EINFÜHRUNG IN DIE TENSORRECHNUNG

Teil 1

SIEGFRIED PETRY

Neufassung vom 7. Juni 2016

I n h a l t

1 Was sind Tensoren?

Hier geht es um drei verschiedene Arten von Tensoren:
Skalare (das sind reelle Zahlen); sie heißen Tensoren 0. Stufe.
„Freie“ (d. h. nicht an einen Angriffspunkt oder an eine Achse gebundene) physikalische Vektoren sind gerichtete physikalische Größen („vektorielle Größen“), zu deren vollständiger Beschreibung außer ihrem Größenwert ihre Richtung gehört. Sie heißen Tensoren 1. Stufe.
Tensoren 2. Stufe; das sind (vorerst) mathematische Operatoren, durch deren Anwendung auf einen Vektor ein anderer Vektor mit bestimmten Eigenschaften entsteht.

Alle Tensoren können durch **Matrizen** beschrieben werden. Eine Matrix vom Typ (m, n) ist ein rechteckiges Schema von m mal n Größen, die in m Zeilen (waagerechte Reihen) und n Spalten (senkrechte Reihen) angeordnet sind. Diese Größen heißen Elemente der Matrix. Das Element a_{ik} (auch A_{ik}) der Matrix $\boldsymbol{A}$ steht in der i-ten Zeile und in der k-ten Spalte. Die Elemente der Matrix können reelle oder komplexe Zahlen sein, aber auch andere mathematische Objekte, wie Vektoren, Polynome, Determinanten, Differentiale und andere.

Die Matrix eines Tensors 0. Stufe besteht nur aus einer einzigen Zahl, eben dem Skalar. Man ist übereingekommen, die Matrix mit dieser Zahl gleichzusetzen:

$$(a) = a$$

Ein (physikalischer) Vektor (zum Beispiel eine Kraft) wird beschrieben durch einen Pfeil von bestimmter Richtung (im Beispiel: die Richtung der Kraft) und von bestimmter Länge, die nach einem verabredeten Maßstab dem Größenwert (hier der Kraft) entspricht. (Beispiel: 1 cm entspricht 10 N.) Ein Vektor $\boldsymbol{v}$ kann mathematisch beschrieben werden durch seine „skalaren Komponenten“ v_1, v_2, v_3 , die auf ein definiertes dreidimensionales Koordinatensystem (Basissystem, Basis) bezogen sind, das durch drei nicht komplanare (nicht in einer Ebene liegende) Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$ gebildet wird.

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3. \tag{1.1}$$

Die Wahl des Basissystems ist beliebig. Die skalaren Komponenten des Vektors ändern sich, wenn man ein anderes Basissystem wählt. Der Vektor selbst bleibt dabei unverändert. Diese Unabhängigkeit vom Basissystem („Invarianz gegenüber Koordinatentransformation“ genannt) ist eine grundlegende Eigenschaft aller Tensoren. Die Beschreibung eines Tensors 1. Stufe , also eines physikalischen Vektors, kann durch eine Matrix mit drei Zeilen und einer Spalte (eine (3, 1)-Matrix) erfolgen:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix gilt natürlich nur für ein bestimmtes Basissystem und ändert sich mit diesem. Sie i s t auch kein Vektor, sondern die (Komponenten-)Matrix eines Vektors. Sie sollte daher auch nicht mit dem Vektor $\boldsymbol{v}$ gleichgesetzt werden. (Leider sind die Sitten hier etwas verwildert: Die Bequemlichkeit hat über die Präzision gesiegt.) Matrizen werden mit kursiven, fetten Großbuchstaben bezeichnet: ***A, B, M,...*** Daher liegt es nahe, die Matrix eines physikalischen Vektors $\boldsymbol{v}$ mit $\boldsymbol{V}$ zu bezeichnen:

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ und die "transponierte Matrix" mit } \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Anmerkung: Beim Transponieren einer Matrix werden ihre Zeilen und Spalten vertauscht.
Analog dazu wird ein Tensor 2. Stufe mit $\boldsymbol{t}$, seine Matrix mit $\boldsymbol{T}$ bezeichnet.

In der Algebra hat der Begriff Vektor eine andere Bedeutung. Er steht hier für Matrizen mit nur einer Spalte („Spaltenvektor“) oder nur einer Zeile („Zeilenvektor“).

$$\text{Spaltenvektor: } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{Zeilenvektor: } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Zudem ist es in der Algebra üblich, diese Begriffe auf einzelne Spalten bzw. Zeilen anzuwenden, die aus einer größeren Matrix herausgegriffen und in Klammern gesetzt wurden.

Die Matrix eines Tensors 2. Stufe ist eine (3, 3)-Matrix, also eine Matrix mit drei Zeilen und drei Spalten:

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}. \text{ Alle } t_{ik} \text{ sind reelle Zahlen.} \tag{1.4}$$

Die in den Klammern der Matrix stehenden Zahlen, also die Elemente der Matrix, heißen hier **Komponenten des Tensors.** Auch die Komponenten der Tensoren zweiter Stufe beziehen sich auf ein zuvor definiertes Koordinatensystem (Basissystem), das von drei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ aufgespannt wird. Bei Wechsel des Basissystems ändern sich Elemente der Matrizen, während die Vektoren und Tensoren 2. Stufe selbst davon unberührt bleiben. Sowenig ein (physikalischer) Vektor eine Matrix mit einer Spalte ist, sowenig ist ein Tensor 2. Stufe eine (3, 3)-Matrix (und umgekehrt). Ein Tensor 2. Stufe ist gleichsam ein Vektor höherer Stufe, zu dessen Beschreibung in einem Basissystem nicht weniger als neun Zahlen nötig sind. Analog zur Vektoralgebra und zur Vektor-analysis gibt es eine Tensoralgebra und eine Tensoranalysis.

Für das **Rechnen mit Matrizen** wurden eine Reihe von notwendigen Grundgesetzen verabredet („gesetzt“), aus denen weitere Regeln abgeleitet wurden. Sie alle finden sich in jeder besseren Formelsammlung, sodass ich hier auf die ermüdende Aufzählung verzichten kann. Bei Bedarf werde ich jeweils darauf hinweisen.

Als nächstes brauchen wir einige Regeln für die Multiplikation von Matrizen.

2 Multiplikation von Matrizen

Eine grundlegende Regel für die Multiplikation von Matrizen ist die **Verkettbarkeitsbedingung:**

Das Produkt *AB* zweier Matrizen *A* und *B* kann nur gebildet werden, wenn die Anzahl der *Spalten* von *A* gleich der Anzahl der *Zeilen* von *B* ist.

Das Produkt *AB* zweier Matrizen ist eine Matrix *C*. Wie sich aus der unten beschriebenen Rechenregel ergibt, ist die Anzahl ihrer Zeilen gleich der Anzahl der Zeilen von *A*, die Anzahl ihrer Spalten gleich der Anzahl der Spalten von *B*.

$$\boldsymbol{A}_{(m,\,n)}\boldsymbol{B}_{(n,\,p)} = \boldsymbol{C}_{(m,\,p)}$$

Die rote Markierung zeigt die zu erfüllende Voraussetzung (Verkettbarkeitsbedingung) an, die blaue und die grüne zeigen den Einfluss der Zeilen- bzw. Spaltenzahl von $\boldsymbol{A}$ bzw. $\boldsymbol{B}$ auf das Ergebnis $\boldsymbol{C}$.

Um die Rechenregel für die Gewinnung der Elemente der Produktmatrix $\boldsymbol{C}$ beschreiben zu können, definieren wir zunächst eine Hilfsgröße: das **skalare Produkt** einer Zeilenmatrix mit einer Spaltenmatrix

$$\textbf{Skalares Produkt} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{n=1}^{3} a_n b_n \qquad \textbf{(1.5)}$$

Das skalare Produkt (kurz: Skalarprodukt) hat seinen Namen und seine Bedeutung vom skalaren Produkt zweier Vektoren

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{w} = w_1\boldsymbol{e}_1 + w_2\boldsymbol{e}_2 + w_3\boldsymbol{e}_3\,.$$

Nach den Regeln der Vektoralgebra ist

$$\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w} = \left(v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3\right)\left(w_1\boldsymbol{e}_1 + w_2\boldsymbol{e}_2 + w_3\boldsymbol{e}_3\right) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3\,. \qquad \textbf{(1.6)}$$

Die rechts stehende Summe ist eine reelle Zahl, ein Tensor 0. Stufe.

Das oben definierte skalare Produkt ist identisch mit dem Produkt $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{B}$ aus der transponierten Matrix $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ des Vektors $\boldsymbol{a}$ und der Matrix $\boldsymbol{B}$ des Vektors $\boldsymbol{b}$. Das Ergebnis entspricht dem Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$. Und nun die

Rechenvorschrift: Das Element c_{ik} der Produktmatrix $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ ist das Skalarprodukt der i-ten Zeile (ein „Zeilenvektor“)von $\boldsymbol{A}$ mit der k-ten Spalte von $\boldsymbol{B}$ (ein „Spaltenvektor“).

Hier zwei wichtige Beispiele:

2.1 Multiplikation einer Vektors mit einem Tensor 2. Stufe

Das Produkt eines Vektors mit einem Tensor 2. Stufe wird geschrieben

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{t} \quad \text{(„Vorprodukt“) bzw.} \quad \boldsymbol{t}\boldsymbol{v} \quad \text{(„Nachprodukt“).}$$

Die Berechnung der Produkte geschieht mithilfe der Matrizen der beiden Faktoren.

1. Fall: Der Vektor ist der erste Faktor (Vorprodukt)

Da die Tensormatrix drei Zeilen hat, muss wegen der Verkettbarkeitsbedingung die Vektormatrix drei Spalten haben. Folglich muss die Vektormatrix als Zeilenmatrix geschrieben werden, das heißt, wir müssen statt der Matrix $\boldsymbol{V}$ die transponierte Matrix $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ als ersten Faktor benutzen. Die Produktmatrix $\boldsymbol{C}$ hat dann wie $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ eine Zeile und wie $\boldsymbol{T}$ drei Spalten. Also ist

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1.7)}$$

mit

$$c_{11} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}}_{\text{1. Zeile von } \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}} \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{pmatrix}}_{\text{1. Spalte von } \boldsymbol{T}} = v_1 t_{11} + v_2 t_{21} + v_3 t_{31}$$

$$c_{12} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}}_{\text{1. Zeile von } \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}} \underbrace{\begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{pmatrix}}_{\text{2. Spalte von } \boldsymbol{T}} = v_1 t_{12} + v_2 t_{22} + v_3 t_{32}$$

$$c_{13} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{13} \\ t_{23} \\ t_{33} \end{pmatrix} = v_1 t_{13} + v_2 t_{23} + v_3 t_{33}$$

Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} v_1 t_{11} + v_2 t_{21} + v_3 t_{31} & v_1 t_{12} + v_2 t_{22} + v_3 t_{32} & v_1 t_{13} + v_2 t_{23} + v_3 t_{33} \end{pmatrix}$$

Die Matrix auf der rechten Seite ist die transponierte Matrix $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$ eines Vektors ***w*** mit der Matrix

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} v_1 t_{11} + v_2 t_{21} + v_3 t_{31} \\ v_1 t_{12} + v_2 t_{22} + v_3 t_{32} \\ v_1 t_{13} + v_2 t_{23} + v_3 t_{33} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Folglich gilt für das gesuchte Vorprodukt: Das Vorprodukt aus einem Vektor ***v*** und einem Tensor ***t*** 2. Stufe ist ein Vektor ***w***, dessen Matrix (für das zugrundeliegende Basissystem) sich aus Gleichung (1.8) ergibt.

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{w}$$

2. Fall: Die Vektormatrix ist der zweite Faktor (Nachprodukt)

Wieder wird das Produkt über die Matrizen ***T*** und ***V*** der beteiligten Faktoren ***t*** und ***v*** berechnet.Hier muss wegen der Verkettbarkeitsbedingung die Matrix ***V*** als Spaltenmatrix geschrieben werden:

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Nach den Regeln der Matrizenmultiplikation ist das Ergebnis eine Spaltenmatrix:

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} t_{11}v_1 + t_{12}v_2 + t_{13}v_3 \\ t_{21}v_1 + t_{22}v_2 + t_{23}v_3 \\ t_{31}v_1 + t_{32}v_2 + t_{33}v_3 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Für das Nachprodukt gilt folglich: Das Nachprodukt aus einem Vektor ***v*** und einem Tensor ***t*** ist ein Vektor ***w***, dessen Matrix aus Gleichung (1.9) ergibt: $\boldsymbol{t}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.

Übungen

Übung 1.1

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$, wobei

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die **(3, 3)-Einheitsmatrix** und $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ die transponierte Matrix eines beliebigen Vektors $\boldsymbol{v}$ ist.

Übung 1.2

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}$ ist, wobei $\boldsymbol{V}$ die Matrix eines Vektors $\boldsymbol{v}$ ist.

Übung 1.3

Beweisen Sie die Distributivität des Vorprodukts:

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}] = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B},$$

wobei $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ (3, 3)-Matrizen sind und $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ die transponierte Matrix eines Vektors ist. (Hinweis: Hierzu wird die Additionsregel für Matrizen benötigt, die besagt, dass gleichartige Matrizen addiert werden, indem ihre einander entsprechenden Elemente addiert werden:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}, \text{ wobei}$$

$$c_{\mathrm{i},k} = a_{\mathrm{i},k} + b_{\mathrm{i},k} \text{ ist.}$$

Übung 1.4

Beweisen Sie die Distributivität des Nachprodukts:

$$[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}]\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{V},$$

wobei $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ (3, 3)-Matrizen sind und $\boldsymbol{V}$ eine Vektormatrix ist.

Übung 1.5

Bestätigen Sie durch Ausrechnen die Gleichung (1.9).

2.2 Produkte von Vektoren

Es gibt drei Arten von Produkten von je zwei Vektoren:

- Das Skalarprodukt,
- das Vektorprodukt und
- das dyadische Produkt.

2.2.1 Das Skalarprodukt

In der Vektoralgebra wird das Skalarprodukt $\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$ (lies $\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$ oder $\boldsymbol{v}$ Punkt $\boldsymbol{w}$) zweier Vektoren im Hinblick auf physikalische Belange basisunabhängig so definiert:

$$\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w} = v\,w\,\cos\varphi,$$

wobei v und w die Beträge der beiden Vektoren sind und φ der von ihnen eingeschlossene Winkel ist.

Beschreibt man die Vektoren durch ihre Komponenten bezüglich einer Basis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, dann erhält man für ihr Skalarprodukt formal die Gleichung

$$\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w} = \left(v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3\right)\cdot\left(w_1\boldsymbol{e}_1 + w_2\boldsymbol{e}_2 + w_3\boldsymbol{e}_3\right). \qquad \textbf{(1.10)}$$

In der Vektoralgebra wird gezeigt, dass die skalare Multiplikation distributiv ist. Daher können die Klammern nach den Regeln der Algebra ausmultipliziert werden. Berücksichtigt man dabei, dass

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 = 1, \qquad \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 = 0,$$

was sich aus der Definitionsgleichung für $\varphi = 0°$ bzw. $90°$ ergibt, so erhält man

$$\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \qquad \textbf{(1.11)}$$

Die rechte Seite der Gleichung (1.11) ist ein Skalar und identisch mit dem Produkt der Zeilenmatrix $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$ und der Spaltenmatrix $\boldsymbol{W}$ der beiden Vektoren

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}. \qquad \textbf{(1.12)}$$

Also gilt:

$$\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}. \qquad \textbf{(1.13)}$$

2.2.2 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Das Vektorprodukt $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ (lies „$\boldsymbol{v}$ Kreuz $\boldsymbol{w}$“) zweier Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ ist definiert als ein Vektor $\boldsymbol{u}$, der auf $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ senkrecht steht und der so gerichtet ist, dass $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{u}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, und dessen Betrag gleich dem Größenwert des von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ aufgespannten Rechtecks ist, das heißt

$$u = v\,w\,\sin\varphi.$$

In der Vektoralgebra wird gezeigt, dass für die Komponentendarstellung des Vektors $\boldsymbol{u}$ gilt:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} = \left(v_2 w_3 - v_3 w_2\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(v_3 w_1 - v_1 w_3\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(v_1 w_2 - v_2 w_1\right)\boldsymbol{e}_3. \qquad \textbf{(1.14)}$$

Als Merkregel ist die Darstellung durch eine Determinante nützlich:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Für die Matrix $\boldsymbol{U}$ des Vektors $\boldsymbol{u}$ gilt:

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

(Die Elemente der Matrix sind hier Determinanten.)

2.2.3 Das dyadische Produkt

Das dyadische Produkt (kurz: Dyade) zweier Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ wird geschrieben

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$$

und gelesen: „$\boldsymbol{v}$ mal im Kreis $\boldsymbol{w}$“.

Wie die beiden Vektoren ist auch ihr dyadisches Produkt von der benutzten Basis unabhängig. Bei der unten folgenden Definition des dyadischen Produkts wird die Komponentendarstellung der beteiligten Vektoren bezüglich einer bestimmten Basis benutzt, und daher ist auch das Ergebnis eine basisabhängige Größe, und zwar eine Matrix.

Definition: Die Matrix $(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})$ des dyadischen Produkts zweier Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ mit den Matrizen $\boldsymbol{V}$ bzw. $\boldsymbol{W}$ ist das Produkt aus der Matrix $\boldsymbol{V}$ und der transponierten Matrix $\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}$:

$$(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{V}\,\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1.14)}$$

(Diese (3, 3)-Matrix wird sich später als die Matrix eines Tensors erweisen.)

2.3 Rechengesetze für Dyaden

2.3.1 Multiplikation einer Dyade mit einem Skalar

Matrizen werden mit einem Skalar multipliziert, indem alle ihre Elemente $v_i w_k$ mit diesem Skalar multipliziert werden. Dabei ist die Reihenfolge der Faktoren beliebig. Dieses für die *Matrix* einer Dyade geltende Gesetz kann auf die Dyade selbst übertragen werden, indem man vereinbart:

$$k[\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}] = [k\boldsymbol{v}] \otimes \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} \otimes [k\boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}]k. \qquad \textbf{(1.15)}$$

Anmerkung: Die eckigen Klammern dienen hier und im Folgenden wieder dazu, die Reihenfolge der Multiplikationen zu regeln. (Runde Klammern werden zur Kennzeichnung von Matrizen benutzt.)

2.3.2 Multiplikation einer Dyade mit einem Vektor

Auch hier müssen wir zwischen Vorprodukt und Nachprodukt unterscheiden.

2.3.2.1 Das Vorprodukt

Das Vorprodukt eines Vektors $\boldsymbol{u}$ mit dem dyadischen Produkt aus $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ ist das Produkt

$$\boldsymbol{u}[\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}].$$

Die Berechnung des Vorprodukts geschieht wieder über die Matrizen der beteiligten Größen. Dabei muss wegen der Verkettbarkeit die transponierte Matrix $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$ des Vektors $\boldsymbol{u}$ benutzt werden:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}[\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}]) &= \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & v_1w_3 \\ v_2w_1 & v_2w_2 & v_2w_3 \\ v_3w_1 & v_3w_2 & v_3w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1v_1w_1+u_2v_2w_1+u_3v_3w_1 & u_1v_1w_2+u_2v_2w_2+u_3v_3w_2 & u_1v_1w_3+u_2v_2w_3+u_3v_3w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3]w_1 & [u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3]w_2 & [u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3]w_3 \end{pmatrix}\end{aligned} \qquad \textbf{(1.16)}$$

Die Terme in den eckigen Klammern sind identisch mit dem Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ und als solches eine reelle Zahl k, die nach den Regeln der Matrizenrechnung ausgeklammert werden kann.

$$(\boldsymbol{u}[\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}]) = k\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = k\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}. \qquad \textbf{(1.17)}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht die transponierte Matrix des Vektors $\boldsymbol{w}$, multipliziert mit einer reellen Zahl k. Auf die Vektoren selbst angewandt folgt daraus

$$\boldsymbol{u}\,[\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}] = k\,\boldsymbol{w}. \qquad \textbf{(1.18)}$$

Durch Multiplikation eines Vektors mit einer Dyade kann also ein anderer Vektor mit definierten Eigenschaften erzeugt werden: ein Vektor von der Richtung des Vektors $\boldsymbol{w}$, dessen Betrag durch geeignete Wahl von $\boldsymbol{v}$ beliebig bestimmt werden kann. Dieser Sachverhalt kann auch so ausgedrückt werden: Durch die Multiplikation wird dem Vektor $\boldsymbol{u}$ basisunabhängig ein Vektor $k\boldsymbol{w}$ zugeordnet oder der Vektor $\boldsymbol{u}$ wird auf einen Vektor $k\boldsymbol{w}$ abgebildet.

2.3.2.2 Das Nachprodukt

Das Nachprodukt eines Vektors $\boldsymbol{u}$ mit dem dyadischen Produkts aus $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ ist das Produkt

$$[\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}]\boldsymbol{u}.$$

Wieder erfolgt die Berechnung über die Matrizen:

$$\begin{aligned}([\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}]\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})\boldsymbol{U} &= \begin{pmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & v_1w_3 \\ v_2w_1 & v_2w_2 & v_2w_3 \\ v_3w_1 & v_3w_2 & v_3w_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1w_1u_1+v_1w_2u_2+v_1w_3u_3 \\ v_2w_1u_1+v_2w_2u_2+v_2w_3u_3 \\ v_3w_1u_1+v_3w_2u_2+v_3w_3u_3 \end{pmatrix}.\end{aligned} \qquad \textbf{(1.19)}$$

Diese Spaltenmatrix kann wie folgt umgeformt werden:

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix} v_1[w_1u_1+w_2u_2+w_3u_3] \\ v_2[w_1u_1+w_2u_2+w_3u_3] \\ v_3[w_1u_1+w_2u_2+w_3u_3] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1[\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}] \\ v_2[\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}] \\ v_3[\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}] \end{pmatrix}=\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}=[\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}]\boldsymbol{V}. \quad (1.20)$$

Dabei ist das Skalarprodukt $\boldsymbol{w}\boldsymbol{u}$ wieder eine reelle Zahl k und somit

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})\boldsymbol{U}=k\boldsymbol{V}. \quad (1.21)$$

Auf die Vektoren selbst angewandt folgt daraus

$$\left[\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\right]\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{v}. \quad (1.22)$$

Das Nachprodukt ist also ein Vektor von k-fachem Betrag des ersten Vektors der Dyade, wobei k das Skalarprodukt des zweiten Vektors der Dyade und des »Nachvektors« $\boldsymbol{u}$ ist.

Übung 1.6

Ein Ellipsoid ist mathematisch am einfachsten zu beschreiben, wenn die Achsen des benutzten Koordinatensystems mit den Achsen des Ellipsoids zusammenfallen. (Ein Ellipsoid hat drei Achsen: den größten Durchmesser, den kleinsten Durchmesser und den auf diesen beiden senkrechten Durchmesser.) Für die Koordinaten der Punkte seiner Oberfläche gilt dann:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Dabei sind a, b und c die Längen der drei Halbachsen.

Wie lässt sich mithilfe einer (3, 3)-Matrix das Ellipsoid bei beliebiger Lage zum Koordinatensystem beschreiben? Welche Bedingungen müssen die Elemente der Matrix erfüllen?

3 Lösungen

Übung 1.1

Beweis mittels der Multiplikationsregel für Matrizen oder einfach durch Anwendung der Gleichung (1.8).

Übung 1.2

Mittels Multiplikationsregel oder durch Anwendung der Gleichung (1.9).

Übung 1.3

1. Schritt: Man setzt $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ mit $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}$ und wendet im

2. Schritt die Regel gemäß Gleichung (1.8) an, die auch dann gilt, wenn die (3, 3)-Matrix keine Tensormatrix ist.

3. Schritt: Man multipliziert die Terme $v_1(a_{11}+b_{11})$ usw. aus und ordnet die Produkte um. Die 1. Zeile lautet dann

$$v_1a_{11}+v_2a_{21}+v_3a_{31}+v_1b_{11}+v_2b_{21}+v_3b_{31}.$$

4. Schritt: Die entstehende Matrix kann als Summe zweier Matrizen dargestellt werden mit den ersten Zeilen

$$v_1a_{11}+v_2a_{21}+v_3a_{31} \quad \text{bzw.} \quad v_1b_{11}+v_2b_{21}+v_3b_{31}.$$

5. Schritt: Die beiden Matrizen sind gem. Gleichung (1.8) identisch mit den Matrixprodukten

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \text{ bzw. } \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}.$$

Übung 1.4

Analog zu Übung 1.3.

Übung 1.6

Das Ellipsoid wird bei beliebiger Lage im Koordinatensystem durch die Länge und die Richtung seiner halben Achsen eindeutig beschrieben. Diese wiederum werden beschrieben durch die Vektoren

$$\boldsymbol{a}\,(a_1, a_2, a_3), \quad \boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3), \quad \boldsymbol{c}(c_1, c_2, c_3).$$

Das Ellipsoid kann dann durch seine Matrix $\boldsymbol{E}$ beschrieben werden:

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Bei der Auswahl (und Beschreibung) der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ist zu beachten, dass sie paarweise aufeinander senkrecht stehen müssen. Für die Matrix $\boldsymbol{E}$ bedeutet dies, dass die drei Skalarprodukte, die aus je zwei ihrer Spaltenvektoren gebildet werden können, gleich null sein müssen.

Fazit: Jedes Ellipsoid kann durch eine (3, 3)-Matrix dargestellt werden, aber nicht jede Matrix kann ein Ellipsoid darstellen. Das Ellipsoid ist ein vom Koordinatensystem unabhängiges Gebilde; die Elemente seiner Matrix dagegen sind – wie bei den Vektoren – von der benutzten Basis abhängig. Und: Das Ellipsoid i s t keine Matrix, und die Matrix i s t kein Ellipsoid.