Anlage 01: Das Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Im (relativ zu *S* mit der Geschwindigkeit *v*) bewegten System *S'* bewege sich ein Körper *K* auf der *X'*-Achse mit der Geschwindigkeit *u*' nach rechts.

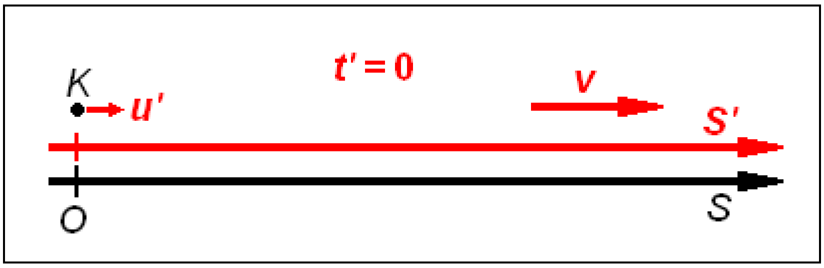

Abb. 1: Die Bezugssysteme zur Zeit $t = 0$

Nach der Newtonschen Physik hat der Körper in Bezug auf das System *S* die Geschwindigkeit

$$u = v + u'$$

Welche Geschwindigkeit hat der Körper nach der Relativitätstheorie im System *S*?

Zur Beantwortung der Frage gibt es zwei Möglichkeiten:

- eine anschauliche Methode (bei der man jedoch auch um etwas Rechnen nicht herumkommt),
- und eine formale Methode, die sich der Differentialrechnung bedient. Sie erweist sich in diesem Fall (ausnahmsweise) als erheblich umständlicher.

1. Die anschauliche Methode

Der Körper *K* befinde sich zur Zeit $t' = 0$ in *O'* (siehe Abb. 1). Zu einer beliebigen Zeit *t'* befinde er sich bei der Marke *P* mit $x' = u' t'$.

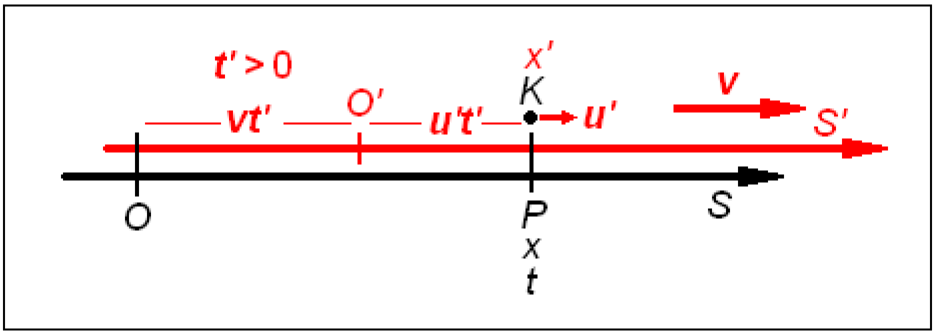

Abb. 2: Die Bezugssysteme zur Zeit $t > 0$

Ein Beobachter in *S*, der sich ebenfalls an der Marke *P* befindet, berechnet die Geschwindigkeit des Körpers aus dem zurückgelegten Weg *x* und der entsprechenden Zeit *t*. Die Koordinaten *x* und *t* müssen aus den Lorentz-Transformationen berechnet werden. Mit $x' = u' t'$ ergibt sich aus der entsprechenden Gleichung

$$x = \frac{u't' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Daraus folgt

$$u = \frac{x}{t} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Wie man sieht, ist dieser Wert kleiner als *u’* + *v,* und zwar weicht *u* umso mehr von der Summe *u’* + *v* ab, je größer *u’* und *v* sind.

Beispiel: Nehmen wir an, es sei *u‘* = *v* = 300 000 km/s, dann ergibt sich für *u* nicht etwa 600 000 km/s, sondern lediglich ebenfalls 300 000 km/s.

Das Additionstheorem entspricht also dem Prinzip, dass kein Körper sich für irgendeinen Beobachter schneller als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen kann.

2. Die formale Methode

Da in der Differentialschreibweise *u* = d*x*/d*t* ist, differenziert man die Gleichung

$$x = \frac{x' + v\,t'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

nach der Kettenregel:

$$u = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{u'\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} + v\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\left(u' + v\right)\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Der Differentialquotient d*t*’/d*t* ergibt sich durch Differenzieren aus der Gleichung

$$t' = \frac{t - \frac{v\,x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}:$$

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \frac{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Setzt man dies in die Gleichung für *u* ein, erhält man nach einigen Umformungen schließlich dasselbe Ergebnis wie oben bei der 1. Methode.