Anlage 07: Herleitung des Additionstheorems für Geschwindigkeiten aus der pseudoeuklidischen Struktur des vierdimensionalen Raumes

1. Vorbemerkungen

Zu dem in der Überschrift genannten Ziel führt – soweit ich sehen kann – kein ganz einfacher und direkter Weg; ich muss daher etwas ausholen.

Wie ich weiter oben gezeigt habe, lässt sich die pseudoeuklidische $\underline{XW}$-Ebene $\underline{E}$ unter Beachtung einiger einfacher Regeln in die euklidische XW-Ebene E abbilden. (Im Folgenden kennzeichne ich die pseudoeuklidischen Elemente durch Unterstreichung.) Abbildung der Ebene $\underline{E}$ in die Ebene E bedeutet: Jedem Punkt $\underline{P}$ ($\underline{x}$, $\underline{w}$) der Ebene $\underline{E}$ wird umkehrbar eindeutig ein Punkt P (x, w) der Ebene E zugeordnet.

Wir verabreden zunächst, dass stets

$$\underline{x} = x \quad \text{und} \quad \underline{w} = w$$

sei, das heißt, einander zugeordnete Punkte $\underline{P}$ und P sollen gleiche Koordinaten haben.

Es ist nützlich, die Modalitäten dieser Abbildung zunächst zu wiederholen und zu vertiefen:

1. Jedes beliebige rechtwinklige Koordinatensystem $\underline{K}$ der Ebene $\underline{E}$ kann – für sich genommen – durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem K in der Ebene E abgebildet werden. Ein zweites rechtwinkliges Koordinatensystem $\underline{K}$' in $\underline{E}$, das gegenüber dem ersten um den gemeinsamen Ursprung $O = \underline{O}$ gedreht ist, aber wird in E durch ein **schiefwinkliges** Koordinatensystem *K'* abgebildet, dessen Achsen um gleiche Winkel in entgegengesetzte Richtungen gedreht sind und bei dem die Einheitsstrecken *e'* auf den Achsen in bestimmter Weise verlängert sind.

2. Der Metrik der pseudoeuklidischen Ebene entsprechend ist das Quadrat $\underline{d}^2$ des Abstandes $\underline{d} = \underline{OP}$ eines Punktes $\underline{P}$ ($\underline{x}$, $\underline{w}$) vom Ursprung $\underline{O}$ des Koordinatensystems $\underline{K}$

$$\underline{d}^2 = \underline{w}^2 - \underline{x}^2$$

Wie man sieht, kann dieses Abstandsquadrat negativ werden. Für die Punkte der Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen, also für $w = \pm x$, wird $\underline{d}^2 = 0$. In der Ebene $\underline{E}$ gibt es also Punkte, die vom Ursprung den Abstand null haben und doch nicht mit ihm zusammenfallen.

3. Die Menge aller Punkte $\underline{P}_i$, die von $\underline{O}$ den gleichen Abstand r haben, bilden einen „pseudoeuklidischen Kreis" mit dem Radius r um $\underline{O}$. Die Gleichung dieses Kreises ist

$$\underline{w}^2 - \underline{x}^2 = r^2$$

Dieser Kreis wird in der Ebene E durch eine gleichseitige Hyperbel mit den Halbachsen $a = b = r$ abgebildet. Ihre Gleichung ist

$$w^2 - x^2 = r^2$$

Der mathematische Begriff »Abbildung« bezeichnet lediglich eine Zuordnung von Punkten und bedeutet nicht, dass z. B. zwischen einer Kurve und ihrer Abbildung irgendeine Ähnlichkeit besteht, wie das bei einer fotografischen Abbildung der Fall ist. Immerhin aber hat der pseudoeuklidische Kreis mit seiner Abbildung, der Hyperbel, gemeinsam, dass er sich nach vier Richtungen ins Unendliche erstreckt, weil nämlich für jeden Wert von r die Beträge der Koordinaten $\underline{x}$ und $\underline{y}$ beliebig groß werden können.

2. Die Hyperbelfunktionen

Die Hyperbelfunktionen heißen so, weil sie zur Parameterdarstellung von Hyperbeln benutzt werden können. Setzt man nämlich

$$x = r\ \sinh\varphi$$
$$w = r\ \cosh\varphi$$
$$(-\infty\ < \varphi < +\infty)$$

so ist

$$w^2 - x^2 = r^2(\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi) = r^2\ ,$$
$$\text{da}\ \ \cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1\ \text{ ist.}$$

Welche Bedeutung der Parameter *φ* hat, ist in der euklidischen Ebene schwer zu zeigen. In der pseudoeuklidischen Ebene dagegen ist

$$\underline{x} = r \sinh \varphi$$
$$\underline{w} = r \cosh \varphi$$

die Parameterdarstellung eines pseudoeuklidischen Kreises mit dem Radius *r*. Der Winkel *φ* ist der zu dem jeweiligen Kreispunkt gehörige Mittelpunktswinkel. Aus der Parameterdarstellung folgt, dass

$$\frac{\underline{x}}{\underline{w}} = \tanh\varphi = \frac{x}{w}$$

ist. In der euklidischen Ebene aber gilt auch (siehe Abb. 1)

$$\frac{x}{w} = \tan\psi$$

wobei ψ der Winkel ist, den *OP* mit der *W*-Achse einschließt.

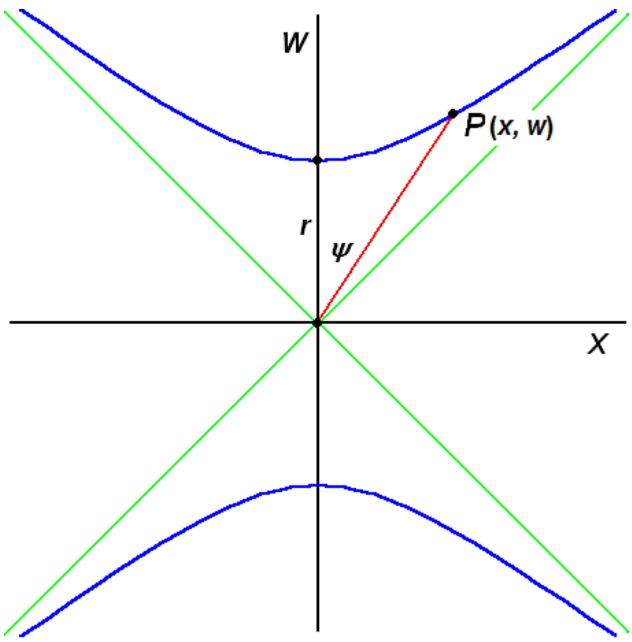

Abbildung 1

Durch Vergleich der beiden Gleichungen ergibt sich

$$\tanh \varphi = \tan \psi$$

Also kann man sagen: Der Parameter φ ist der Winkel, dessen Hyperbeltangens gleich dem Tangens von ψ ist. Durch eine Gleichung ausgedrückt:

$$\varphi = \operatorname{ar\,tanh}(\tan\psi) = \operatorname{ar\,tanh}\frac{x}{w}$$

$$\text{Für } \frac{x}{w} \to \pm 1 \quad \text{oder} \quad \psi \to \pm\frac{\pi}{4} \text{ geht } \varphi \to \pm\infty.$$

Dies wird verständlich, wenn man bedenkt, dass der Winkel φ durch die Bogenlänge des pseudoeuklidischen Einheitskreises gemessen wird, der sich nach vier Richtungen uns Unendliche erstreckt, wobei die Bogenlänge ebenfalls gegen unendlich geht. (Nebenbemerkung: Aus dem oben Gesagten wird klar, warum der Winkel ψ nicht größer als $\pi/4$ werden kann, was darauf hinausläuft, dass es keine größere Geschwindigkeit als *c* gibt.)

Damit sind nun endlich die Voraussetzungen für die Lösung unserer Aufgabe bereitgestellt.

3. Die Herleitung des Additionstheorems für Geschwindigkeiten

Wir betrachten drei Koordinatensysteme $K_{0,}$ K_1 und K_2 in der Ebene *E*. K_0 sei rechtwinklig, K_1 und K_2 seien schiefwinklig. Ihnen entsprechen drei Bezugssysteme *S*, *S'* und *S"*. *S'* bewege sich gegenüber *S* mit der Geschwindigkeit v_1 nach rechts, *S"* bewege sich gegenüber *S* mit der Geschwindigkeit v_2 nach links. Dementsprechend bildet die *W'*-Achse mit der *W*-Achse den Winkel α_1, wobei $\tan \alpha_1 = v_1/c$ ist, und die *W"*-Achse bildet mit der *W*-Achse den Winkel α_2 mit $\tan \alpha_2 = v_2/c$.

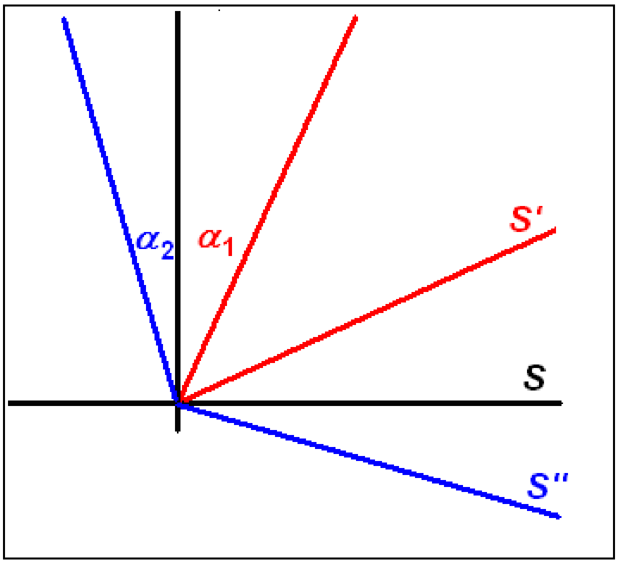

Abbildung 2

Wir fragen nun nach der Relativgeschwindigkeit *v* der Bezugssysteme *S'* und *S"* und betrachten dazu die Winkel φ_1 und φ_2, die in der pseudoeuklidischen Ebene den Winkeln α_1 und α_2 entsprechen. Ihre Summe nennen wir φ:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Dann ist nach dem Additionstheorem für den Hyperbeltangens:

$$\tanh \varphi = \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = (\tanh \varphi_1 + \tanh \varphi_2) / (1 + \tanh \varphi_1 \tanh \varphi_2)$$
$$= (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2) / (1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2)$$
$$= (v_1/c + v_2/c) / (1 + v_1 v_2/c^2)$$

Dem Winkel φ entspricht in der euklidischen Ebene ein Winkel α derart, dass

$$\tanh \varphi = \tan \alpha = v/c$$

wobei v die gesuchte Relativgeschwindigkeit von *S'* gegenüber *S''* ist. Setzt man dies in die obere Gleichung ein und multipliziert diese dann mit c, so erhält man das bekannte Additionstheorem für die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$