes eines unendlich langen geraden Leiters im Abstand r = 1/(2π) Meter, wenn die Stromstärke im Draht 1 Ampere beträgt.

5.3 Das magnetische Durchflutungsgesetz

Wir wollen nun das oben genannte Linienintegral über eine beliebige geschlossene Kurve bilden, die in einer zum unendlich langen Leiter senkrechten Ebene liegt und die entweder den Querschnitt Leiters in sich enthält (a) oder aber nicht (b).

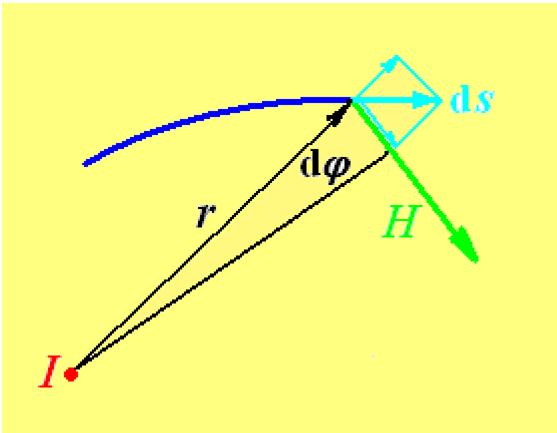


a) Geschlossene Linie enthält Leiterquerschnitt



b) Geschlossene Linie enthält Leiterquerschnitt nicht

Vor der Berechnung des Linienintegrals zerlegen wir das Wegelement d***s*** in eine Komponente in Richtung ***r*** (Radialkomponente), und eine Komponente senkrecht dazu (Normalkomponente).



Kurventeil, Linienelement und Feldstärke (in Stromrichtung gesehen)

Da die Feldstärke auf ***r*** senkrecht steht, liefert die Radialkomponente des Wegelements keinen Beitrag zum Linienintegral und es gilt mit $\mathrm{d}s_{\text{normal}} = r\,\mathrm{d}\varphi$:

$$\oint_K \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_K H\,\mathrm{d}s_{\text{normal}} = \oint_K \frac{I}{2\pi r} r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{I}{2\pi}\oint_K \mathrm{d}\varphi.$$

Enthält die Kurve einen Leiterquerschnitt, dann hat das Linienintegral den Wert 2π, anderenfalls den Wert 0. Folglich ist:

$$\text{Im Fall a):} \quad \oint_K \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = I,$$

$$\text{im Fall b):} \quad \oint_K \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0.$$

Umfängt die Kurve mehrere unendlich lange parallele Leiter mit den Stromstärken I_1, I_2, usw. dann gilt:

$$\oint_K \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum I_n.$$

Man kann zeigen, dass dieses Ergebnis auch für eine nicht ebene geschlossene Kurve gilt, welche die parallelen Leiter umschlingt, indem man das Leiterelement in geeigneter Weise in drei auf einander senkrechte Komponenten zerlegt.

Nach dem Integralsatz von STOKES ist

$$\oint_K \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A},$$

wobei A eine beliebig geformte Fläche ist, die von der Kurve K umrandet wird. Folglich gilt:

$$\int_A \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = I,$$

wobei I der durch die Fläche A fließende Strom ist. Für diesen wiederum gilt

$$I = \int_A \boldsymbol{j}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A},$$

wobei $\boldsymbol{j}$ der Vektor der Stromdichte ist. Ein Vergleich der Integrale ergibt zusammen mit der Eigenschaft des Vektors der Rotation, aus Symmetriegründen stets parallel zum Vektor der Stromdichte zu sein, die wichtige Beziehung

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}.$$

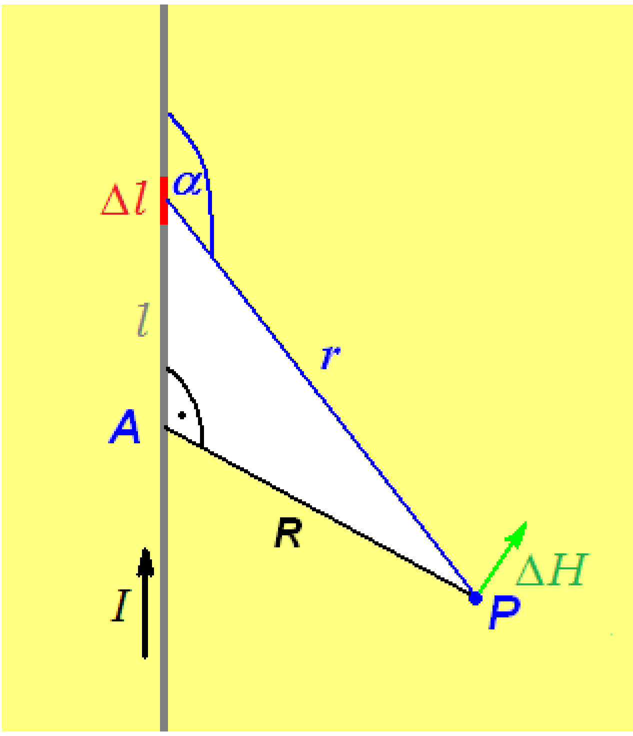
Die Rotation des Vektors der magnetischen Feldstärke in einem bestimmten Punkt ist also gleich dem Vektor der Stromdichte in diesem Punkt. Sie ist folglich nur dann ungleich null, wenn der Punkt innerhalb des Leiters liegt. Die Stromdichte außerhalb des betrachteten Punktes – auch in anderen Teilen des Leiters – hat also keinen Einfluss auf die Rotation des Feldstärkevektors. Dieses Ergebnis wurde zwar unter der Voraussetzung eines unendlich langen Leiters gewonnen, es lässt sich aber zeigen, dass es von der Länge des Leiters unabhängig ist. Denkt man sich nämlich den Strom im Leiter aus einer großen Anzahl dünner »Stromfäden« zusammengesetzt, deren Anzahl man dann gegen unendlich gehen lässt, während ihre Querschnitte gegen null gehen, so erkennt man, dass nach dem Gesetz von Biot-Savart (siehe unten), das sich unabhängig von obigem Ergebnis herleiten lässt, der Strom oberhalb und unterhalb des betrachteten Punktes keinen Beitrag zum Feld in diesem Punkt leistet, und damit auch keinen Beitrag zur Rotation des Feldstärkevektors. Die Rotation ist also von der Länge des Stromfadens unabhängig. Für die Ströme in allen Punkten außerhalb des betrachteten Stromfadens aber gilt, dass sie ebenfalls keinen Beitrag zur Rotation erbringen, weil der betrachtete Punkt ja außerhalb aller anderen Stromfäden liegt. Dies gilt auch im Falle eines beliebig geformten Leiters. Daraus folgt:

Diese Gleichung rot *H* = *j* gilt unabhängig von der Länge und der Gestalt des Leiters.

5.4 Das Gesetz von Biot-Savart

Zur Berechnung des magnetischen Feldes beliebig geformter Leiter genügen unsere bisherigen Kenntnisse noch nicht. Wir brauchen vielmehr eine Aussage darüber, welchen Beitrag $\Delta\boldsymbol{H}$ in einem einzelnen Leiterelement Δl fließende Strom I zum Magnetfeld des Leiters in einem beliebigen Punkt P leistet. Dieses Gesetz kann nicht experimentell durch Beobachtungen und Messungen gewonnen werden, denn es ist unmöglich, ein einzelnes Leiterelement aus dem Zusammenhang des ganzen Leiters herauszutrennen. Außerdem leistet ein sehr kleines Leiterelement auch nur einen sehr kleinen Beitrag, der gar nicht messbar ist. Es bleibt uns also nichts anderes übrig, als das gesuchte Gesetz zu erraten und es dann an bekannten Erscheinungen zu überprüfen und es entsprechend anzupassen. (In der Mathematik nennt man das: »einen Ansatz machen«.) Als bekannte Erscheinung nehmen wir das Magnetfeld eines unendlich langen geraden Drahtes und machen die folgenden, zwar plausiblen, aber natürlich nicht gesicherten Annahmen:

- Der Vektor $\Delta\boldsymbol{H}$ stehe auf dem von R, r und l gebildetem Dreieck senkrecht,
- der Betrag ΔH sei proportional zu $1/r^2$ (das quadratische Abstandsgesetz),
- die Abhängigkeit vom Winkel α muss symmetrisch zu a = 90° verlaufen, und für a = 0° und a = 180° muss ΔH aus Symmetriegründen gleich null sein. Dies sind Eigenschaften der Funktion sin α,
- ΔH muss proportional zu I und zu Δl sein.



Daher lautet der Ansatz:

$$\Delta H \approx k \frac{I}{r^2} \sin\alpha\,\Delta l,$$

wobei *k* ein noch zu bestimmender Proportionalitätsfaktor ist. Drückt man die Variablen *l* (das von *A* aus gemessen wird) und *r* durch *α* und *R* aus, erhält man

$$\Delta H \approx k \frac{I}{R} \sin\alpha\,\Delta\alpha$$

und daraus

$$H = \lim_{\Delta\alpha\to 0} k \frac{I}{R} \sum_{0}^{\pi} \sin\alpha\,\Delta\alpha = k \frac{I}{R} \int_{0}^{\pi} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = 2k \frac{I}{R}. \qquad \textbf{(1)}$$

Ein Vergleich mit der oben gewonnenen Formel für das Feld eines unendlich langen geraden Leiters,

$$H = \frac{I}{2\pi R},$$

ergibt

$$k = \frac{1}{4\pi}$$

und damit

$$\Delta H \approx \frac{1}{4\pi} \frac{I \sin\alpha}{r^2} \Delta l$$

Für das Differential d*H* des Betrags der Feldstärke *H* ergibt sich aus Gleichung (1)

$$\mathrm{d}H = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{R} \sin\alpha\ \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{r^2} \sin\alpha\ \mathrm{d}l. \qquad \textbf{Gesetz von Biot-Savart}$$

(Die mathematische Begründung für den ersten Teil dieser Doppelgleichung findet sich in »Die physikalische Rumpelkammer«, Die unendlich kleinen Größen in der Physik, Kap. 5.)

In Vektorschreibweise ist:

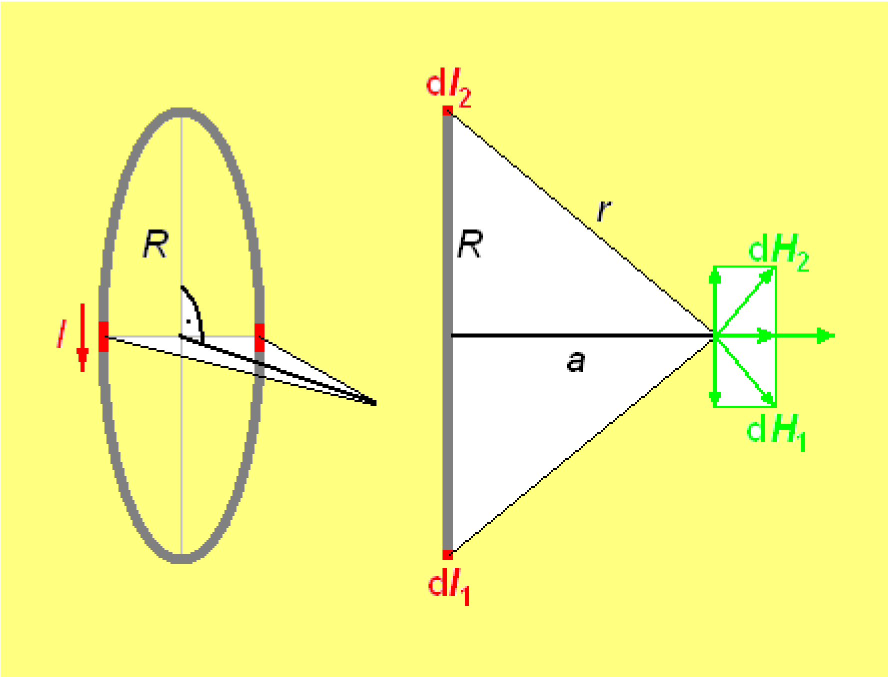
$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I}{r^3} [\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}].$$

Dabei ist ***r*** von *P* nach d*l* gerichtet und der Vektor d***l*** hat dieselbe Richtung wie der Strom *I*.

Der Ansatz hat also zu einem Ergebnis geführt, das mit beobachteten Gesetzen übereinstimmt. Es musste lediglich dem Proportionalitätsfaktor noch der richtige Wert zugeordnet werden.

Als Anwendungsbeispiel soll zunächst die magnetische Feldstärke in der Achse eines kreisförmigen Leiters vom Radius R berechnet werden. Dabei werden zur Vereinfachung nicht erst die Differenzen, sondern gleich die Differentiale von ***H*** und *l* betrachtet.

5.5 Das Feld eines kreisförmigen Leiters



Wir berechnen die Feldstärkeanteile zweier diametral gegenüber gelegener Differentiale $\mathrm{d}l_1$ und $\mathrm{d}l_2$. Für die Differentiale der Feldstärkenbeträge gilt dann

$$\mathrm{d}H_1 = \mathrm{d}H_2 = \frac{I\,\mathrm{d}l}{4\pi r^2}.$$

Wie zu erkennen, kompensieren die Radialkomponenten einander, dagegen summieren sich die Axialkomponenten zum axialen Feldstärkeanteil

$$\mathrm{d}H = 2\frac{I\,\mathrm{d}l}{4\pi r^2}\frac{R}{r} = \frac{I\,R}{2\pi r^3}\mathrm{d}l.$$

Da dieser Anteil von zwei Leiterelementen herrührt, wird zur Berechnung der gesamten Feldstärke nur über den halben Kreisumfang integriert. So findet man:

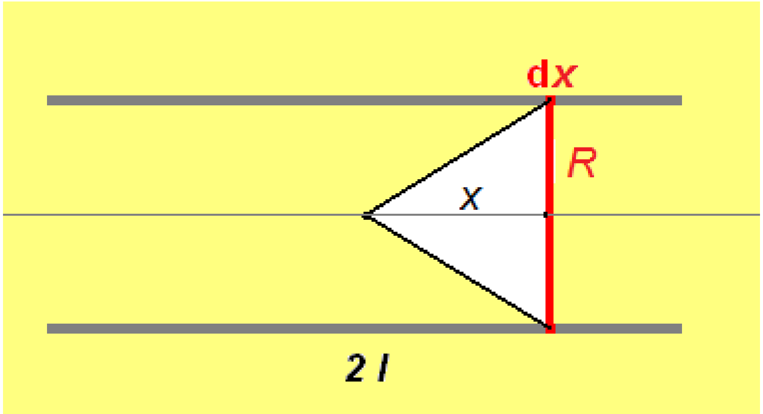
$$H = \frac{I\,R}{2\pi r^3}\pi R = \frac{I\,R^2}{2r^3} = \frac{I\,R^2}{2\left(R^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Insbesondere folgt daraus für den Mittelpunkt der Stromschleife mit a = 0:

$$H = \frac{I}{2R}.$$

5.6 Das Feld einer Zylinderspule

Als nächstes berechnen wir die Feldstärke in der Mitte einer Zylinderspule, die aus zahlreichen kreisförmigen Leiterschleifen besteht.



Die konstante Windungsdichte $\Delta n/\Delta l$ der Spule sei N, wobei Δn die auf die Strecke Δl entfallende Windungszahl ist. Auf die Strecke zwischen x und $(x + \mathrm{d}x)$ entfallen dann $N\,\mathrm{d}x$ Windungen, in denen insgesamt der Strom $I\,N\,\mathrm{d}x$ fließt. Der Feldstärkeanteil dieses Spulenelements, das einer kreisförmigen Leiterschleife entspricht, beträgt dann

$$\mathrm{d}H = \frac{R^2\,N\,I}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

und die Gesamtfeldstärke ist

$$H = \frac{R^2\,N\,I}{2}\int_{-l}^{+l}\frac{\mathrm{d}x}{\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

wenn die Länge der Spule $2l$ ist und x von der Spulenmitte aus zählt. Das Integral hat den Wert

$$\left|\frac{x}{R^2\left(R^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right|_{-l}^{+l} = \frac{2l}{R^2\left(R^2+l^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{R^2\left(\frac{R^2}{l^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Damit wird

$$H = \frac{N\,I}{\left(\frac{R^2}{l^2}+1\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Für l gegen unendlich wird daraus

$$H = N\,I.$$

Bei einer unendlich langen Spule ist in jedem Punkt der Achse »die Mitte« der Spule, also gilt dieses Ergebnis für jeden Punkt der Achse. Für eine reale Spule endlicher Länge gilt dieses Ergebnis annähernd in der Nähe der Mitte, falls die Länge der Spule sehr groß ist gegenüber ihrem Radius. Am Ende einer solchen Spule ist die Feldstärke gerade noch halb so groß wie in der Mitte, da ja hier eine Hälfte der Spule und damit auch ihr Anteil an der Feldstärke fehlen.

Wegen der Gleichberechtigung aller Spulenquerschnitte müssen die Feldlinien parallel und damit das Feld homogen sein.

5.7 Das Vektorpotential des magnetischen Feldes

Die Grundgleichung des durch einen elektrischen Strom erzeugten Magnetfeldes lautet

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}. \tag{2}$$

Dazu kommt noch die Gleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{3}$$

die besagt, dass das magnetische Feld eines elektrischen Stromes nur geschlossene Feldlinien hat und daher quellenfrei ist.

Der Versuch, ein magnetisches Feld mit Hilfe dieser beiden Gleichungen aus $\boldsymbol{j}$ herzuleiten, gelingt durch Einführung eines neuen, noch unbekannten Vektors $\boldsymbol{A}$, von dem gelten soll:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.$$

Zunächst ist festzustellen, dass dieser Ansatz die Gleichung (3) erfüllt, da die Divergenz eines Wirbelfeldes (hier: div rot $\boldsymbol{A}$) stets null, d. h. das Feld des Vektors rot $\boldsymbol{A}$ quellenfrei ist.

Sollte es gelingen, einen Vektor $\boldsymbol{A}$ zu finden, der auch die Gleichung (2) erfüllt, so kann $\boldsymbol{H}$ einfach durch Berechnung von rot $\boldsymbol{A}$, also durch Differentialoperationen, gefunden werden.

Aus Gleichung (1) ergibt sich zunächst

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}.$$

Nach einem Satz der Vektoranalysis ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = -\Delta \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A},$$

wobei Δ der LAPLACE-Operator ist (siehe unten). Demnach ist

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = -\Delta \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{j}. \tag{4}$$

Diese Gleichung vereinfachte sich erheblich, wenn der gesuchte Vektor $\boldsymbol{A}$ zusätzlich die Bedingung div $\boldsymbol{A}$ = 0 erfüllte, also ebenfalls quellenfrei wäre. Dies kann jedoch ohne Beeinträchtigung der Allgemeingültigkeit immer angenommen werden. Denn aus jedem beliebigen Feldvektor $\boldsymbol{V}_0$ kann ein quellenfreier Feldvektor $\boldsymbol{V}$ gewonnen werden, indem man zu $\boldsymbol{V}_0$ einen geeigneten Vektor grad ψ addiert:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 + \operatorname{grad} \Psi.$$

Dies läuft darauf hinaus, einen Vektor zu finden, der einerseits dieselben Quellen wie $\boldsymbol{V}_0$ hat, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen, und der andererseits wirbelfrei ist und daher bei der Summenbildung an rot $\boldsymbol{V}_0$ nichts ändert. Die zweite Bedingung wird dadurch erfüllt, dass wir den gesuchten Vektor als Gradient einer Funktion Ψ angesetzt haben. Nun müssen wir noch zeigen, dass sich stets eine skalare Ortsfunktion ψ finden lässt, welche die erste Bedingung erfüllt. Aus (4) folgt

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V} = \operatorname{div} \boldsymbol{V}_0 + \operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi = 0, \tag{5}$$

und weiter

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi = -\operatorname{div} \boldsymbol{V}_0$$

und in rechtwinkligen Koordinaten

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial \Psi}{\partial y}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial \Psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_3\right)=-\left(\frac{\partial V_{0,x}}{\partial x}+\frac{\partial V_{0,y}}{\partial y}+\frac{\partial V_{0,z}}{\partial z}\right)$$

oder

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}=-\left(\frac{\partial V_{0,x}}{\partial x}+\frac{\partial V_{0,y}}{\partial y}+\frac{\partial V_{0,z}}{\partial z}\right).$$

Sicher lässt sich stets eine skalare Ortsfunktion ψ angeben, welche dieser Differentialgleichung genügt, sodass unsere Forderung, der Vektor $\boldsymbol{A}$ sei quellenfrei, stets erfüllbar ist.

Dann erhalten wir aus (4) die vereinfachte Gleichung

$$\Delta \boldsymbol{A}=-\boldsymbol{j}.$$

Der LAPLACE-Operator Δ ist das Symbol für die Differentialoperation

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dieser Operator wird jetzt auf einen Vektor angewendet. Das ergibt:

$$\Delta \boldsymbol{A}=\Delta A_x \boldsymbol{e}_1+\Delta A_y \boldsymbol{e}_2+\Delta A_z \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{j}.$$

Für die einzelnen Komponenten gilt dann:

$$\Delta A_x=j_x, \quad \Delta A_y=j_y, \quad \Delta A_z=j_z.$$

Diese drei skalaren Gleichungen entsprechen – jede für sich – genau der aus der Elektrostatik bekannten POISSON-Gleichung für das Potential des elektrischen Feldes. Daher werden die obigen Gleichungen als die Potentialgleichungen des magnetischen Feldes bezeichnet. Dem entsprechend heißt der Vektor $\boldsymbol{A}$ das Vektorpotential des magnetischen Feldes. Die Lösungen der drei skalaren Potentialgleichungen sind aus der Elektrostatik bekannt. Sie lauten:

$$A_x=\int_V \frac{j_x}{4\pi r}\mathrm{d}V, \qquad A_y=\int_V \frac{j_y}{4\pi r}\mathrm{d}V, \qquad A_z=\int_V \frac{j_z}{4\pi r}\mathrm{d}V.$$

Fasst man diese drei Gleichungen wieder zu einer Vektorgleichung zusammen, so ergibt sich die Gleichung des Vektorpotentials:

$$\boldsymbol{A}=\int_V \frac{\boldsymbol{j}}{4\pi r}\mathrm{d}V.$$

Hieraus kann sofort das Feld eines unendlich langen geraden Leiters berechnet werden. In ihm hat der Vektor $\boldsymbol{j}$ die Richtung der Leiterachse. Legen wir die Differentiale d$\boldsymbol{s}$ in diese Achse, so wird, wenn q der Leiterquerschnitt ist,

$$\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}V=\frac{I}{q}q\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}=I\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

und

$$\boldsymbol{A}=\frac{I}{4\pi}\int_L \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r}.$$

Die nun zur Ermittlung von $\boldsymbol{H}$ folgende Berechnung der Rotation ist von der Integration über die Länge des Leiters unabhängig. Daher können Rotationsbildung und Integration in der Reihenfolge vertauscht werden:

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\frac{I}{4\pi}\int_L \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r} = \int_L \frac{I}{4\pi}\mathrm{rot}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{r} = \int_L \frac{I}{4\pi}\left(\mathrm{grad}\frac{1}{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}\right) = \int_L \frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}_0}{r^2}.$$

Dabei ist $\boldsymbol{r}_0$ der Einheitsvektor in der Richtung des Differentials $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ zum Aufpunkt (= betrachteter Punkt) hin. Diese Gleichung kann so interpretiert werden, dass jedes Differential zum Feld den Beitrag

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}_0}{r^2}$$

liefert. Dies ist aber genau das Gesetz von Biot-Savart.