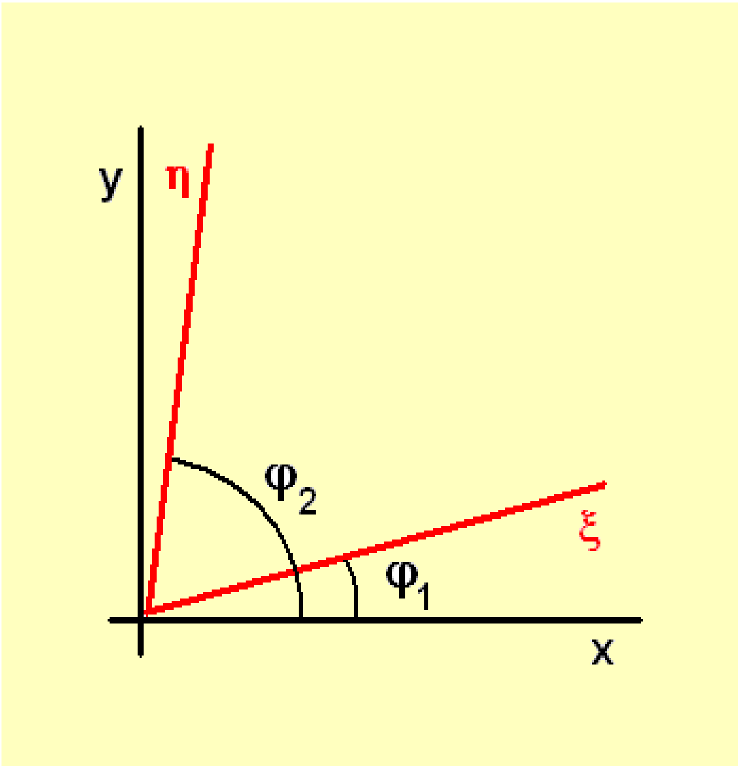
# Anlage 08: Die Lorentz-Transformation als Transformation von einem rechtwinkligen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem

In der Analytischen Geometrie gelten für die Koordinatentransformation von einem rechtwinkligen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem folgende Beziehungen:

$$x = \xi \cos\varphi_1 + \eta \cos\varphi_2 \qquad \xi = \frac{-x\sin\varphi_2 + y\cos\varphi_2}{\sin\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$y = \xi \sin\varphi_1 + \eta \sin\varphi_2 \qquad \eta = \frac{x\sin\varphi_1 - y\cos\varphi_1}{\sin\,(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

*x, y* Koordinaten im rechtwinkligen System
*ξ, η* Koordinaten im schiefwinkligen System
$\varphi_1$ Winkel zwischen x-Achse und $\xi$-Achse
$\varphi_2$ Winkel zwischen x-Achse und $\eta$-Achse




Den Winkel $\varphi_1$ nennen wir $\alpha$. Wenn die Achsen des schiefwinkligen Systems symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten sind, wird $\varphi_2 = (90° - \alpha)$ und

$$\sin\varphi_2 = \sin\,(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\varphi_2 = \cos\,(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin\,(\varphi_1 - \varphi_2) = -\sin\,(\varphi_2 - \varphi_1) = -\sin\,(90° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$$

Dann lauten die Transformationsgleichungen:

$$x = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha \qquad \xi = \frac{-x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\cos 2\alpha}$$
$$y = \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha \qquad \eta = \frac{x\sin\alpha - y\cos\alpha}{-\cos 2\alpha}$$

Da tan *α* = *ß* = *v*/c bekannt ist, drücken wir alle auftretenden Winkelfunktionen durch tan *α* aus. Dabei werden folgende Umformungen benutzt:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

Damit ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} x &= \xi\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} + \eta\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \xi\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} + \eta\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} \\ y &= \xi\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} + \eta\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \xi\frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} + \eta\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \end{aligned} \qquad (1)$$

Nun sollen die Einheitsstrecken auf den Achsen des schiefwinkligen Koordinatensystems im Verhältnis

$$\frac{e'}{e} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2a}}$$

gestreckt werden (vergl. dazu Anlage 4). Dabei ist

*e*' die neue Einheitsstrecke und
*e* die ursprüngliche Einheitsstrecke
(gleichzeitig die Einheitstrecke auf den rechtwinkligen Achsen)

Das hat zur Folge, dass die Koordinaten eines jeden Punktes im schiefwinkligen System entsprechend – und das heißt: im reziproken Verhältnis – kleiner werden. Bezeichnen wir die neuen Koordinaten mit *x*' und *w*' und ersetzen gleichzeitig *y* durch *w*, dann gilt

$$\frac{x'}{\xi} = \sqrt{\cos 2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{x'}{\sqrt{\cos 2\alpha}} = x'\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$\frac{w'}{\eta} = \sqrt{\cos 2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{w'}{\sqrt{\cos 2\alpha}} = w'\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

In die Gleichungen (1) eingesetzt ergibt sich nach einfachen Umformungen:

$$x = \frac{x' + \beta\, w'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad w = \frac{w' + \beta\, x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den entsprechenden Gleichungen der Lorentz-Transformationen.

Wegen der Gleichberechtigung der beiden Systeme folgt daraus (nach Vertauschung des Vorzeichens von *ß,* weil die Geschwindigkeit *v* durch –*v* zu ersetzen ist )

$$x' = \frac{x - \beta\, w}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad w' = \frac{w - \beta\, x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Damit ist gezeigt, dass die Lorentz-Transformationen identisch sind mit Koordinaten-Transformationsgleichungen von einem rechtwinkligen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem der beschriebenen Art.

Dieses schiefwinklige Koordinatensystem ist – wie ich an anderer Stelle gezeigt habe – gleichzeitig die Abbildung eines in der pseudoeuklidischen Ebene gelegenen rechtwinkligen gedrehten Koordinatensystems in die euklidische Ebene.