Anlage 05: Herleitung der Ergebnisse der Speziellen Relativitätstheorie aus der Annahme, unser Erfahrungsraum bewege sich mit Lichtgeschwindigkeit in einem pseudoeuklidischen Raum bestimmter Metrik.

Annahme: Ein beliebiges Inertialsystem S unseres Erfahrungsraumes R_3 (X, Y, Z) bewege sich mit Lichtgeschwindigkeit c in Richtung der vierten Dimension (W) eines vierdimensionalen pseudoeuklidischen Raumes R_4 (W, X, Y, Z) mit dem Fundamental-Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Der Fundamental-Tensor bedeutet: In diesem Raum ist das Quadrat des Abstandes d eines Punktes P (w, x, y, z) vom Ursprung O:

$$d^2 = w^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Das in der Annahme genannte Inertialsystem S wird auf eine einzige Dimensionen (X) reduziert und wird im Folgenden Bezugssystem S genannt. Der Ursprung O seiner X-Achse bewege sich gemäß obiger Annahme mit Lichtgeschwindigkeit c längs der W-Achse, also in Richtung der vierten Dimension, nach oben. Die W-Koordinate eines jeden Punktes der X-Achse zur Zeit t ist also $w_P = c\, t$.

Ein Lichtimpuls, der sich von O aus längs der X-Achse ausbreitet, bewegt sich auf dieser genau so schnell nach rechts, wie sich die X-Achse nach oben bewegt. Das bedeutet, dass sich der Lichtimpuls im vierdimensionalen Raum (der hier auf zwei Dimensionen reduziert ist) auf der Winkelhalbierenden der beiden Achsen bewegt.

Die X'-Achse eines zweiten Bezugssystems S' bewege sich mit der Geschwindigkeit v auf der X-Achse des ersten Systems. Der Ursprung von S' sei O' und falle zur Zeit $t = 0$ mit O zusammen. (Siehe Abbildung)

Zur Zeit $t = t_1$ befindet sich O in O_1 und hat die W-Koordinate $w_1 = c\, t_1$. O' hat sich auf der X-Achse um die Strecke $v\, t_1$ nach rechts bewegt und befindet sich nun in O'_1. Die Gerade $O'O'_1$ ist die W'-Achse des Systems S' und steht im vierdimensionalen Raum auf der X'-Achse senkrecht. (Über die grundsätzliche Schwierigkeit, eine pseudoeuklidische Ebene in eine euklidische Ebene abzubilden, und darüber, wie man diese Schwierigkeiten wenigstens teilweise überwinden kann, wurde oben schon berichtet.)

Betrachten wir nun einen beliebigen Punkt P_1 (x_1, w_1) auf der Winkelhalbierenden der X- und W-Achse. Seine Koordinaten in S' seien (x_1', w_1'). Für das Abstandsquadrat $(OP)^2$ gilt:

$$(OP)^2 = w_1^2 - x_1^2 = (w'_1)^2 - (x'_1)^2$$

Wegen $w_1 = x_1$ ist $(OP)^2 = 0$ und daher auch $w'_1 = x'_1$. Das bedeutet, dass die Winkelhalbierende der X- und W-Achse gleichzeitig die Winkelhalbierende der X'- und W'-Achse ist. Daraus folgt, dass die X'-Achse gegenüber der X-Achse um den gleichen Winkel α gedreht ist wie die W'-Achse gegenüber der W-Achse, nur in entgegengesetzter Richtung. (Letzteres gilt nur für die Abbildung in der euklidischen Ebene. In der pseudoeuklidischen Ebene steht die W'-Achse natürlich auf der X'-Achse senkrecht.)

Dass sich der Lichtimpuls auch im *X′W′*-System auf der Winkelhalbierenden bewegt, bedeutet übrigens, dass sich der Punkt *O′* auf der *W′*-Achse genau so schnell nach oben bewegt, wie sich ein Lichtimpuls längs der *X′*-Achse ausbreitet. Damit ist aber noch nichts darüber ausgesagt, wie groß diese Geschwindigkeit ist.

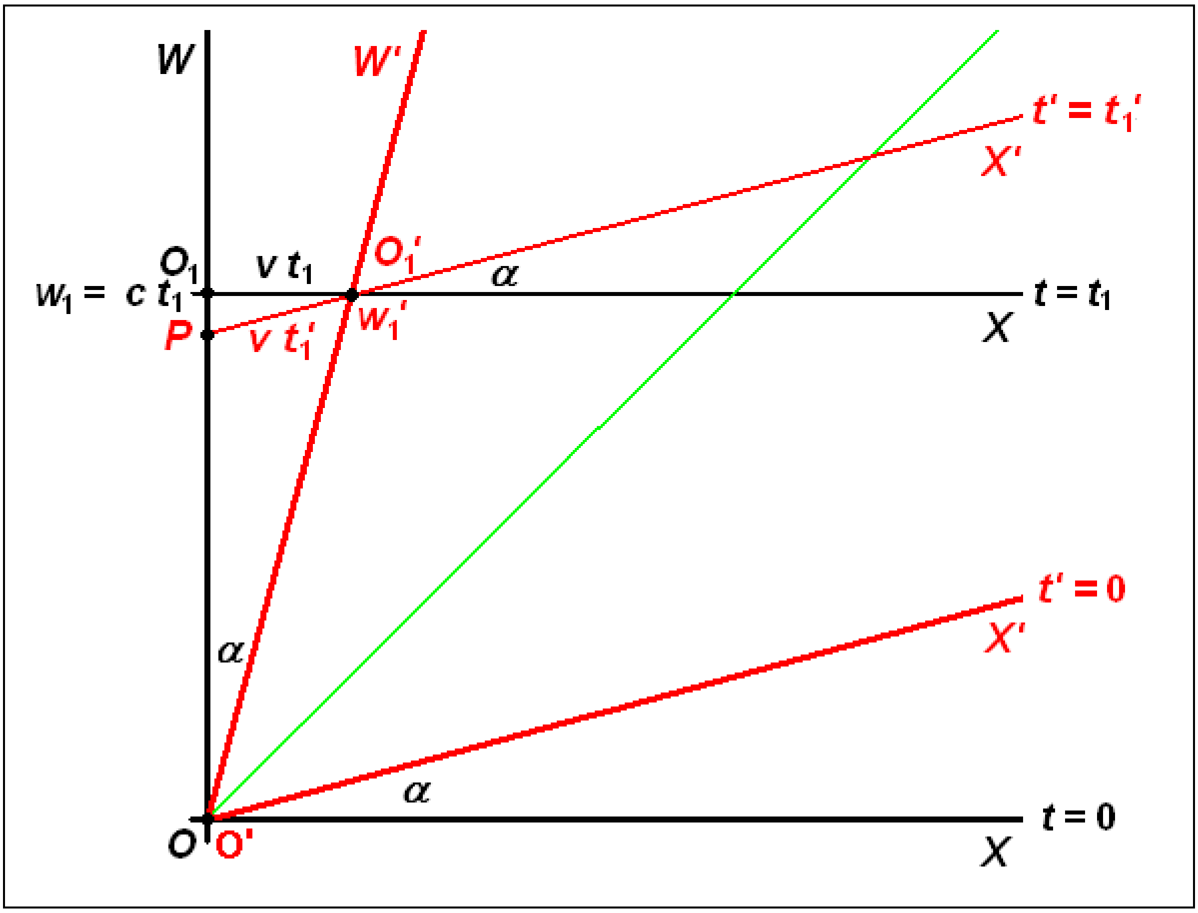

Abb. 1: Weltlinie eines Lichtstrahls

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke OO_1O_1' und $O_1'O_1P$ ist

$$(v\,t_1)\,/\,(v\,t'_1) = w_1\,/\,w'_1 \quad \text{woraus folgt:} \quad w'_1\,/\,t'_1 = w_1\,/\,t_1$$

(Bei der Abbildung der pseudoeuklidischen Ebene in die euklidische Ebene sind – wie früher gezeigt wurde – Änderungen des Maßstabes [und damit Änderungen der Einheitsstrecken] auf der X'- und W'-Achse erforderlich. Diese Veränderungen wirken sich auf die Strecken $O'O_1'$ und $O_1'P$ in gleicher Weise aus und ändern daher an der Proportionalität nichts.)

Mit $w_1 / t_1 = c$ ergibt sich dann: $w'_1 = c\,t'_1$

Das bedeutet, dass sich *O′* und damit auch das System *S′* mit Lichtgeschwindigkeit *c* nach oben bewegt. Da sich der oben betrachtete Lichtimpuls auf der Winkelhalbierenden von *W′*- und *X′*-Achse bewegt, ist seine Geschwindigkeit genau so groß wie die Geschwindigkeit von *O′*. Das heißt: Die Lichtgeschwindigkeit ist in beiden Systemen gleich.

Ergebnis: Wenn irgendein beliebiges Inertialsystem unseres Erfahrungsraumes sich mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung der vierten Dimension eines vierdimensionalen pseudoeuklidischen Raumes oben beschriebener Metrik bewegt, dann tun das alle anderen Inertialsysteme auch, und die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Systemen gleich.

Aus der Gleichberechtigung der Inertialsysteme und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgt in bekannter Weise dann die gesamte Spezielle Relativitätstheorie. Alternativ zu diesem

Schluss lässt sich jedoch auch zeigen, dass die Transformationsformeln für die Koordinaten (X,W) und (X',W') identisch sind mit den Lorentz-Transformationen.

Ferner lässt sich unschwer zeigen:
Würde sich das System S mit der Geschwindigkeit $u < c$ in Richtung der W-Achse bewegen, dann würde sich zwar das System S' mit derselben Geschwindigkeit u in Richtung der W'-Achse bewegen, aber die Lichtgeschwindigkeit hätte im System S' einen anderen Wert als im System S. Für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen ist also notwendig, dass sich die Systeme mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung der jeweiligen W-Achse bewegen. Der Beweis findet sich in Anlage 6.