Anlage 02: Die Relativität der Beschleunigung

1 Die longitudinale Beschleunigung (Beschleunigung in Richtung der Bewegung)

Auch hier gibt es zwei Methoden der Herleitung, eine relativ anschauliche und eine rein formale.

1.1 Die anschauliche Methode

Im System S' befinde sich zur Zeit *t'* = 0 ein Körper *K* in *O* in Ruhe. Seine Relativgeschwindigkeit gegenüber dem System sei in diesem Moment also

$$u' = 0.$$

Dies kann durch geeignete Wahl (der Geschwindigkeit) des Systems *S'* immer erreicht werden.

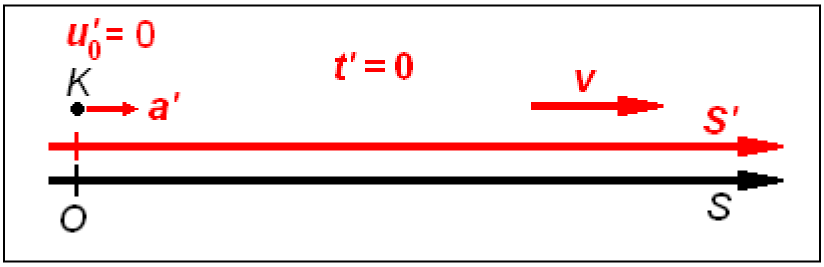

Abb. 1: Die Systeme zur Zeit *t'* = 0

Die Relativgeschwindigkeit u_0 des Körpers gegenüber dem System *S* ist dann zur Zeit *t'* = 0 gleich der Geschwindigkeit *v* des Systems *S'* gegenüber dem System *S*:

$$u_0 = v$$

Der Körper *K* erfahre nun gegenüber *S'* eine konstante Beschleunigung *a*'. Zur Zeit t_1' hat er dann die Koordinate

$$x' = \frac{a'}{2}(t_1')^2$$

und die Geschwindigkeit

$$u_1' = a' t_1'$$

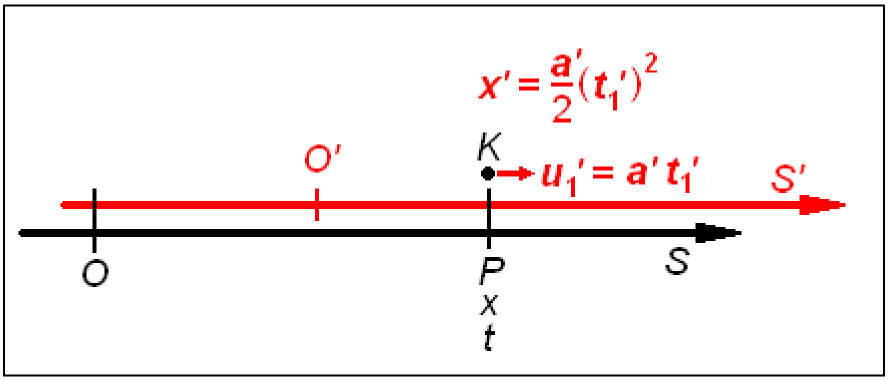

Abb. 2: Die Systeme zur Zeit $t_1' > 0$

Seine Geschwindigkeit gegenüber dem System *S* ist dann nach dem Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$u_1 = \frac{v + u_1'}{1 + \frac{v\,u_1'}{c^2}}$$

Seine Geschwindigkeitszunahme im betrachteten Intervall gegenüber dem System *S* beträgt dann

$$\Delta u = u_1 - u_0 = \frac{v + u_1'}{1 + \frac{v\,u_1'}{c^2}} - v = \frac{u_1'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 + \frac{v\,u_1'}{c^2}}$$

Die im System *S* für diese Geschwindigkeitserhöhung benötigte Zeit ist

$$\Delta t = t_1 - t_0 = t_1 \quad (\text{wegen } t_0 = 0)$$

t_1 findet man mit Hilfe der entsprechenden Gleichung der Lorentz-Transformationen:

$$\Delta t = t_1 = \frac{t_1' + \frac{v\,x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_1' + \frac{v\,a'(t_1')^2}{2c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = t'_1 \frac{1 + \frac{v\,a' t_1'}{2c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Die mittlere Beschleunigung a_m des Körpers im Zeitintervall Δt ist

$$a_m = \Delta u / \Delta t$$

Für Δt gegen 0, was gleichbedeutend ist mit t_1' gegen 0, geht a_m gegen *a*; das ist die momentane Beschleunigung des Körpers *K* im System *S* zur Zeit $t = 0$. Durch Einsetzen der oben berechneten Werte für Δu und Δt in die obige Gleichung für a_m erhält man nach einigen Umformungen und mit $t_1' = 0$ schließlich

$$a = a'\left(1 - \beta^2\right)^{3/2}$$

1.2 Die formale Methode

Aus dem Additionstheorem

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{v u'}{c^2}}$$

erhält man mit der Abkürzung *N* für den Nenner des Bruches

$$a = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}\right) N - \frac{(v + u')\left(u' \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}\right)}{c^2}}{N^2}$$

Da die Relativgeschwindigkeit *v* der beiden Systeme konstant ist, ist d*v*/d*t* = 0. Da der Körper *K* zur Zeit *t'* = 0 in *S'* ruht, ist $u'_0 = 0$ und damit *N* = 1. So ergibt sich

$$a = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}\left(1 - \beta^2\right) = \frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\left(1 - \beta^2\right)$$

und mit d*u'*/d*t'* = *a'*

$$a = a' \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t}\left(1 - \beta^2\right).$$

Aus der entsprechenden Gleichung der Lorentz-Transformation ergibt sich mit *x'* = 0:

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

und somit

$$a = a'\left(1 - \beta^2\right)^{3/2}.$$

Ein im System *S'* gleichmäßig beschleunigter Körper erfährt auch für einen Beobachter in *S* eine konstante, allerdings verringerte Beschleunigung.

2 Die transversale Beschleunigung (Beschleunigung quer zur Relativbewegung)

Hier begnüge ich mich mit der sehr einfachen formalen Herleitung. Es ist

$$y = y',$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \quad \text{oder} \quad u_Y = u'_Y \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Die Geschwindigkeit eines parallel zur *Y/Y'*-Achse bewegten Körpers ist also im System *S* kleiner als im System *S'*, was darauf beruht, dass die in *S'* ruhende Uhr gegenüber der Vergleichsuhr in *S* nachgeht. - Neuerliches Differenzieren ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}u_Y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u'_Y}{\mathrm{d}t'} \frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\mathrm{d}u'_Y}{\mathrm{d}t'}\left(1 - \beta^2\right),$$

und somit

$$a_Y = a'_Y \left(1-\beta^2\right).$$

Worauf beruht der Unterschied der beiden Ergebnisse?

Auch dies ist ohne weiteres verständlich: Im zweiten Fall (Transversalbeschleunigung) ist a_Y lediglich darum kleiner als a'_Y, weil die Uhr des Beobachters in *S* gegenüber der in *S'* ruhende Uhr vorgeht. Wegen der zweimaligen Differentiation nach *t* tritt der Faktor $(1 - \beta^2)^{1/2}$ zweimal auf. Dieser Effekt findet sich auch bei der longitudinalen Beschleunigung, hier kommt aber noch hinzu, dass die Geschwindigkeit in *S* wegen des relativistischen Additionstheorems für Geschwindigkeiten langsamer wächst als in *S'*.