Einführung

in die

Theoretische Physik

Der elektrische Strom – Wesen und Wirkungen

Teil III: Elektrische Stromkreise

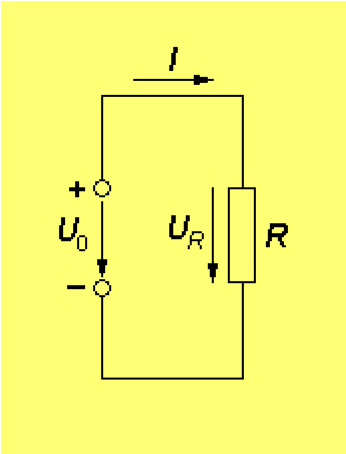
Siegfried Petry

Fassung vom 23. Januar 2013

I n h a l t :

1 Zählpfeile

Zur Berechnung elektrischer Stromkreise hat sich die Einführung von Zählpfeilen bewährt, die an einem einfachen Beispiel erläutert werden sollen:



Links ist eine Gleichspannungsquelle mit der Quellenspannung U_0, rechts ein Schaltungselement (»Widerstand«), das nur einen Ohmschen Widerstand R hat. Der Ohmsche Widerstand der Leitungen und der »innere Widerstand« der Spannungsquelle seien vernachlässigbar klein. Gleiches soll für die Induktivität und die Kapazität der Leitungen gelten. (Sollte dies einmal nicht der Fall sein, müssen sie durch »Ersatzschaltglieder« berücksichtigt werden.)

Wir verabreden nun:

Die **Spannungszählpfeile** weisen in Richtung abnehmenden Potentials, also vom Pluspol zum Minuspol.

Die **Stromzählpfeile** zeigen die »technische Stromrichtung« an. Sie verlaufen im »äußeren« Teils des Stromkreises vom Pluspol zum Minuspol, in der Spannungsquelle dagegen vom Minuspol zum Pluspol.

Im oben abgebildeten Stromkreis ist U_R der Potentialunterschied zwischen dem oberen und dem unteren Punkt des Widerstandes. Er ist in diesem Fall gleich der Spannung der Spannungsquelle. Es gilt

$$U_R = I \cdot R.$$

Wo Strom- und Spannungszählpfeil dieselbe Richtung haben, wird Energie freigesetzt (hier in Form von Wärme), wo sie entgegengesetzte Richtungen haben (wie hier in der Spannungsquelle), wird dem Stromkreis Energie zugeführt.

Macht man von einem beliebigen Punkt aus in beliebiger Richtung einen geschlossenen Umlauf im Stromkreis, so ist die Summe aller durchlaufenen Spannungen (Potentialdifferenzen) unter Berücksichtigung ihrer Richtung (auch in komplizierteren Stromkreisen) gleich null (2. Kirchhoffsches Gesetz). Hier also ist

$$U_R - U_0 = 0.$$

Dieser Umlauf stellt eine geschlossene Kurve in einem Potentialfeld dar. Aus dieser Gleichung und aus der Tatsache, dass (z. B. bei Stromverzweigungen) die Summe aller Teilströme konstant und gleich der Stromstärke im unverzweigten Teil des Kreises ist, können die bekannten Gesetze für den Gesamtwiderstand von parallel- und hintereinandergeschalteten Widerständen hergeleitet werden.

2 Gleichstromkreise

2.1 Elektrische Schaltungselemente

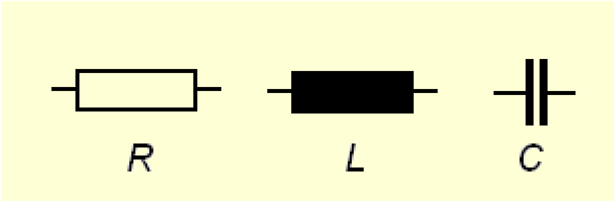
Es gibt drei Typen von »Schaltungselementen«:

1. Schaltungselemente mit Ohmschem Widerstand (kurz: »Widerstände«); Formelzeichen R,

2. Schaltungselemente mit Selbstinduktion (»Induktivitäten«); Formelzeichen L,

3. Schaltungselemente mit elektrischer Kapazität (»Kapazitäten«); Formelzeichen C.

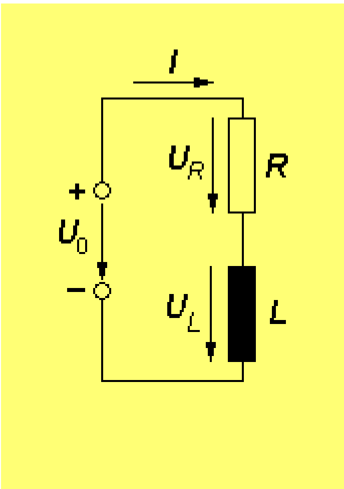
Schaltungselemente mit Selbstinduktion werden im Allgemeinen durch Spulen realisiert, Schaltungselemente mit Kapazität durch Kondensatoren. Die entsprechenden Schaltzeichen sind



2.2 Induktivität im Gleichstromkreis

Induktivitäten werden im Allgemeinen durch Spulen (mit oder ohne Eisenkern) realisiert. Solche Spulen besitzen immer auch einen Ohmschen Widerstand, der meist nicht vernachlässigt werden kann. Daher betrachten wir die Induktivität L stets in Reihe geschaltet mit einem Ohmschen Widerstand R. (Dies ist eine Ersatzschaltung für die Spule, bei der Induktivität und Ohmscher Widerstand eigentlich auf sehr viele, sehr kleine Elemente ΔL und ΔR verteilt sind, welche nacheinander vom Strom durchlaufen werden, also hintereinander geschaltet sind. Wie die Erfahrung bestätigt, dürfen die Elemente ΔL und ΔR je für sich zur Gesamtinduktivität $L = \Sigma\ \Delta L$ und zum Gesamtwiderstand $R = \Sigma\ \Delta R$ addiert und diese dann als in Reihe geschaltet aufgefasst werden.)

Auch die Spannungsquelle hat einen nicht immer vernachlässigbaren »inneren Widerstand«. Dieser und der Ohmsche Widerstand der Spule können hier im Schaltbild zusammen durch einen Widerstand dargestellt werden, der mit der Spule in Reihe geschaltet ist:



Wie wir oben (in Teil II) sahen, ist die Spannung an der Spule (die Potentialdifferenz zwischen ihrem oberen und ihrem unteren Ende) proportional zu dI/dt. Für dt > 0 und dI > 0 nimmt die Stromstärke mit der Zeit zu. Es ist daher konsequent, dem Zählpfeil von dI/dt dieselbe Richtung zuzusprechen wie dem Stromzählpfeil. Bei zunehmender Stromstärke wirkt die in der Spule induzierte Spannung dem Anwachsen der Stromstärke entgegen, also muss das Potential am oberen Ende der Spule höher sein als am unteren, und folglich muss der Spannungszählpfeil für U_L von oben nach unten gerichtet sein. Also hat der Zählpfeil von U_L dieselbe Richtung wie der Zählpfeil von I. Folglich gilt

$$U_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

und zwar ohne das unsinnige Minuszeichen, das in er Literatur in dieser Gleichung häufig anzutreffen ist.

Nach dem 2. Kirchhoffschen Gesetz ist dann

$$U_R + U_L - U_0 = 0$$

und mit $U_R = I\,R$ und $U_L = L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$

$$I\,R + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - U_0 = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung. Sie lautet:

$$I = \frac{U_0}{R} + k\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},$$

wie man durch Differenzieren und Einsetzen bestätigen kann. Die Konstante k wird wie folgt aus den Anfangsbedingungen bestimmt: Der Vorgang beginne zur Zeit $t = 0$ (Einschaltzeitpunkt) mit der Stromstärke 0. Daraus ergibt sich:

$$k = -\frac{U_0}{R}$$

und somit ist

$$I = \frac{U_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Die Stromstärke nähert sich also asymptotisch von unten dem Wert

$$I_\infty = \frac{U_0}{R},$$

und zwar umso langsamer, je kleiner R/L ist. $I_\infty = U_0/R$ ist die durch den Ohmschen Widerstand bedingte Stromstärke.

Für die Spannungen U_R und U_L gilt:

$$U_R = I\,R = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad U_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Wie zu erkennen, ist tatsächlich stets

$$U_R + U_L - U_0 = 0.$$

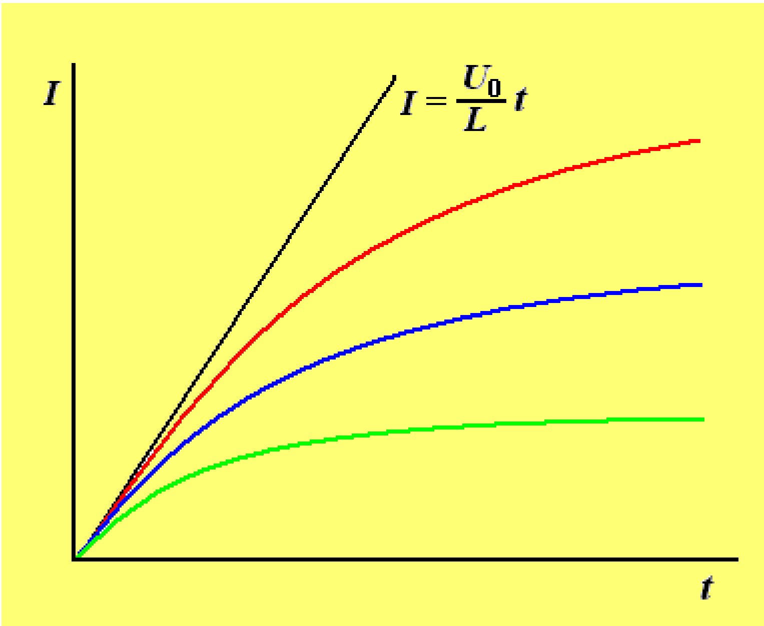
Zur Zeit $t = 0$ ist wegen $I(0) = 0$ auch $U_R(0) = 0$ und daher $U_L(0) = L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = U_0$ und somit

$$\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \frac{U_0}{L}. \qquad \text{(A)}$$

Die Steigung der Kurve $I = I(t)$ ist also von R unabhängig. Für $R = 0$ wird der Funktionswert $I = I(t)$ unbestimmt, nämlich gleich 0/0. Um den Wert zu bestimmen, gehen wir so vor: Für $R = 0$ ist stets (d. h. für alle Werte t) $U_L = U_0$. Also gilt die Gleichung (A) dann für alle Werte von t, und durch Integration findet man:

$$I = \frac{U_0}{L} t.$$

Der Strom steigt also linear an. Für R gegen 0 nähert sich die Kurve $I = I(t)$ mehr und mehr dieser Geraden.



Besonders interessant ist die vom Strom an der Spule aufgewendete Arbeit W_L. Wir berechnen sie für den Fall $R = 0$; das Ergebnis ist dann leicht zu verallgemeinern. Die Leistung des Stromes ist

$$P_L = U_L I = U_0 I = \frac{U_0^2}{L} t.$$

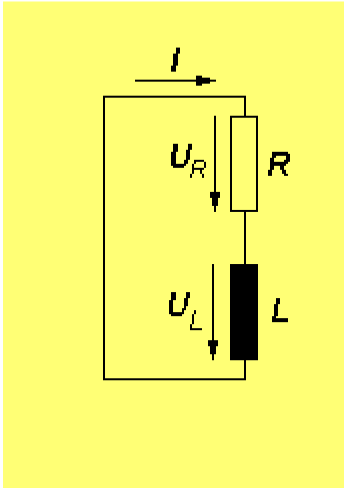
Daraus ergibt sich die im Intervall 0 bis t aufgewendete Arbeit:

$$W_L(t) = \int_0^t P_L \, \mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{L} \int_0^t t \, \mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{2L} t^2 = \frac{L^2 I^2}{2L} = \frac{L}{2} I^2.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit einem früher auf einem anderen Weg ermittelten überein und kann so interpretiert werden: Fließt in einer Spule mit der Induktivität L der Strom I, so ist die Energie des Magnetfeldes der Spule

$$W = \frac{L I^2}{2}.$$

Diese Energie ist im Magnetfeld (konservativ) gespeichert und kann in andere Energieformen umgesetzt werden. Bei dem nachfolgend behandelten Ausschaltvorgang wird sie im Widerstand R in Wärme umgewandelt.



Wir betrachten nun den Ausschaltvorgang, bei dem die Spannungsquelle abgeschaltet und gleichzeitig das untere Ende der Spule mit dem oberen Ende des Widerstands verbunden werden soll. Die Zählpfeile lässt man dabei unverändert. Dann findet man bei einem geschlossenen Umlauf im Stromkreis

$$U_R + U_L = 0 \quad \Rightarrow \quad U_L = -U_R \quad \Rightarrow \quad L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -RI.$$

Die Lösung dieser homogenen Differentialgleichung ist

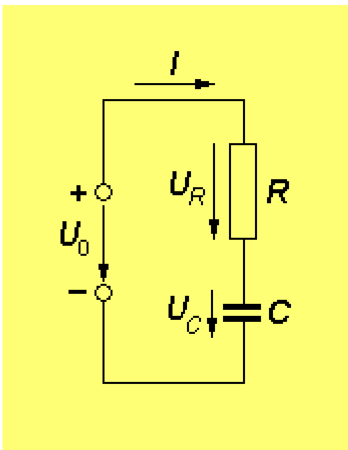
$$I = I_A \, \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},$$

wobei I_A die Stromstärke im Moment des Ausschaltens ($t = 0$) ist. Daraus folgt dann

$$U_R = I_A R \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{und} \quad U_L = -I_A R \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Das Minuszeichen bedeutet, dass die Spannung an der Spule nun die entgegengesetzte Richtung hat wie ihr Zählpfeil, d. h, dass der Punkt mit dem höheren Potential (der Pluspol) jetzt unten liegt. Die Spule ist jetzt die Spannungsquelle im Stromkreis und die Ursache des (exponentiell abnehmenden) Stromes. I und U_R sind positiv und haben daher dieselbe Richtung wie vor dem Ausschalten.

2.3 Kapazität im Gleichstromkreis



Auch hier haben die Zählpfeile für I und U_C dieselbe Richtung, da die obere Kondensatorplatte durch den Strom positiv, die untere negativ aufgeladen wird. Die obere Platte hat folglich das höhere Potential. Es gilt nun

$$U_C = \frac{Q}{C},$$

wobei Q die Ladung des Kondensators ist. Damit folgt aus dem 2. Kirchhoffsche Gesetz:

$$R\,I + \frac{Q}{C} - U_0 = 0.$$

Differenzieren nach t liefert mit $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$:

$$R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = 0.$$

Der Ansatz

$$I = I\left(0\right)\mathrm{e}^{-k\,t}$$

führt zu

$$k = \frac{1}{RC}$$

und zu

$$I = I(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

War der Kondensator beim Einschalten zur Zeit $t = 0$ leer, war also $Q(0) = 0$, dann ist

$$I(0) = \frac{U_0}{R}$$

und somit

$$I = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

Die Spannung des Kondensators kann am einfachsten berechnet werden aus

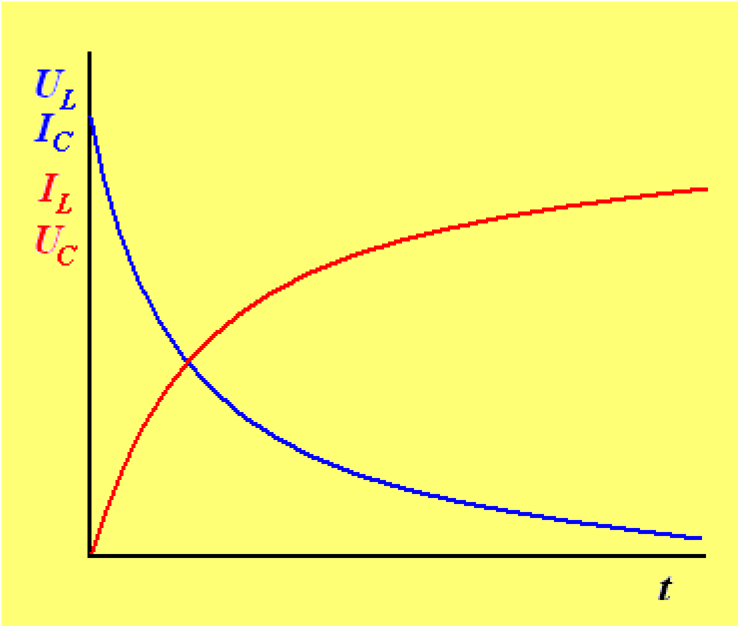
$$U_C = U_0 - U_R = U_0 - I\,R = U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Wird der Kondensator (bei abgeschalteter Spannungsquelle) über den Widerstand R entladen, nachdem er die Spannung U_A angenommen hatte, ist

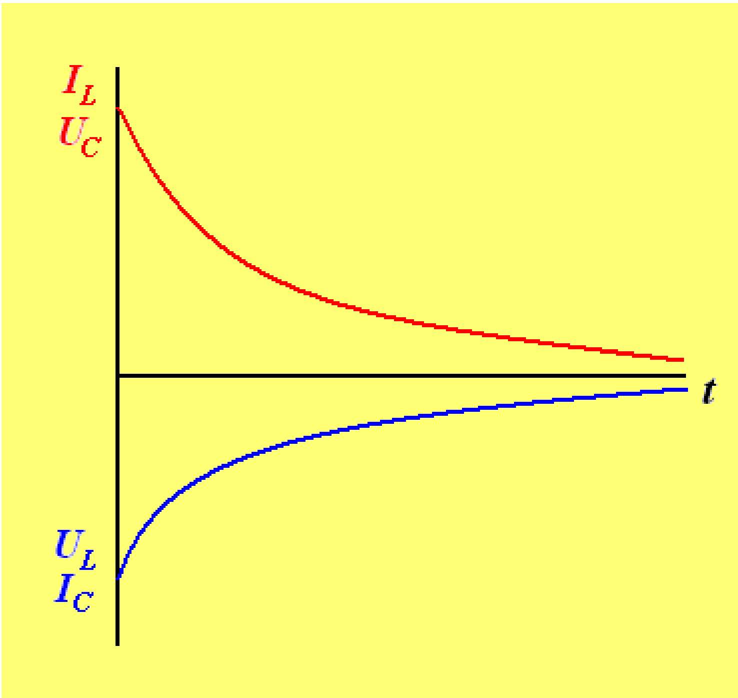
$$I = -\frac{U_A}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

Das Minuszeichen besagt wieder, dass die Stromrichtung dem Zählpfeil entgegengesetzt ist. Dementsprechend hat nun auch U_R die umgekehrte Richtung.

Wie man sieht, sind die Kurven für Strom und Spannung bei Induktivität und Kapazität »über Kreuz« austauschbar.



Einschaltvorgang



Ausschaltvorgang

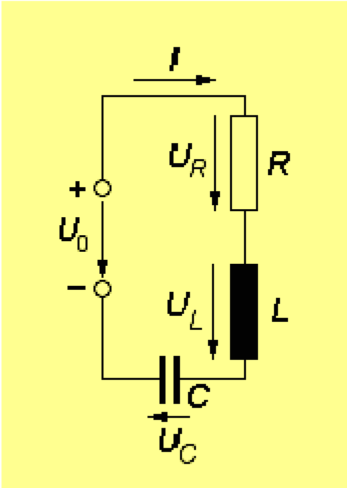
Die beim Transport der Ladung dQ gegen die Spannung U_C des Kondensators verrichtete Arbeit ist

$$\mathrm{d}W = U_C\,\mathrm{d}Q = \frac{Q_t}{C}\mathrm{d}Q,$$

wobei Q_t die momentane (temporäre) Ladung des Kondensators ist. Zum Aufbringen der Ladung Q benötigt man die Arbeit

$$W = \int_0^Q \frac{Q_t}{C}\mathrm{d}Q_t = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{UQ}{2}.$$

2.4 Induktivität und Kapazität im Gleichstromkreis



Hier ist

$$I\,R + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} - U_0 = 0.$$

Durch Differenzieren nach der Zeit ergibt sich daraus:

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = 0.$$

Diese Differentialgleichung entspricht genau der Differentialgleichung der gedämpften harmonischen Schwingung (siehe Einführung in die Theoretische Physik, Schwingungen, unter: Gedämpfte harmonische Schwingungen).

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = 0,$$

wobei m die Masse des schwingenden Körpers, μ der Reibungskoeffizient und k die Federkonstante ist. Dabei entsprechen einander

- Auslenkung x und Stromstärke I,
- Masse m und Induktivität L,
- Reibungskoeffizient μ und Ohmscher Widerstand R,
- Federkonstante k und Kehrwert $1/C$ der Kapazität.

Somit sind alle Ergebnisse von dort analog übertragbar.

Der Ansatz

$$I = a\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

führt zu der »charakteristischen Gleichung«

$$L\lambda^2 + R\,\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}},$$

die beide negativ sind.

Je nachdem die Diskriminante (der Term unter der Wurzel) größer, kleiner oder gleich null ist, ergeben sich unterschiedliche Lösungen.

1. Fall:

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0 \quad \text{oder} \quad \frac{R^2}{4L} > \frac{1}{C}$$

Die beiden Lösungen bezeichnen wir mit $-\alpha$ und $-\beta$, wobei $0 < \alpha < \beta$ sein soll. Die allgemeine Lösung ist dann

$$I = A\mathrm{e}^{-\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\beta t}.$$

Aus der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ ergibt sich sofort $B = -A$. Eine zweite Gleichung für A und B gewinnen wir aus der Betrachtung von

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\alpha A\mathrm{e}^{-\alpha t} - \beta B\mathrm{e}^{-\beta t} = -\alpha A\mathrm{e}^{-\alpha t} + \beta A\mathrm{e}^{-\beta t}.$$

Wenn der Kondensator anfangs die Ladung 0 hat, ist $U_C(0) = 0$. Ferner ist $U_R(0) = I(0)\,R = 0$. Somit muss

$$U_L(0) = L\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)_0 = U_0$$

sein. Also ist

$$-\alpha A + \beta A = U_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{U_0}{\beta - \alpha}$$

und somit

$$I = \frac{U_0}{\beta - \alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t}\right).$$

Diese Differenz zweier abklingender e-Funktionen hat – wie man leicht nachweisen kann – für $t = t_M$ ein Maximum und für $t = t_W$ einen Wendepunkt. Dabei ist

$$t_M = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} \quad \text{und} \quad t_W = 2t_M.$$

2. Fall:

$$\frac{R^2}{4L} = \frac{1}{C}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist dann

$$I = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t},$$

wobei mit den Anfangsbedingungen wie oben $A = 0$ und $B = U_0 / L$ wird. Dann ist

$$I = \frac{U_0}{L}\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Der Verlauf dieser Funktion (die mit der Wahrscheinlichkeit null realisiert wird) unterscheidet sich nicht wesentlich von dem oben wiedergegebenen. Das Maximum liegt bei $t_M = 1/\beta$, der Wendepunkt bei $t_W = 2\ tM$.

3. Fall:

$$\frac{R^2}{4L} < \frac{1}{C}$$

Die Wurzel wird dann imaginär, und die Lösungen sind periodische Funktionen. Beim Ein- und Ausschalten der Spannungsquelle (letzteres wieder bei geschlossenem Stromkreis) nähern sich die Spannung und die Ladung des Kondensators in Form von abklingenden Schwingungen dem jeweiligen Endwert. Der Endwert der Spannung beträgt beim Einschaltvorgang U_0, beim Ausschaltvorgang 0. Der Endwert der Kondensatorladung ist beim Einschaltvorgang gleich CU_0, beim Ausschaltvorgang gleich 0.

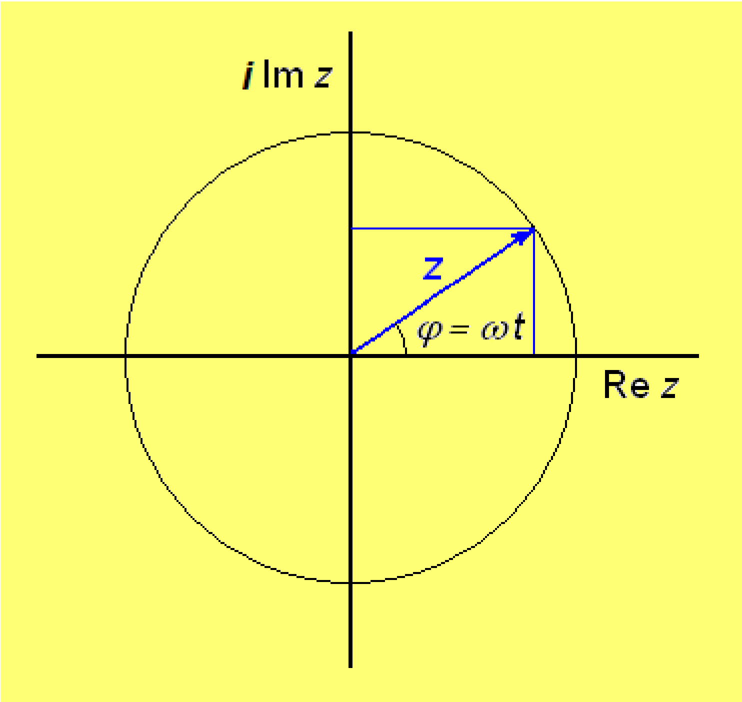
Der Strom nähert sich in beiden Fällen oszillierend dem Wert 0.

3 Wechselstromkreise

3.1 Zeigerdarstellung von Wechselspannungen und –strömen

Technische Wechselspannungen sind überwiegend sinusförmig. (Wenn nicht, können sie mit einer Fourier-Reihe als Summe von sinusförmigen Spannungen dargestellt werden.)

Wegen der Verwandtschaft der e-Funktion mit imaginärem Exponenten mit der Sinus- und der Kosinusfunktion können diese mit vielfältigen Vorteilen durch rotierende »Zeiger« in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden.



Setzt man

$$z = U_0\,\mathrm{e}^{i\,\omega t} \equiv U_0\,(\cos\omega t + i\sin\omega t),$$

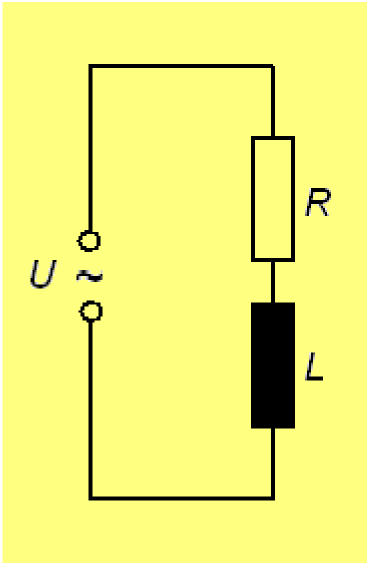
- dann ist der Realteil von z = Re z = U_0 cos ωt
- und der Imaginärteil von z = Im z = U_0 sin ωt.

Dabei ist $\omega = 2\,\pi\,f$ die Kreisfrequenz der Wechselspannung und t die Zeit. Der Zeiger rotiert dann mit dieser Kreisfrequenz in der Gaußschen Ebene.

Zeigerdiagramme sind nützlich zur Addition phasenverschobener Spannungen und Ströme und lassen sich auch zur Darstellung und Behandlung komplexer Widerstände und Leitwerte (siehe unten) verwenden.

Auch hier führen wir wieder Zählpfeile für die Spannungen, für den Strom und für dessen Ableitung nach der Zeit ein. Dabei nehmen wir an, der obere Pol der Spannungsquelle sei gerade der positive Pol. Alle Zählpfeile sind dann so wie im 1. und 2. Kapitel gerichtet. Diese Richtungen werden beibehalten, auch wenn sich die Spannung der Spannungsquelle umkehrt. Dann wird dieser Spannung einfach ein negativer Wert zugeordnet. Wenn dann in gewissen Zeitabschnitten eine der Spannungen, der Strom oder dessen Ableitung negativ wird, dann bedeutet dies, dass die entsprechende Größe in diesen Zeitabschnitten ihrem Zählpfeil entgegengesetzt gerichtet ist. – Auch im Wechselstromkreis gilt das 2. Kirchhoffsche Gesetz.

3.2 Induktivität im Wechselstromkreis



Bei der Behandlung dieser Schaltung taucht ein neuartiges Problem auf: Bei Gleichstromkreisen war es gleichgültig, zu welcher Zeit eingeschaltet wurde, weil die Spannung immer dieselbe war. Daher verlief nach dem Einschalten das Anwachsen des Stromes immer in gleicher Weise. Im Wech selstromkreis dagegen verläuft dieser Vorgang unterschiedlich je nach dem Wert, den die Spannung beim Einschalten gerade hat. Wir haben hier also keine zeitunabhängige Randbedingung zur Berechnung der Konstanten bei der Lösung der Differentialgleichung. Wir können aber zunächst von dem Einschaltvorgang absehen und den »stationären Zustand« untersuchen, der sich nach einiger Zeit – meist sehr schnell – einstellt.

Nehmen wir an, die Spannung der Spannungsquelle sei eine sinusförmige Wechselspannung:

$$U = U_0 \sin \omega t.$$

Für den Stromkreis gilt dann:

$$R\,I + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - U_0 \sin \omega t = 0.$$

Wir machen für die Lösung den Ansatz

$$I = A \sin\left(\omega t + \delta\right),$$

wobei δ ein noch zu bestimmender »Phasenverschiebungswinkel« ist. Aus dem Ansatz folgt:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = A \cos(\omega t + \delta).$$

Dies in die Differentialgleichung eingesetzt ergibt:

$$R\,A \sin(\omega t + \delta) + L\,\omega A \cos(\omega t + \delta) = U_0 \sin \omega t,$$

woraus folgt:

$$R\,A\,(\sin \omega t \cos \delta + \cos \omega t \sin \delta) + L\,\omega A\,(\cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta) = U_0 \sin \omega t,$$

und weiter

$$\sin \omega t(R\,A \cos \delta - L\,\omega A \sin \delta) + \cos \omega t(R\,A \sin \delta + L\,\omega A \cos \delta) = U_0 \sin \omega t.$$

Der Koeffizientenvergleich der beiden Funktionen $\sin \omega t$ und $\cos \omega t$ ergibt:

$$\sin \omega t: \quad R\,A\cos\delta - L\,\omega A\sin\delta = U_0 \qquad (1)$$

$$\cos \omega t: \quad R\,A\,\sin\delta + L\,\omega A\,\cos\delta = 0 \qquad (2)$$

Aus (2) folgt:

$$\tan\delta = -\frac{\omega L}{R}.$$

In (1) eingesetzt ergibt nach einigen Umformungen (wobei sin δ und cos δ durch tan δ ausgedrückt werden müssen):

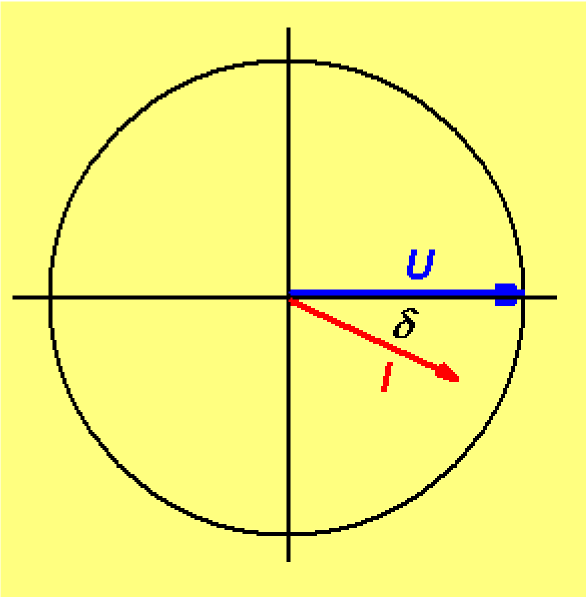
$$A = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

und damit

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \delta).$$

Interpretation:

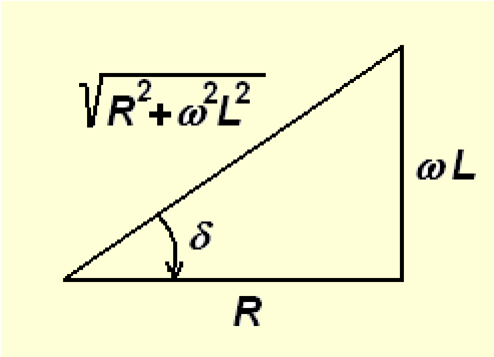
1. Der sinusförmige Strom hat gegenüber der Spannung eine negative Phasenverschiebung ($\delta < 0$), die von R und dem Produkt ωL abhängt. (Der Strom »läuft der Spannung nach«.) In der folgenden Zeigerdarstellung rotieren die beiden Zeiger, wie starr miteinander verbunden, entgegen dem Uhrzeigersinn.



2. Die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung entspricht formal dem Gesetz $R = U/I$, wobei jedoch an die Stelle des Ohmschen Widerstandes R die Größe,

$$\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

tritt. Ihr Zahlenwert ist gleich dem Zahlenwert der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Zahlenwerte von R und ωL haben.



Zudem ist der Winkel unten links gleich dem Phasenverschiebungswinkel.

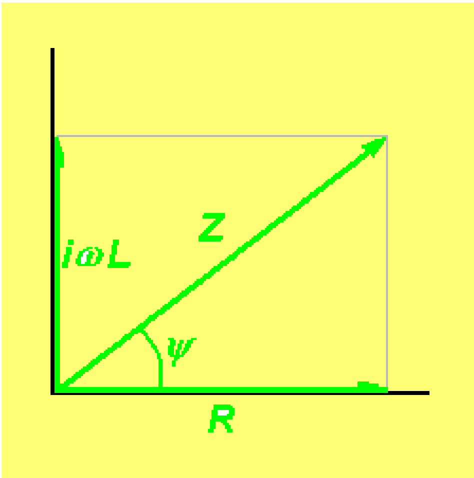
Das Produkt ωL heißt **induktiver Widerstand** (auch »**Induktanz**«) der Spule.

Für R gegen 0 und bei hohen Frequenzen ist der Gesamtwiderstand praktisch gleich dem induktiven Widerstand, der proportional zur Frequenz wächst. Die Phasenverschiebung geht dabei gegen – 90°.

Sehr nützlich ist es – besonders bei komplizierteren Schaltungen –, auch die Widerstände als Zeiger in der komplexen Zahlenebene darzustellen. Dabei wird der Ohmsche Widerstand (dann auch »Wirkwiderstand« Z_W genannt) auf der reellen Achse aufgetragen, der induktive Widerstand (»Blindwiderstand« Z_B) hingegen auf der positiven imaginären Achse. Der Gesamtwiderstand (»Impedanz« Z) ergibt sich dann als komplexe Größe:

$$Z = Z_W + Z_B = R + \mathrm{i}\omega L.$$

Der Winkel ψ ist gleich dem Phasenverschiebungswinkel der Spannung gegenüber dem Strom (also umgekehrt wie oben) und daher $\psi = -\delta$.

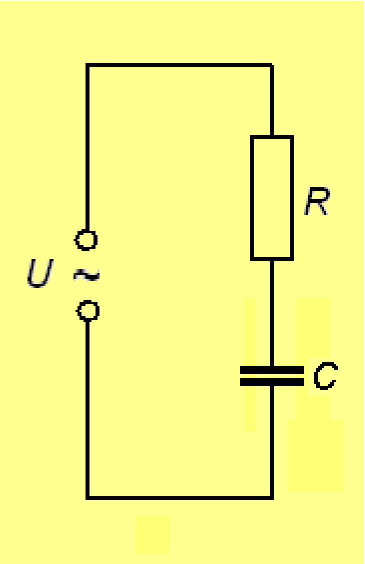


Beachte: Die Zeiger der Widerstände rotieren nicht!

Der Betrag des komplexen Scheinwiderstandes ist

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

3.3 Kapazität im Wechselstromkreis



Hier gilt:

$$R\,I + \frac{Q}{C} - U_0 \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{C} = \omega U_0 \cos \omega t.$$

Mit dem Ansatz für den stationären Zustand

$$I = A \sin(\omega t + \delta)$$

findet man ähnlich wie oben

$$\tan\delta = \frac{1}{R\,\omega C} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R}, \quad A = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

und damit

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \delta).$$

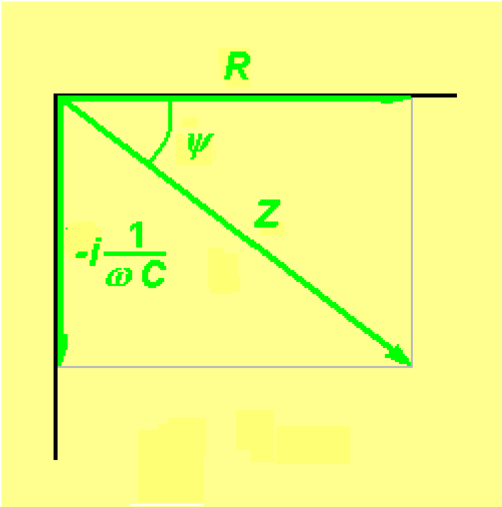
Auch hier entspricht der Zusammenhang zwischen I und U formal dem Gesetz $I = U/R$, wobei an Stelle von R nunmehr der Betrag des komplexen Scheinwiderstand tritt, für den gilt:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}.$$

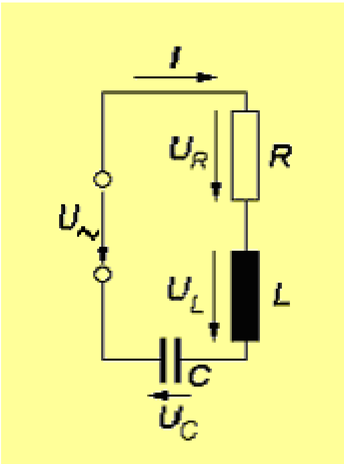
Der Phasenverschiebungswinkel ist nun positiv, d.h. der Strom eilt der Spannung voraus. Wenn R gegen 0 geht, dann geht δ gegen 90°.

Der komplexe Scheinwiderstand Z ist hier

$$Z = R - \mathrm{i}\frac{1}{\omega C}.$$



3.4 Induktivität und Kapazität im Wechselstromkreis



Hier gilt

$$R\,I + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = U_0 \sin\omega t \quad \Rightarrow \quad L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} I = \omega U_0 \cos\omega t.$$

Mit dem gleichen Ansatz wie oben findet man

$$\tan\delta = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}, \quad A = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

und damit

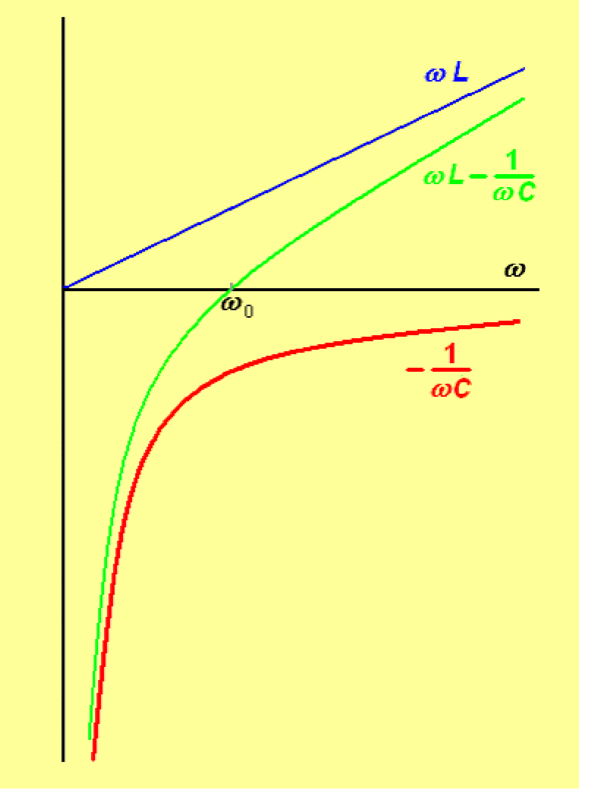
$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \delta).$$

Der Blindwiderstand ist also die Differenz von induktivem und kapazitivem Widerstand. Das Vorzeichen dieser Differenz ist gleich dem Vorzeichen der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom.

Der komplexe Scheinwiderstand (Impedanz) ist

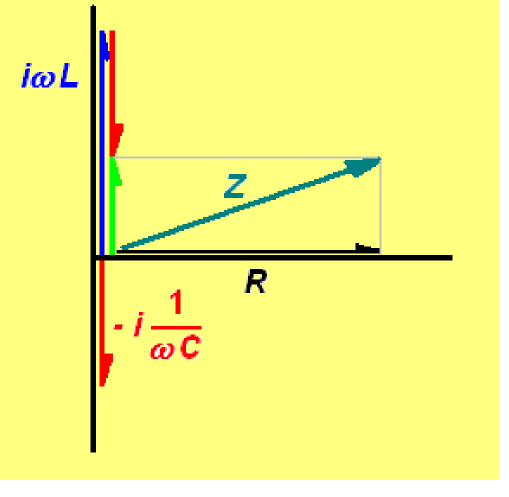
$$Z = R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Sind induktiver Widerstand ωL und kapazitiver Widerstand $1/\omega C$ gleich, ist der Blindwiderstand null und $Z = R$.



Die Blindwiderstände als Funktion von ω

Zeigerdiagramm:



3.5 Parallelschaltung von Wirk- und Blindwiderständen

Parallelschaltungen werden auf ähnliche Weise wie oben berechnet. Dabei ergibt sich, dass (statt der Blindwiderstände) hier zunächst die Blindleitwerte G_B addiert werden. Die Blindleitwerte G_L und G_C von Induktivität und Kapazität sind die Kehrwerte der Blindwiderstände. Zu der Differenz der Blindleitwerte wird der Wirkleitwert G_R des parallel geschalteten Ohmschen Widerstandes geometrisch addiert. Das ergibt dann den Scheinleitwert G. Also:

$$G_R = \frac{1}{R}, \quad G_L = \frac{1}{\omega L}, \quad G_C = \omega C,$$

$$G_{C,L} = G_C - G_L = \omega C - \omega L, \quad G = \sqrt{G_R^2 + G_{C,L}^2} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

In komplexer Schreibweise:

$$Y = G_R + \mathrm{i}\, G_{C,L} = \frac{1}{R} + \mathrm{i}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

Natürlich können auch die Leitwerte in Zeigerdiagrammen dargestellt werden.

Bemerkenswert ist noch, dass der Blindleitwert null werden kann.

Vertauscht man in der vorletzten Abbildung (Die Blindwiderstände als Funktion von ω) die Größen L und C, so stellen die Kurven die Blindleitwerte dar.

4 Einschaltvorgänge in Wechselstromkreisen

Einschaltvorgänge sind Anpassungsprozesse, die von den speziellen momentanen Gegebenheiten des Schaltkreises (z.B. Ladung des Kondensators) und der Spannungsquelle, so wie sie beim Einschalten gerade vorliegen, asymptotisch zu den stationären Vorgängen hinführen, die wir im letzten Kapitel betrachtet haben.

Bei der Berechnung der Einschaltvorgänge machen wir die im Allgemeinen selbstverständliche Annahme, dass der Strom vor dem Anlegen der Spannungsquelle null ist. Dagegen hängt die Spannung der Quelle vom Einschaltzeitpunkt t_E ab, da ja

$$U_E = U_0 \sin \omega t_E$$

sein soll, wobei wir annehmen, dass für $t = 0$ gerade eine Periode der Sinusspannung begann.

4.1 *RL*-Glied

Wir nehmen an, dass der Strom unmittelbar nach dem Einschalten aus einem gegenüber der Spannung phasenverschobenen Wechselstrom und aus einem asymptotisch verschwindenden Anteil besteht. Daher der Ansatz:

$$I = A \sin(\omega t + \delta) + B\,\mathrm{e}^{-k\,t}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = A\omega \cos(\omega t + \delta) - k\,B\,\mathrm{e}^{-k\,t}.$$

Für A und δ übernehmen wir die Werte aus Kapitel 3.2:

$$A = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \qquad \tan\delta = -\frac{\omega L}{R}.$$

Aus der Gleichung

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + R\,I = U_0 \sin \omega t$$

folgt dann

$$L\,A\omega\cos(\omega t + \delta) - L\,k\,B\,\mathrm{e}^{-k\,t} + R\,A\sin(\omega t + \delta) + R\,B\,\mathrm{e}^{-k\,t} = U_0 \sin \omega t$$

oder

$$L\,A\omega(\cos\omega t \cos\delta - \sin\omega t \sin\delta) - L\,k\,B\,\mathrm{e}^{-k\,t} + R\,A(\sin\omega t \cos\delta + \cos\omega t \sin\delta)$$
$$+R\,B\,\mathrm{e}^{-kt} = U_0 \sin\omega t.$$

Da die Exponentialfunktion auf der rechten Seite nicht auftritt, muss sie auch auf der linken Seite verschwinden. Daraus folgt:

$$R\,B = L\,k\,B \quad \Rightarrow \quad k = \frac{R}{L}.$$

Die Konstante B ergibt sich mit der Bedingung $I(t_E) = 0$ aus der ersten Gleichung:

$$B = -A\sin(\omega t_E + \delta)\,\mathrm{e}^{k\,t_E}.$$

Damit wird

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\left[\sin(\omega t + \delta) - \sin(\omega t_E + \delta)\,\mathrm{e}^{-k(t - t_E)}\right].$$

Bei hohen Frequenzen kann R oft gegenüber ωL vernachlässigt werden, und der Phasenverschiebungswinkel wird nahezu $-\pi/2$. Dann ist mit guter Annäherung

$$I = -\frac{U_0}{\omega L}\left(\cos\omega t - \cos\omega t_E\,\mathrm{e}^{-k(t - t_E)}\right).$$

Wenn der Zahlenwert von $k = R/L$ klein ist, geht der zweite Term in der Klammer relativ langsam gegen null.

4.2 *RC*-Glied

Hier gilt

$$I\,R + \frac{Q}{C} = U_0 \sin\omega t \quad \text{und} \quad R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I = \omega U_0 \cos\omega t.$$

Wir machen den gleichen Ansatz wie oben, nämlich

$$I = A\sin(\omega t + \delta) + B\,\mathrm{e}^{-k\,t}$$

und übernehmen die Werte für A und δ aus Kapitel 3.3:

$$A = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}, \quad \tan\delta = \frac{1}{R\,\omega C}.$$

Durch eine ähnliche Rechnung wie oben findet man:

$$k = \frac{1}{RC}.$$

Hat der Kondensator beim Einschalten die Ladung Q_E, dann ist

$$I_E R + \frac{Q_E}{C} = U_0 \sin \omega t_E \quad \Rightarrow \quad I_E = \frac{U_0}{R} \sin \omega t_E - \frac{Q_E}{RC}.$$

Andererseits ist

$$I_E = A \sin(\omega t_E + \delta) + B \mathrm{e}^{-k t_E},$$

woraus folgt

$$B = \left[\frac{U_0}{R} \sin \omega t_E - \frac{Q_E}{RC} - A \sin(\omega t_E + \delta) \right] \mathrm{e}^{k t_E}.$$

Damit ergibt sich schließlich

$$I = A \sin(\omega t + \delta) + \left[\frac{U_0}{R} \sin \omega t_E - A \sin(\omega t_E + \delta) \right] \mathrm{e}^{-k(t - t_E)}.$$

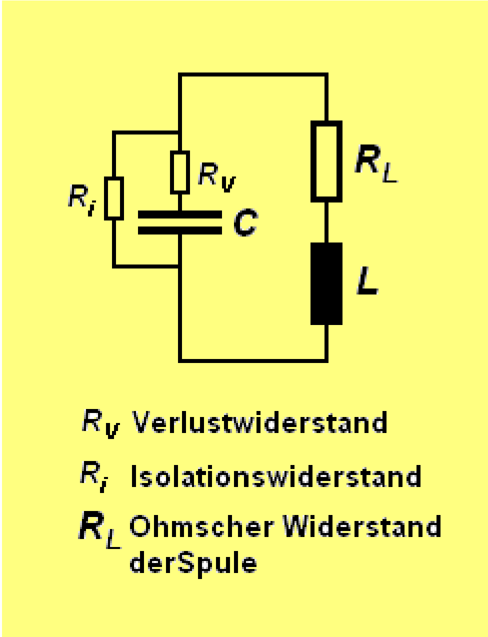
Bei vernachlässigbar kleinem *R* geht *k* gegen unendlich und die Dauer des Einschaltvorgangs geht gegen null.

4.3 *RCL*-Glied

Der Einschaltvorgang für solche Glieder wird im Abschnitt »5 Schwingkreise« behandelt.

5 Schwingkreise

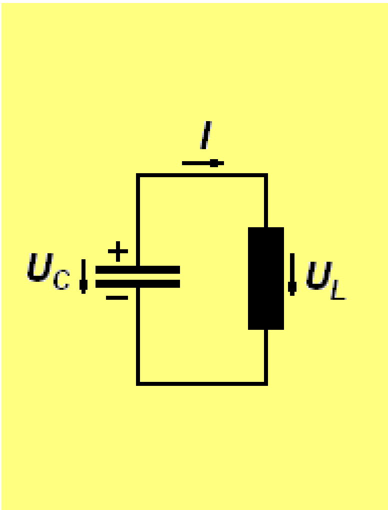
Im einfachsten Fall besteht ein Schwingkreis theoretisch aus einem Kondensator, dessen Platten mit einer Spule verbunden sind. In der Praxis besitzt eine Spule einen Ohmschen Widerstand, der allenfalls bei hohen Frequenzen vernachlässigt werden kann. Streng genommen ist auch ein Kondensator nicht »verlustfrei«: die Isolation seiner Platten gegeneinander hat keinen unendlich hohen Widerstand und die Materie zwischen den Platten (das »Dielektrikum«, das Kondensatoren mit nennenswerten Kapazitäten überhaupt erst möglich macht) ist nicht verlustfrei, was sich besonders bei höheren Frequenzen bemerkbar macht. (Die Ursache dieser Verluste ist die Polarisation des Dielektrikums durch innere Ladungsverschiebung, wobei die Ladungen nicht ganz reibungslos hin und her verschoben werden, wenn der Kondensator an einer Wechselspannung liegt.) Ein Ersatzschaltbild, das alle diese Einflüsse berücksichtig, sieht so aus:



Zunächst wollen wir von allen Ohmschen Widerständen absehen und einen idealen Schwingkreis betrachten:

5.1 Verlustfreier Schwingkreis

Damit überhaupt etwas geschieht, müssen wir vor dem Einschalten den Kondensator aufladen (oder nach dem Einschalten in der Spule eine Spannung induzieren). Die Ladung des Kondensators sei Q_0.



Hier empfiehlt sich wieder einmal die Einführung von Zählpfeilen. Ein geschlossener Umlauf im Stromkreis ergibt:

$$U_L - U_C = 0$$

und weiter

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - \frac{Q}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Da ein Strom von der gezeichneten Richtung (bei positivem Größenwert) die Ladung des Kondensators verringert, ist

$$I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

und daher

$$L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C} I = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$I = A \sin(\omega t + \delta)$$

mit

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C\,L}}.$$

Für die Anfangsbedingungen $I(0) = 0$ gilt $\delta = 0$. Ferner ist dann

$$U_C(0) = \frac{Q_0}{C} = U_L(0) = L\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)_0,$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \omega A \cos \omega t, \quad \left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \omega A,$$

woraus folgt

$$A = \frac{Q_0}{\omega C\,L} = \frac{U_C(0)}{\omega L}.$$

Für die Spannungen gilt

$$U_C = U_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = U_C(0)\cos \omega t.$$

Der Strom verläuft also in Form einer Sinusschwingung, der Verlauf der Spannung am Kondensator und damit auch der an der Spule ist eine Kosinusschwingung gleicher Frequenz. Strom und Spannung sind um 90° phasenverschoben.

Für den Energiegehalt von Spule und Kondensator gilt:

$$W_L = \frac{1}{2} L\,I^2 = \frac{1}{2} L \frac{U_0^2}{\omega^2 L^2} \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} L \frac{U_0^2\,LC}{L^2} = \frac{1}{2} C U_0^2 \sin^2 \omega t,$$

$$W_C = \frac{1}{2} C U_C^2 = \frac{1}{2} C U_0^2 \cos^2 \omega t,$$

woraus folgt

$$W_L + W_C = \frac{1}{2} C U_0^2 = \text{konst.}$$

Die anfangs zum Aufladen des Kondensators aufgewendete Energie schwingt also verlustfrei zwischen Kondensator und Spule hin und her.

5.2 Schwingkreis mit Ohmschem Widerstand

Aus

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI-\frac{Q}{C}=0 \quad \text{folgt} \quad L\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}I=0.$$

(Wegen des Vorzeichenwechsels bei *I* siehe Kap. 5.1.)

Auch diese Differentialgleichung ist uns aus der Mechanik bekannt (siehe »Schwingungen« http://vrweb.de/~si.pe/Schwingungen.pdf); sie wurde dort in allen Einzelheiten behandelt. Ich begnüge mich daher mit der Angabe der den elektrischen Größen angepassten Lösungen. (Siehe dazu auch Kapitel 2.4, in dem dasselbe Problem, wenn auch mit anderen Anfangsbedingungen, behandelt wird.)

1. Für

$$\frac{1}{C}>\frac{R^2}{4L}$$

lautet die allgemeine Lösung

$$I=A\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega t+\delta).$$

Bei den gleichen Anfangsbedingungen wie oben ergibt sich daraus

$$I=\frac{U_C(0)}{\omega L}\sin\omega t=\frac{Q_0}{\omega CL}\sin\omega t.$$

Allerdings hat ω jetzt einen anderen Wert als bei der ungedämpften Schwingung, deren »Eigenkreisfrequenz« ich zur Unterscheidung nun mit ω_0 bezeichne:

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}}<\omega_0=\frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

2. Für

$$\frac{1}{C}<\frac{R^2}{4L}$$

verläuft die Funktion aperiodisch:

$$I=A\mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}\right)t}+B\mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}\right)t}.$$

Für die genannten Anfangsbedingungen ist

$$A=-\frac{U_0}{2L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{CL}}} \quad \text{und} \quad B=-A.$$

3. Der mit der Wahrscheinlichkeit null auftretende Grenzfall

$$\frac{1}{CL}=\frac{R^2}{4L^2}$$

ist ebenfalls aperiodisch und entspricht dem Grenzfall bei den mechanischen Schwingungen.

5.3 Gedämpfter Schwingkreis an einer Wechselspannung

Im Schwingkreis befinde sich eine Wechselspannungsquelle mit der Spannung

$$U = U_0 \sin \omega t.$$

Die Ausgangsgleichung lautet dann:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + R\,I + \frac{Q}{C} = U_0 \sin \omega t$$

und nach Differenzieren und Dividieren durch L

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C\,L} I = \frac{\omega}{L} U_0 \cos \omega t.$$

Diese Gleichung ist formal gleich der Differentialgleichung der gedämpften erzwungenen mechanischen Schwingung (siehe »Schwingungen« http://vrweb.de/~si.pe/Schwingungen.pdf unter »Die gedämpfte erzwungene Schwingung«). Dabei entsprechen einander:

$$I \text{ und } x, \quad \frac{R}{L} \text{ und } \frac{\mu}{m}, \quad \frac{1}{C\,L} \text{ und } \omega_0^2, \quad \frac{\omega}{L} U_0 \text{ und } \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

Mit diesen Entsprechungen lässt sich die gesamte Herleitung von dort übernehmen. Die allgemeine Lösung besteht wieder aus einem abklingenden Einschwingvorgang und einem stationären Zustand. Für diesen gilt:

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}} \cos(\omega t + \delta),$$

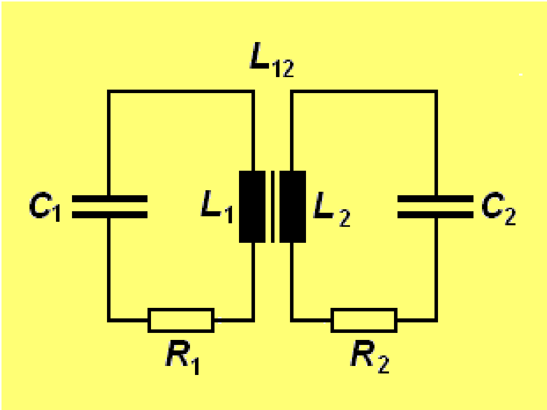
mit

$$\tan \delta = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}.$$

Der Phasenverschiebungswinkel δ ist positiv, null oder negativ, je nachdem bei der Erregerfrequenz ω der kapazitive Widerstand größer, gleich oder kleiner als der induktive Widerstand ist.

5.4 Gekoppelte Schwingkreise

Wir betrachten nun zwei Schwingkreise, die induktiv gekoppelt sind. Die Wechselinduktivität sei $L_{1,2} = L_{2,1}$.



Analog wie oben bei einem einzelnen Schwingkreis ergibt sich hier:

$$L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+L_{1,2}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}+R_1I_1-\frac{Q_1}{C_1}=0,$$
$$L_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}+L_{2,1}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+R_2I_2-\frac{Q_2}{C_2}=0,$$

und nach Differentiation:

$$L_1\frac{\mathrm{d}^2I_1}{\mathrm{d}t^2}+L_{1,2}\frac{\mathrm{d}^2I_2}{\mathrm{d}t^2}+R_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C_1}I_1=0,$$
$$L_2\frac{\mathrm{d}^2I_2}{\mathrm{d}t^2}+L_{2,1}\frac{\mathrm{d}^2I_1}{\mathrm{d}t}+R_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C_2}I_2=0.$$

(Wegen des Vorzeichenwechsels beim letzten Term auf der linken Seite siehe Kapitel 5.1.)

Die Lösung dieses Gleichungssystems in seiner allgemeinsten Form ist sehr kompliziert. Ich beschränke mich daher auf den praktisch wichtigen Sonderfall, dass die beiden Schwingkreise völlig identisch sind. Es sei also $L_1 = L_2 := L$, $R_1 = R_2 := R$ und $C_1 = C_2 := C$.

Dann lauten die Differentialgleichungen

$$L\frac{\mathrm{d}^2I_1}{\mathrm{d}t^2}+L_{1,2}\frac{\mathrm{d}^2I_2}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}I_1=0,$$
$$L\frac{\mathrm{d}^2I_2}{\mathrm{d}t^2}+L_{1,2}\frac{\mathrm{d}^2I_1}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}I_2=0.$$

Zur Integration dieser Gleichungen bilden wir ihre Summe und ihre Differenz und erhalten dadurch zwei einfachere Differentialgleichungen für $(I_1 + I_2)$ und $(I_1 - I_2)$, die dann noch mit C multipliziert werden:

$$C\,L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(I_1+I_2)+C\,L_{1,2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(I_1+I_2)+C\,R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_1+I_2)+(I_1+I_2)=0,$$
$$C\,L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(I_1-I_2)+C\,L_{1,2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(I_1-I_2)+C\,R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_1-I_2)+(I_1-I_2)=0.$$

Mit den Abkürzungen

$$(I_1+I_2)=x,\quad (I_1-I_2)=y$$

erhält man daraus

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L + L_{1,2}} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C\left(L + L_{1,2}\right)} x = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L - L_{1,2}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C\left(L - L_{1,2}\right)} y = 0.$$

Beide Gleichungen haben nun dieselbe Form wie die Gleichung für den einfachen Schwingkreis (siehe oben), nur ist L in der einen durch ($L + L_{1,2}$) und in der anderen durch ($L - L_{1,2}$) ersetzt worden. Wir können die Lösungen von dort übernehmen, wobei wir uns jeweils auf die periodische Lösung beschränken können, wie sie für hinreichend kleine Dämpfung (d. h. für hinreichend kleinen Ohmschen Widerstand R) gilt. Die Lösungen lauten:

$$x = K_1\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2\left(L+L_{1,2}\right)}t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L + L_{1,2}\right)C}} + \delta_1\right),$$

$$y = K_2\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2\left(L-L_{1,2}\right)}t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L - L_{1,2}\right)C}} + \delta_2\right).$$

Nach Addition bzw. Subtraktion und Division durch 2 ergibt sich dann

$$I_1 = A_1\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2\left(L+L_{1,2}\right)}t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L + L_{1,2}\right)C}} + \delta_1\right) + A_2\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2\left(L-L_{1,2}\right)}t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L - L_{1,2}\right)C}} + \delta_2\right),$$

$$I_2 = A_1\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2\left(L+L_{1,2}\right)}t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L + L_{1,2}\right)C}} + \delta_1\right) - A_2\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2\left(L-L_{1,2}\right)}t} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L - L_{1,2}\right)C}} + \delta_2\right).$$

Wie man erkennt, sind die beiden Stromstärken im Allgemeinen trotz der Identität der beiden Schwingkreise keineswegs gleich.

Zur Vereinfachung der Diskussion der Lösung nehmen wir zunächst an, es sei $R = 0$. Dann ist der Vorgang ungedämpft, und die Gleichungen lauten:

$$I_1 = A_1 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L + L_{1,2}\right)C}} + \delta_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L - L_{1,2}\right)C}} + \delta_2\right),$$

$$I_2 = A_1 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L + L_{1,2}\right)C}} + \delta_1\right) - A_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L - L_{1,2}\right)C}} + \delta_2\right).$$

Wegen der vier Integrationskonstanten, die von den Anfangsbedingungen abhängen, sind die Lösungen recht vielgestaltig. Das ist nicht verwunderlich, denn die Anfangsbedingungen mit ihren vier Parametern können sehr unterschiedlich sein. Wir wollen daher zunächst zwei sehr spezielle Fälle betrachten und dann einen typischen, etwas allgemeineren Fall.

1. Wir fragen zunächst danach, ob und unter welchen Bedingungen $I_1 = I_2$ sein kann. Dies ist für $A_2 = 0$ der Fall. Die beiden Schwingkreise schwingen dann synchron und gleichsinnig. Zur Veranschaulichung ist hier der analoge Fall zweier gleicher gekoppelter Pendel nützlich. Auch diese können bei geeigneten Anfangsbedingungen synchron und gleichsinnig schwingen.

2. Ist es möglich, dass $I_2 = -I_1$ ist? Dies ist der Fall für $A_1 = 0$. Die Schwingkreise schwingen dann synchron, aber gegensinnig. Auch dieser Fall kann bei zwei gekoppelten Pendeln beobachtet und daran veranschaulicht werden.

3. Wir wollen nun zwei einfache, plausible Anfangsbedingungen festlegen: Es sei $I_1(0) = I_2(0) = 0$. Dann muss $\delta_1 = \delta_2 = 0$ sein. Diesen Fall betrachten wir nun genauer. Es ist dann:

$$I_1 = A_1 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L+L_{1,2}\right)C}}\right) + A_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L-L_{1,2}\right)C}}\right),$$

$$I_2 = A_1 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L+L_{1,2}\right)C}}\right) - A_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\left(L-L_{1,2}\right)C}}\right),$$

oder

$$I_1 = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t, \quad I_2 = A_1 \sin \omega_1 t - A_2 \sin \omega_2 t,$$

$$\text{mit}\ \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(L+L_{1,2}\right)C}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(L-L_{1,2}\right)C}}.$$

Es treten hier also zwei Sinusschwingungen mit unterschiedlichen Kreisfrequenzen auf, von denen keine mit der Eigenkreisfrequenz der beiden Schwingkreise übereinstimmt, und wovon die erste kleiner, die zweite größer als die Eigenkreisfrequenz ist. Wir setzen nun

$$A_2 = A_1 + B \text{ und } A_1 = A,$$

wobei B positiv oder negativ sein kann. Damit wird:

$$I_1 = A\sin \omega_1 t + A\sin \omega_2 t + B\sin \omega_2 t = A\left(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t\right) + B\sin \omega_2 t,$$

$$I_2 = A\sin \omega_1 t + A\sin \omega_2 t + B\sin \omega_2 t = A\left(\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t\right) - B\sin \omega_2 t,$$

und nach einer bekannten goniometrischen Umformung

$$I_1 = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) + B\sin \omega_2 t,$$

$$I_2 = -2A\sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) - B\sin \omega_2 t.$$

Interpretation:

Der erste Term in jeder Gleichung ist eine Sinus- bzw. Kosinusschwingung, deren Kreisfrequenz das arithmetische Mittel von ω_1 und ω_2 ist, und dessen Amplitude gemäß einer Kosinus- bzw. Sinusfunktion mit der (deutlich kleineren) halben Differenz von ω_1 und ω_2 schwankt. In der Akustik wird ein solcher Vorgang als Schwebung bezeichnet.

Die zweiten Terme sind gegenläufige Schwingungen gleicher Frequenz, die sich der Schwebung überlagern. Sie sind möglich, treten aber nur dann auf, wenn sie zu Beginn des Vorgangs in geeigneter Weise angeregt wurden. Normalerweise ist das nicht der Fall, und dann ist $B = 0$ und $A_2 = A_1$.

Falls in den Schwingkreisen Ohmsche Widerstände vorhanden sind, beeinflussen sie die Frequenzen der Schwebung nicht, dämpfen aber deren Amplitude: der Schwebungsvorgang klingt exponentiell ab.