IST DIE TRÄGHEIT EINES KÖRPERS VON SEINEM ENERGIEINHALT ABHÄNGIG?

Albert Einsteins zweite Veröffentlichung zur Speziellen Relativitätstheorie

(Annalen der Physik und Chemie, Jg. 18, 1905, S. 639-641)

Kommentiert und erläutert
von
SIEGFRIED PETRY

06. Januar 2013

Drei Monate nach seiner grundlegenden Arbeit zur Speziellen Relativitätstheorie (»Zur Elektrodynamik bewegter Körper«) veröffentlichte Albert Einstein in den Annalen der Physik einen nur drei Seiten langen Beitrag mit dem Titel: »Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?«, eine seiner vier nobelpreiswürdigen Arbeiten des Jahres 1905. In ihr beweist Einstein, dass Energie träge ist, dass sie also ebenfalls eine der beiden charakteristischen Eigenschaften der Masse (Materie) besitzt.

13. *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?*

von A. Einstein.

Die Resultate einer jüngst in diesen Annalen von mir publizierten elektrodynamischen Untersuchung[1]) führen zu einer sehr interessanten Folgerung, die hier abgeleitet werden soll.

Ich legte dort die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für den leeren Raum nebst dem Maxwellschen Ausdruck für die elektromagnetische Energie des Raumes zugrunde und außerdem das Prinzip:

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Parallel-Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden (Relativitätsprinzip).

Gestützt auf diese Grundlagen[2]) leitete ich unter anderem das nachfolgende Resultat ab (l. c. § 8):

Ein System von ebenen Lichtwellen besitze, auf das Koordinatensystem (x, y, z) bezogen, die Energie l; die Strahlrichtung (Wellennormale) bilde den Winkel φ mit der x-Achse des Systems. Führt man ein neues, gegen das System (x, y, z) in gleichförmiger Paralleltranslation begriffenes Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ein, dessen Ursprung sich mit der Geschwindigkeit v längs der x-Achse bewegt, so besitzt die genannte Lichtmenge — im System (ξ, η, ζ) gemessen — die Energie:

$$l^* = l \frac{1 - \frac{v}{V} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Von diesem Resultat machen wir im folgenden Gebrauch.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

2) Das dort benutzte Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist natürlich in den Maxwellschen Gleichungen enthalten.

Einstein verweist zunächst auf ein in seiner ersten Arbeit abgeleitetes Ergebnis. (Die Abkürzung l. c. steht für »loco citato« – »am angegeben Ort«.) – Einstein formuliert das so genannte Relativitätsprinzip diesmal präzise. Allerdings ist das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erst durch seine eigene grundlegende Arbeit zum »natürlichen« Bestandteil der Maxwellschen Gleichungen geworden

Es befinde sich nun im System (x, y, z) ein ruhender Körper, dessen Energie — auf das System (x, y, z) bezogen — E_0 sei. Relativ zu dem wie oben mit der Geschwindigkeit v bewegten System (ξ, η, ζ) sei die Energie des Körpers H_0.

Dieser Körper sende in einer mit der x-Achse den Winkel φ bildenden Richtung ebene Lichtwellen von der Energie $L/2$ (relativ zu (x, y, z) gemessen) und gleichzeitig eine gleich große Lichtmenge nach der entgegengesetzten Richtung. Hierbei bleibt der Körper in Ruhe in bezug auf das System (x, y, z). Für diesen Vorgang muß das Energieprinzip gelten und zwar (nach dem Prinzip der Relativität) in bezug auf beide Koordinatensysteme. Nennen wir E_1 bez. H_1 die Energie des Körpers nach der Lichtaussendung relativ zum System (x, y, z) bez. (ξ, η, ζ) gemessen, so erhalten wir mit Benutzung der oben angegebenen Relation:

$$E_0 = E_1 + \left[\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right],$$

$$H_0 = H_1 + \left[\frac{L}{2}\,\frac{1 - \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} + \frac{L}{2}\,\frac{1 + \frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right].$$

Durch Subtraktion erhält man aus diesen Gleichungen:

$$(H_0 - E_0) - (H_1 - E_1) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Der hier beschriebene Gedankenversuch ist allerdings utopisch: Ein Körper kann keine ebenen Lichtwellen aussenden, was Einstein gewusst haben muss. Dennoch muss das Ergebnis aus heutiger Sicht nicht falsch sein. Wir brauchen die beiden »Pakete« von ebenen Lichtwellen nur durch zwei Photonen zu ersetzen.

Im Folgenden nenne ich die beiden Bezugssysteme kurz S und Σ. Der betrachtete Körper besitzt in S vor der Emission der beiden Photonen die Energie E_0 (die aus potentieller und innerer Energie bestehen kann), danach die Energie H_0. (H steht hier für das große griechische Eta.) Wenn jede der beiden Photonen die Energie $L/2$ hat, dann ist nach dem Energiesatz der Energieinhalt des Körpers nach der Emission

$$E_1 = E_0 - 2\frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad E_0 = E_1 + L.$$

Nach der oben (S. 639) angegebenen Relation haben die beiden Photonen im System Σ die Energie

$$\frac{L}{2}\frac{1+\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} \quad bzw. \quad \frac{L}{2}\frac{1-\frac{v}{V}\cos\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Aus dem Energiesatz folgt dann wie oben

$$H_0 = H_1 + L\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

und durch Differenzbildung (und nach einer einfachen Umformung) schließlich

$$\left(H_0 - E_0\right) - \left(H_1 - E_1\right) = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Die beiden in diesem Ausdruck auftretenden Differenzen von der Form $H - E$ haben einfache physikalische Bedeutungen. H und E sind Energiewerte desselben Körpers, bezogen auf zwei relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme, wobei der Körper in dem einen System (System (x, y, z)) ruht. Es ist also klar, daß die Differenz $H - E$ sich von der kinetischen Energie K des Körpers in bezug auf das andere System (System (ξ, η, ζ)) nur durch eine additive Konstante C unterscheiden kann, welche von der Wahl der willkürlichen addi-

tiven Konstanten der Energien H und E abhängt. Wir können also setzen:

$$H_0 - E_0 = K_0 + C,$$
$$H_1 - E_1 = K_1 + C,$$

da C sich während der Lichtaussendung nicht ändert. Wir erhalten also:

$$K_0 - K_1 = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Die kinetische Energie des Körpers in bezug auf (ξ, η, ζ) nimmt infolge der Lichtaussendung ab, und zwar um einen von den Qualitäten des Körpers unabhängigen Betrag. Die Differenz $K_0 - K_1$ hängt ferner von der Geschwindigkeit ebenso ab wie die kinetische Energie des Elektrons (l. c. § 10).

Die Differenz $H - E$ ist der Unterschied zwischen den Energien, die der Körper bezüglich des Systems Σ und des Systems S hat – einmal vor der Emission (Index 0), einmal danach (Index 1). Die innere Energie des Körpers ist in beiden Systemen gleich, seine potentiellen Energien unterscheiden sich allenfalls um eine additive Konstante C. Also ist die Differenz $H - E$ gleich der Differenz der kinetischen Energien $K^{\Sigma} - K^{S}$ des Körpers in beiden Systemen plus die Konstante C.

$$H - E = K^{\Sigma} - K^{S} + C.$$

Da der Körper im System S keine Geschwindigkeit hat, ist $K^S = 0$ und daher

$$H - E = K^{\Sigma} - C =: K - C,$$

und folglich

$$H_0 - E_0 = K_0 + C \quad und \quad H_1 - E_1 = K_1 + C.$$

Für die Differenz gilt also

$$\left(H_0 - E_0\right) - \left(H_1 - E_1\right) = K_0 - K_1 = L\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right\}.$$

Mit der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}} = \left[1-\left(\frac{v}{V}\right)^2\right]^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{V}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{V}\right)^4 - \ldots$$

ergibt sich

$$K_0 - K_1 \approx \frac{1}{2} L \frac{v^2}{V^2}.$$

Da der Körper (auch) im System Σ seine Geschwindigkeit nicht ändert, kann die Abnahme seiner kinetischen Energie nur auf einer Verringerung seiner Masse beruhen. Es muss also (für nicht allzu große Geschwindigkeiten v) sein

$$K_0 - K_1 = \Delta m \frac{v^2}{2}.$$

Ein Vergleich ergibt das berühmt gewordene Resultat

$$\Delta m = \frac{L}{V^2} \quad \Rightarrow \quad L = \Delta m\, V^2$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

Gibt ein Körper die Energie L in Form von Strahlung ab, so verkleinert sich seine Masse um L/V^2. Hierbei ist es offenbar unwesentlich, daß die dem Körper entzogene Energie gerade in Energie der Strahlung übergeht, so daß wir zu der allgemeineren Folgerung geführt werden:

Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ändert sich die Energie um L, so ändert sich die Masse in demselben Sinne um $L/9.10^{20}$, wenn die Energie in Erg und die Masse in Grammen gemessen wird.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß bei Körpern, deren Energieinhalt in hohem Maße veränderlich ist (z. B. bei den Radiumsalzen), eine Prüfung der Theorie gelingen wird.

Wenn die Theorie den Tatsachen entspricht, so überträgt die Strahlung Trägheit zwischen den emittierenden und absorbierenden Körpern.

Bern, September 1905.

(Eingegangen 27. September 1905.)

»*Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt; ...*« Diese Aussage greift weit über das hinaus, was Einstein im Vorangegangenen bewiesen hat. Viel näher als diese kühne Verallgemeinerung lag damals die Möglichkeit, die am Beispiel der Strahlungsenergie gewonnene Erkenntnis der Trägheit der Energie auch für die kinetische Energie eines schnell bewegten Körpers zu bestätigen. Dies geschieht im Folgenden:

In § 10 der grundlegenden Arbeit Einsteins zur Speziellen Relativitätstheorie mit dem Titel „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (siehe dazu den gleichnamigen Aufsatz auf dieser Website) findet Einstein für die kinetische Energie W eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Körpers der Masse μ

$$W = \mu V^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}} - 1 \right).$$

Diese Energie müsste nach dem oben Gezeigten die Trägheit einer Masse m_W haben, für die gilt

$$m_W = \frac{W}{V^2} = \mu\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} - 1\right).$$

Addiert man zu dieser Masse die Masse μ des Körpers, so erhält man

$$\mu + m_W = \frac{\mu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}.$$

Dieser Wert ist identisch mit der so genannten transversalen Masse des Körpers[1]. Diese besteht also, wie obige Gleichung zeigt, aus der so genannten Ruhemasse μ des Körpers und der Masse m_W seiner kinetischen Energie. Ihre Summe bestimmt die Trägheit des Körpers bei Beschleunigung transversal (senkrecht) zur Bewegungsrichtung des Körpers, wobei sich seine Bahngeschwindigkeit v nicht ändert.
Der zweite Schritt ist die Untersuchung der so genannten longitudinalen Masse. Sie tritt in Erscheinung bei Beschleunigung des Körpers in Richtung seiner Geschwindigkeit (longitudinale Beschleunigung). Sie ist größer als die transversale Masse, weil nun nicht nur die Geschwindigkeit des Körpers erhöht wird, sondern mit dieser auch die Masse seiner kinetischen Energie. Dazu aber ist eine zusätzliche Energie erforderlich.

Gehen wir vom dynamischen Grundgesetz in der Form

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

aus und setzen

$$p = (\mu + m_W)v = \frac{\mu v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}},$$

so ergibt sich für den Fall, dass v sich ändert,

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} = \frac{\mu}{\left(1-\frac{v^2}{V^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu}{\left(1-\frac{v^2}{V^2}\right)^{3/2}}a.$$

Der Körper verhält sich demnach so, als hätte er die Masse

$$\frac{\mu}{\left(1-\frac{v^2}{V^2}\right)^{3/2}},$$

die mit der so genannten longitudinalen Masse identisch ist.

[1] Die Begriffe „longitudinale und transversale Masse“ wurden schon vor Einsteins Arbeiten eingeführt.