EINFÜHRUNG IN DIE TENSORRECHNUNG

Teil 3

SIEGFRIED PETRY

Fassung vom 5. Juni 2016

Inhalt

1 Transformation der Komponenten eines Vektors bei Basiswechsel

Im Teil 2 der »Einführung in die Tensorrechnung« ist bei Übung 2.3 und Beispiel 2.3 deutlich geworden, dass Berechnungen bei geschickter Wahl der Basis erheblich einfacher ausfallen. Dabei ist die Frage aufgetaucht, wie eine neue Basis eingeführt wird und wie die Komponenten der Vektoren auf die neue Basis transformiert werden. Denn obwohl ein Vektor von der benutzten Basis unabhängig ist, ändern sich seine Komponenten beim Übergang auf eine andere Basis, die gegenüber der ersten gedreht ist. (Parallelverschiebung hat keinen Einfluss auf die Vektorkomponenten.)

1.1 Einführung einer neuen Basis

Die Einheitsvektoren der ursprünglichen (»ungestrichenen«) Basis B bezeichnen wir mit $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, die der neuen (»gestrichenen«) Basis B' mit $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$. Für die Winkel zwischen den neuen und den alten Basisvektoren werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
&\sphericalangle(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_1) = \alpha_1, \quad \sphericalangle(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_2) = \beta_1, \quad \sphericalangle(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_3) = \gamma_1,\\
&\sphericalangle(\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}_1) = \alpha_2, \quad \sphericalangle(\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}_2) = \beta_2, \quad \sphericalangle(\boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}_3) = \gamma_2,\\
&\sphericalangle(\boldsymbol{e}'_3, \boldsymbol{e}_1) = \alpha_3, \quad \sphericalangle(\boldsymbol{e}'_3, \boldsymbol{e}_2) = \beta_3, \quad \sphericalangle(\boldsymbol{e}'_3, \boldsymbol{e}_3) = \gamma_3.
\end{aligned}$$

Als Winkel zwischen zwei Vektoren gilt immer der kleinere der beiden. Alle Winkel sind ungerichtet, sodass

$$\sphericalangle(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_1) = \sphericalangle(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_1) \quad \text{usw.}$$

Wir stellen zunächst die neuen Basisvektoren durch ihre Komponenten bezüglich der alten Basis dar. Die Komponenten sind die Projektionen der neuen auf die alten Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 &= \cos\alpha_1\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\beta_1\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma_1\, \boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{e}'_2 &= \cos\alpha_2\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\beta_2\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma_2\, \boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{e}'_3 &= \cos\alpha_3\, \boldsymbol{e}_1 + \cos\beta_3\, \boldsymbol{e}_2 + \cos\gamma_3\, \boldsymbol{e}_3.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Die »Richtungskosinus« werden künftig mit c_{ik} abgekürzt, wobei c an cos erinnern soll, i der Index des Winkels und zugleich der Index der betrachteten Vektorkomponente ist, während k gleich dem Index des alten Basisvektors ist, bei dem c_{ik} steht. Damit wird aus den Gleichungen (3.1):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}'_1 &= c_{11}\, \boldsymbol{e}_1 + c_{12}\, \boldsymbol{e}_2 + c_{13}\, \boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{e}'_2 &= c_{21}\, \boldsymbol{e}_1 + c_{22}\, \boldsymbol{e}_2 + c_{23}\, \boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{e}'_3 &= c_{31}\, \boldsymbol{e}_1 + c_{32}\, \boldsymbol{e}_2 + c_{33}\, \boldsymbol{e}_3.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= c_{11}\, \boldsymbol{e}'_1 + c_{21}\, \boldsymbol{e}'_2 + c_{31}\, \boldsymbol{e}'_3,\\
\boldsymbol{e}_2 &= c_{12}\, \boldsymbol{e}'_1 + c_{22}\, \boldsymbol{e}'_2 + c_{32}\, \boldsymbol{e}'_3,\\
\boldsymbol{e}_3 &= c_{13}\, \boldsymbol{e}'_1 + c_{23}\, \boldsymbol{e}'_2 + c_{33}\, \boldsymbol{e}'_3.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

1.2 Transformation der Vektorkomponenten

Gegeben sei ein Vektor $\boldsymbol{v}$, der in B die Komponenten v_1, v_2, v_3 habe. Also ist

$$\boldsymbol{v} = v_1\, \boldsymbol{e}_1 + v_2\, \boldsymbol{e}_2 + v_3\, \boldsymbol{e}_3,$$

woraus sich mit den Gleichungen (3.3) ergibt

$$\boldsymbol{v} = v_1\left(c_{11}\boldsymbol{e}'_1 + c_{21}\boldsymbol{e}'_2 + c_{31}\boldsymbol{e}'_3\right) + v_2\left(c_{12}\boldsymbol{e}'_1 + c_{22}\boldsymbol{e}'_2 + c_{32}\boldsymbol{e}'\right) + v_3\left(c_{13}\boldsymbol{e}'_1 + c_{23}\boldsymbol{e}'_2 + c_{33}\boldsymbol{e}'_3\right).$$

Nach Ausmultiplizieren, Ordnen und Ausklammern der neuen Basisvektoren erhält man

$$\boldsymbol{v} = \left(c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3\right)\boldsymbol{e}'_1 + \left(c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3\right)\boldsymbol{e}'_2 + \left(c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3\right)\boldsymbol{e}'_3. \qquad \textbf{(3.4)}$$

Folglich sind die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{v}$ bezüglich der neuen Basis

$$\begin{aligned} v'_1 &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3, \\ v'_2 &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3, \\ v'_3 &= c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3. \end{aligned} \qquad \textbf{(3.5)}$$

Diese drei Gleichungen können mit Matrizen so geschrieben werden (siehe Gleichung 1.9, Teil 1):

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{(3.6)}$$

kurz:

$$(\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{v}) \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{V}' = \boldsymbol{K}\boldsymbol{V},$$

wobei $\boldsymbol{K}$ die Matrix der Richtungskosinus ist.

Für die »inverse Transformation« findet man analog

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}v'_1 + c_{21}v'_2 + c_{31}v'_3 \\ v_2 &= c_{12}v'_1 + c_{22}v'_2 + c_{32}v'_3 \\ v_3 &= c_{13}v'_1 + c_{23}v'_2 + c_{33}v'_3, \end{aligned} \qquad \textbf{(3.7)}$$

wofür man schreiben kann

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.8)}$$

und kurz:

$$(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{v}') \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}'.$$

wobei $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$ die transponierte Matrix von $\boldsymbol{K}$ ist.

Anmerkung:

Die neun Richtungskosinus sind nicht voneinander unabhängig, sondern durch sechs Relationen mit einander verknüpft, die man aus den folgenden Gleichungen ableiten kann:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}'_2\cdot\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}'_3\cdot\boldsymbol{e}'_3 = 1, \\ \boldsymbol{e}'_1\cdot\boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}'_2\cdot\boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}'_3\cdot\boldsymbol{e}'_1 = 0. \end{aligned}$$

(Das Skalarprodukt eines Einheitsvektors mit sich selbst ist gleich 1; das Skalarprodukt zweier auf einander senkrechter Vektoren ist 0.)

Wendet man die Gleichungen (3.5) auf die Einheitsvektoren an, so erhält man

$$\boldsymbol{e}'_1 = c_{11}\,\boldsymbol{e}_1 + c_{12}\,\boldsymbol{e}_2 + c_{13}\,\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{e}'_2 = c_{21}\,\boldsymbol{e}_1 + c_{22}\,\boldsymbol{e}_2 + c_{23}\,\boldsymbol{e}_3,$$

und daraus

$$\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_1 = c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 = 1,$$
$$\boldsymbol{e}'_1 \cdot \boldsymbol{e}'_2 = c_{11}\,c_{21} + c_{12}\,c_{22} + c_{13}\,c_{23} = 0.$$

Analog ergeben sich drei weitere Gleichungen

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 &= 1, \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 &= 1, \\ c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 &= 1, \end{aligned} \tag{3.9}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} c_{11}\,c_{21} + c_{12}\,c_{22} + c_{13}\,c_{23} &= 0, \\ c_{21}\,c_{31} + c_{22}\,c_{32} + c_{23}\,c_{33} &= 0, \\ c_{31}\,c_{11} + c_{32}\,c_{12} + c_{33}\,c_{13} &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Geht man dagegen von den Gleichungen

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = 0$$

und von den Gleichungen (3.3) statt von (3.2) aus, erhält man sechs andere Gleichungen, die jedoch mit den Gleichungen (3.9) und (3.10) gleichwertig sind, also keine zusätzlichen neuen Bedingungen darstellen. Dennoch sind sie für manche Anwendungen nützlich:

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 &= 1, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 &= 1, \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 &= 1, \end{aligned} \tag{3.11}$$

und

$$\begin{aligned} c_{11}\,c_{21} + c_{21}\,c_{22} + c_{31}\,c_{23} &= 0, \\ c_{12}\,c_{13} + c_{22}\,c_{23} + c_{32}\,c_{33} &= 0, \\ c_{13}\,c_{11} + c_{23}\,c_{21} + c_{33}\,c_{31} &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die sechs Relationen bedingen, dass von den neun Richtungskosinus nur drei frei wählbar sind, die zudem wegen der Gleichungen (3.9) bzw. (3.11) nicht zusammen in derselben Zeile oder Spalte stehen dürfen.

2 Lineare homogene Vektorfunktionen

Eine Vektorfunktion ist eine Funktion, bei der die unabhängige Variable $\boldsymbol{v}$ und die abhängige Variable $\boldsymbol{w}$ Vektoren sind:

$$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}).$$

Bei einer linearen homogenen Vektorfunktion sind die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{w}$ lineare homogene Funktionen der Komponenten des Vektors $\boldsymbol{v}$:

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3,$$
$$w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3, \qquad \textbf{(3.13)}$$
$$w_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3.$$

Die Koeffizienten a_{ik} sind beliebige reelle Zahlen.

Lineare homogene Vektorfunktionen haben zwei wichtige Eigenschaften: Es ist

$$f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{u}) \quad \text{und} \quad f(k\,\boldsymbol{v}) = k\,f(\boldsymbol{v}). \qquad \textbf{(3.14)}$$

Mit der Matrix $\boldsymbol{A}$ der Koeffizienten a_{ik} können die Gleichungen (3.13) so geschrieben werden:

$$(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{v}) \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}. \qquad \textbf{(3.15)}$$

Die Matrix $\boldsymbol{W}$ des Vektors $\boldsymbol{w}$ ist also das Nachprodukt der Matrix $\boldsymbol{V}$ des Vektors $\boldsymbol{v}$ und der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$**.** Fasst man die Matrix $\boldsymbol{A}$ als die Matrix eines mathematischen Operators $\boldsymbol{f}$ auf, der aus dem Vektor $\boldsymbol{v}$ den Vektor $\boldsymbol{w}$ erzeugt („den Vektor $\boldsymbol{v}$ auf den Vektor $\boldsymbol{w}$ abbildet“), dann kann man dafür auch schreiben:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}\,\boldsymbol{v}.$$

Dies ist eine koordinatenfreie, basisunabhängige Darstellung der betrachteten Vektorfunktion $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ (lies: $\boldsymbol{w}$ ist gleich Funktion von $\boldsymbol{v}$). Da nämlich $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{v}$ (als Vektoren) basisunabhängig sind, muss dies auch für den Operator $\boldsymbol{f}$ zutreffen. Damit erfüllt $\boldsymbol{f}$ alle Kriterien eines Tensors. Eine homogene lineare Vektorfunktion kann demnach als eine Tensoroperation aufgefasst werden, welche den Vektor $\boldsymbol{v}$ auf den Vektor $\boldsymbol{w}$ abbildet.

3 Transformation der Tensorkomponenten bei Basiswechsel

Wir betrachten eine Tensoroperation an einem Vektor $\boldsymbol{v}$**,** durch welche der Vektor $\boldsymbol{w}$ entstehe:

$$\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}.$$

Für die auf eine Basis B bezogenen Matrizen von $\boldsymbol{t}$**,** $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ gilt dann

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w}) \quad \text{oder} \quad (t_{ik})(v_i) = (w_i) \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}.$$

Dabei steht t_{ik} für die Tensorkomponenten in der Matrix $\boldsymbol{T}$.

Bezieht man die Matrizen der drei Größen auf eine neue Basis B', dann soll gelten

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{W}' \quad \text{oder} \quad (t'_{ik})(v'_i) = (w'_i).$$

Damit ist gemeint, dass durch die Tensoroperation aus dem Vektor $\boldsymbol{v}$ im neuen System derselbe Vektor $\boldsymbol{w}$ entstehen soll wie im alten. Das bedeutet, dass durch Transformation der Matrix $\boldsymbol{W}$ nach ***W*’’** dieselbe Matrix entstehen muss, wie sie das Produkt ***T’V’*** liefert.

Gesucht sind nun die Tensorkomponenten t'_{ik} bezüglich B'. Nach den Gleichungen (3.5) sind die Komponenten von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ in B':

$$\begin{aligned} v'_1 &= c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3, & w'_1 &= c_{11}w_1 + c_{12}w_2 + c_{13}w_3, \\ v'_2 &= c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3, & w'_2 &= c_{21}w_1 + c_{22}w_2 + c_{23}w_3, \\ v'_3 &= c_{31}v_1 + c_{32}v_2 + c_{33}v_3, & w'_3 &= c_{31}w_1 + c_{32}w_2 + c_{33}w_3. \end{aligned} \qquad \textbf{(3.16)}$$

Die Koeffizienten c_{ik} sind wieder die Richtungskosinus der Basisvektoren. Für die inverse Transformation gilt nach den Gleichungen (3.7)

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}v'_1 + c_{21}v'_2 + c_{31}v'_3, \qquad & w_1 &= c_{11}w'_1 + c_{21}w'_2 + c_{31}w'_3, \\ v_2 &= c_{12}v'_1 + c_{22}v'_2 + c_{32}v'_3, & w_2 &= c_{12}w'_1 + c_{22}w'_2 + c_{32}w'_3, \\ v_3 &= c_{13}v'_1 + c_{23}v'_2 + c_{33}v'_3, & w_3 &= c_{13}w'_1 + c_{23}w'_2 + c_{33}w'_3. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Die Matrizen des Tensors $\boldsymbol{t}$ in B und B' seien

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} = (t_{ik}) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{T}' = \begin{pmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{pmatrix} = (t'_{ik}) \tag{3.18}$$

Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}$$

und nach Gleichung (1.9) in Teil 1

$$\begin{aligned} w_1 &= t_{11}v_1 + t_{12}v_2 + t_{13}v_3, \qquad & w'_1 &= t'_{11}v'_1 + t'_{12}v'_2 + t'_{13}v'_3, \\ w_2 &= t_{21}v_1 + t_{22}v_2 + t_{23}v_3, & w'_2 &= t'_{21}v'_1 + t'_{22}v'_2 + t'_{23}v'_3, \\ w_3 &= t_{31}v_1 + t_{32}v_2 + t_{33}v_3, & w'_3 &= t'_{31}v'_1 + t'_{32}v'_2 + t'_{33}v'_3. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Das linke Gleichungstripel soll denselben Vektor darstellen wie die Gleichungen (3.17 / rechts). Dazu müssen die Koeffizienten t_{ik} bestimmte Bedingungen erfüllen. Um diese zu ermitteln, multiplizieren wir die erste der Gleichungen (3.18 / links) mit c_{11}, die zweite mit c_{12} und die dritte mit c_{13} und summieren die drei Gleichungen.

$$\begin{aligned} c_{11}w_1 &= c_{11}(t_{11}v_1 + t_{12}v_2 + t_{13}v_3) \\ c_{12}w_2 &= c_{12}(t_{21}v_1 + t_{22}v_2 + t_{23}v_3) \\ c_{13}w_3 &= c_{13}(t_{31}v_1 + t_{32}v_2 + t_{33}v_3) \\ \hline \textstyle\sum: \quad w'_1 &= \underbrace{(c_{11}t_{11} + c_{12}t_{21} + c_{13}t_{31})}_{\text{(I)}} v_1 \\ &\quad + \underbrace{(c_{11}t_{12} + c_{12}t_{22} + c_{13}t_{32})}_{\text{(II)}} v_2 \\ &\quad + \underbrace{(c_{11}t_{13} + c_{12}t_{23} + c_{13}t_{33})}_{\text{(III)}} v_3 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Die linke Summe ist gemäß Gleichung (3.16 / rechts) gleich w'_1. Drücken wir nun mit Hilfe der Gleichungen (3.17 / links) v_1, v_2 und v_3 durch die Komponenten bezüglich der neuen Basis aus, so erhalten wir

$$w'_1 = (\mathrm{I}) \cdot (c_{11}v'_1 + c_{21}v'_2 + c_{31}v'_3) + (\mathrm{II}) \cdot (\mathrm{c}_{12}v'_1 + c_{22}v'_2 + c_{32}v'_3) + (\mathrm{III}) \cdot (\mathrm{c}_{13}v'_1 + c_{23}v'_2 + c_{33}v'_3)$$

Nach Ausmultiplizieren und Ordnen ergibt sich der Koeffizient von v'_1

$$(\mathrm{I}) \cdot c_{11} + (\mathrm{II}) \cdot c_{12} + (\mathrm{III}) \cdot c_{13}.$$

Dieser Term muss identisch sein mit dem Koeffizienten von v'_1 in der ersten Gleichung (3.18 / rechts). Also

$$\begin{aligned} t'_{11} = \; & c_{11}^2 t_{11} + c_{11}c_{12}t_{21} + c_{11}c_{13}t_{31} \\ & + c_{11}c_{12}t_{12} + c_{12}^2 t_{22} + c_{12}c_{13}t_{32} \\ & + c_{11}c_{13}t_{13} + c_{12}c_{13}t_{23} + c_{13}^2 t_{33}. \\ = & \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{1i}c_{1k}t_{ik}. \end{aligned} \quad \textbf{(3.21)}$$

Analog findet man

$$t'_{12} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{1i}c_{2k}t_{ik} \quad \text{und} \quad t'_{13} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{1i}c_{3k}t_{ik} \quad \text{usw.} \quad \textbf{(3.22)}$$

Die Komponenten der Tensormatrix in B' sind also homogene lineare Funktionen der Komponenten t_{ik} der Tensormatrix in B. Die Koeffizienten der t_{ik} sind Produkte aus je zwei Richtungskosinus der neuen Basisvektoren.

4 Das Tensorellipsoid

Tensoren vom Rang 0 (Skalare) lassen sich durch Punkte auf der Zahlengeraden darstellen, Tensoren vom Rang 1 (Vektoren) durch Pfeile im Raum. Gibt es eine analoge Möglichkeit zur Darstellung von Tensoren vom Rang 2?

Die Komponenten eines Tensors bezüglich einer bestimmten Basis seien $t_{11}, t_{12,} \cdots t_{33}$ (siehe Gleichung (3.18)). Wir denken uns nun einen beliebigen vom Ursprung O ausgehenden Strahl, auf dem der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$ liegt. Die Richtungskosinus dieses Vektors bezüglich der benutzten Basis seien a_1, a_2, a_3. Die erste Komponente t'_{11} des Tensors bezüglich des Vektors $\boldsymbol{e}$ (den man sich als den ersten Basisvektor einen neuen Systems vorstellen kann) ist dann (siehe Gleichung (3.21))

$$\begin{aligned} t'_{11} &= a_1^2 t_{11} + a_1a_2t_{21} + a_1a_3t_{31} + a_1a_2t_2 + a_2^2t_{22} + a_2a_3t_{32} + a_1a_3t_{13} + a_2a_3t_{23} + a_3^2t_{33} \\ &= a_1^2t_{11} + a_2^2t_{22} + a_3^2t_{33} + a_1a_2\left(t_{12}+t_{21}\right) + a_2a_3\left(t_{23}+t_{32}\right) + a_3a_1\left(t_{31}+t_{13}\right). \end{aligned} \quad \textbf{(3.23)}$$

Wir denken uns nun auf dem Strahl von O aus eine Strecke der Länge l angetragen, deren Quadrat l^2 der Tensorkomponente t'_{11} reziprok sei:

$$l^2 = \frac{1}{t'_{11}}. \quad \textbf{(3.24)}$$

Die Koordinaten des Endpunktes dieser Strecke seien ξ, η und ζ. Da die Strecke ebenfalls die Richtungskosinus des Vektors $\boldsymbol{e}$ hat, nämlich a_1, a_2, a_3, ist

$$\xi = a_1 l, \quad \eta = a_2 l, \quad \zeta = a_3 l.$$

Wegen Gleichung (3.24) ist dann

$$a_1^2 = t'_{11}\xi^2, \quad a_2^2 = t'_{11}\eta^2, \quad a_3^2 = t'_{11}\zeta^2.$$

Damit und nach Division durch t'_{11} kann Gleichung (3.23) wie folgt geschrieben werden:

$$1 = \xi^2 t_{11} + \eta^2 t_{22} + \zeta^2 t_{33} + \xi\eta\left(t_{12}+t_{21}\right) + \eta\zeta\left(t_{23}+t_{32}\right) + \zeta\xi\left(t_{31}+t_{13}\right). \quad \textbf{(3.25)}$$

Wenn wir uns nun den Strahl in alle möglichen Richtungen gedreht denken, dann ändern sich in der Gleichung (3.25) nur die Koordinaten des Endpunktes der Strecke l. Dieser Endpunkt überstreicht dabei eine Fläche 2. Ordnung, die durch die Gleichung (3.25) mathematisch beschrieben wird. Die Gestalt dieser Fläche wird ausschließlich durch die Komponenten des Tensors (und zwar durch sämtliche) eindeutig bestimmt. Sie bildet daher den Tensor ebenso eindeutig ab, wie ein Pfeil einen Vektor eindeutig abbildet. Und sie ist – ebenso wie ein Vektorpfeil – vom benutzten Koordinatensystem (Basis) unabhängig, weil der Tensor selbst vom Koordinatensystem unabhängig ist. Diese Fläche wird – nicht ganz korrekt – Tensorellipsoid genannt, obwohl sie ohne zusätzliche Annahmen über die Tensorkomponenten auch ein Hyperboloid sein kann.

Ein Ellipsoid hat drei durch seinen Mittelpunkt gehende Achsen:

- eine von der Richtung des größten Durchmessers,
- eine von der Richtung des kleinsten Durchmessers, der (wegen der Symmetrie) immer auf dem größten senkrecht steht, und
- eine, die auf diesen beiden senkrecht steht.

Durch sind drei Richtungen im Raum festgelegt. Ist das Tensorellipsoid ein Rotationsellipsoid, so ist nur die Richtung der längsten Achse bestimmt, nämlich die der Rotationsachse; eine zweite ist (senkrecht zur ersten) frei wählbar, die dritte liegt dann fest.

Wählt man ein Koordinatensystem so, dass seine Achsen mit den Achsen des Tensorellipsoids zusammenfallen, dann wird die Gleichung des Ellipsoids rein quadratisch, d. h. die Koordinaten ξ, η, ζ treten nur in der 2. Potenz auf.

Übung 3.1 Wie muss die Matrix eines Tensorellipsoid beschaffen sein, damit dessen Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen?

Übung 3.2 Unter welchen zusätzlichen Bedingungen ist das Tensorellipsoid

1. ein Rotationsellipsoid,
2. eine Kugel?

5 Reziproke Systeme von Basisvektoren

Wir führen in einem beliebig gewählten Ursprung O ein dreidimensionales *schiefwinkliges* *UVW*-Koordinatensystem ein, das durch drei nicht-komplanare (d. h. nicht in einer gemeinsamen Ebene liegende) Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ bestimmt ist. Diese drei Vektoren bestimmen außer der *U*-, *V*- und *W*-Achse auch eindeutig eine *UV*-Ebene, eine *VW*-Ebene und eine *WU*-Ebene.

Sodann können wir in jedem beliebigen Punkt P des Raumes ein »lokales Koordinatensystem« einrichten, dessen Achsen zu denen des ersten Systems parallel sind. Wir bezeichnen die Einheitsvektoren des lokalen Systems mit

$$\underline{\boldsymbol{e}}_1, \underline{\boldsymbol{e}}_2 \text{ und } \underline{\boldsymbol{e}}_3,$$

wobei natürlich, wenn man von der Parallelverschiebung absieht,

$$\underline{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{e}_1,\ \underline{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{e}_2 \text{ und } \underline{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_3 \text{ ist.}$$

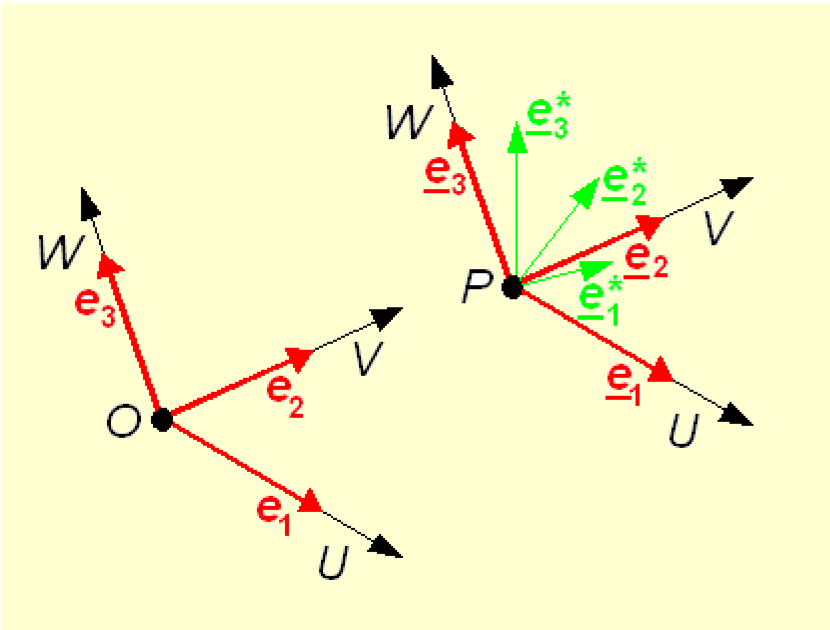
Nun definieren wir in *P* ein zweites lokales System von Einheitsvektoren

$$\underline{\boldsymbol{e}}_1^*,\ \underline{\boldsymbol{e}}_2^*,\ \underline{\boldsymbol{e}}_3^*$$

der Art, dass

$$\underline{\boldsymbol{e}}_1^* \perp VW-\text{Ebene},\ \underline{\boldsymbol{e}}_2^* \perp WU-\text{Ebene},\ \underline{\boldsymbol{e}}_3^* \perp UV-\text{Ebene}$$

ist und die drei Vektoren jeweils auf der »positiven« Seite ihrer Orthogonalebene stehen (das ist die Seite, auf der der jeweils dritte Vektor des *UVW*-Systems steht). Da $\underline{\boldsymbol{e}}_1^*$ auf der *VW*-Ebene senkrecht steht, ist der Vektor auch orthogonal zur *V*- und zur *W*-Achse. Analoges gilt für die beiden anderen Vektoren des Systems. (Beachte: Dies trifft zu, obwohl beide Systeme schiefwinklig sind, also die Basisvektoren *ein und desselben* Systems nicht orthogonal sind.)



Sonderfall: Ist das in *O* definierte Basissystem mit den Vektoren $\boldsymbol{e}_i$ (i = 1, 2, 3) rechtwinklig, dann sind es die beiden anderen Systeme auch, und dann ist auch

$$\underline{\boldsymbol{e}}_1^* = \underline{\boldsymbol{e}}_1,\ \ \underline{\boldsymbol{e}}_2^* = \underline{\boldsymbol{e}}_2,\ \ \underline{\boldsymbol{e}}_3^* = \underline{\boldsymbol{e}}_3.$$

In diesem Fall heißen die beiden lokalen Systeme *reziprok* (zueinander). Da dann jeder Basisvektor aus dem einen System zu jedem Basisvektor aus dem anderen (reziproken) System entweder parallel oder orthogonal ist, gilt für die Skalarprodukte von je zwei Basisvektoren aus *verschiedenen* Systemen

$$\underline{\boldsymbol{e}}_i \cdot \underline{\boldsymbol{e}}_k^* = \begin{cases} 1, \text{ wenn } i = k \\ 0, \text{ wenn } i \neq k \end{cases}$$

Setzt man nach einem Vorschlag von *Kronecker*

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ wenn } i = k \\ 0, \text{ wenn } i \neq k \end{cases}$$

dann kann man schreiben

$$\underline{\boldsymbol{e}}_i \cdot \underline{\boldsymbol{e}}_k^* = \delta_{ik}.$$

δ_{ik} heißt Kroneckers delta.

Verallgemeinerung:
Alle Basissysteme, die dieser Bedingung genügen, werden *reziprok* (zueinander) genannt. Selbst wenn die Basisvektoren keine Einheitsvektoren sind, können sie diese Bedingung erfüllen, nämlich genau dann, wenn ihre Längen so gewählt werden, dass die entsprechenden Skalarprodukte den Wert 1 haben. Die Beträge der Basisvektoren müssen dann reziprok zueinander sein, woraus sich der Name der Basissysteme erklärt.

6 Kontravariante und kovariante lokale Basissysteme

Nun richten wir in *O* zwei verschiedene Basissysteme ein:

1. ein kartesisches *XYZ*-System mit den Basisvektoren ***i, j,k.***
2. ein schiefwinkliges *UVW*-System mit den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, die keine Einheitsvektoren sein müssen.

Ein beliebiger Punkt *P* hat dann im kartesischen System die Koordinaten *x, y, z*, im schiefwinkligen System die Koordinaten *u, v, w*. Je zwei Achsen der beiden Systeme bestimmen wieder eine Koordinatenebene.

Man kann nun Transformationsgleichungen aufstellen, mit denen die Koordinaten, die der Punkt *P* im *XYZ*-System hat, aus denen berechnet werden können, die er im *UVW*-System hat, und umgekehrt. Dabei ergeben sich zwei Systeme von je drei linearen, homogenen Gleichungen:

$$\begin{aligned} u &= u(x,y,z) \qquad & x &= x(u,v,w) \\ v &= v(x,y,z) \qquad & y &= y(u,v,w) \\ w &= w(x,y,z) \qquad & z &= z(u,v,w). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Der Ortsvektor *r* eines Punktes *P*(*x, y, z*) im *XYZ*-System mit den Basisvektoren ***i, j, k*** ist

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}.$$

Die partiellen Ableitungen von ***r*** nach seinen Koordinaten sind dann

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \boldsymbol{i}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \boldsymbol{j}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \boldsymbol{k}. \tag{3.27}$$

Im schiefwinkligen *UVW*-System ist der Ortsvektor ***r*** von *P*:

$$\boldsymbol{r} = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + w\boldsymbol{e}_3,$$

und seine partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \boldsymbol{e}_1, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \boldsymbol{e}_2, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = \boldsymbol{e}_3. \tag{3.28}$$

Wenn wir nun in *P* ein lokales System einführen, dessen Achsen zu den Basisvektoren des schiefwinkligen *UVW*-Systems parallel sind, dann heißt dieses System »ein zum *UVW*-System *kontravariantes System*«. Ein solches System wird durch eingeklammerte und hochgestellte Indizes bezeichnet. Abgesehen von der Parallelverschiebung gilt für die Basisvektoren des kontravarianten Systems also:

$$\boldsymbol{e}^{(i)} = \boldsymbol{e}_i \quad i = 1,2,3. \tag{3.29}$$

Mit den Gleichungen 3.29, 3.28 und 3.27 können die Basisvektoren des kontravarianten Systems durch die Basisvektoren des *XYZ*-Systems ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^{(1)} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{e}^{(2)} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{e}^{(3)} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial w}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\boldsymbol{k}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Als nächstes führen wir in P ein System mit den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_{(i)}$ ein, die auf den Koordinatenebenen des *UVW*-Systems senkrecht stehen. Ein solches System heißt *kovariant*. Wir finden seine Basisvektoren, indem wir bedenken, dass in der *UV*-Ebene w konstant (nämlich gleich null) ist. Ein darauf senkrechter Vektor ist der Vektor grad w. Ebenso ist grad u auf der *VW*-Ebene senkrecht und grad v auf der *WU*-Ebene. Wir benutzten nun diese drei Vektoren als kovariante Basisvektoren $\boldsymbol{e}_i$, selbst wenn sie keine Einheitsvektoren sind. Im *XYZ*-System können diese drei Vektoren dann so beschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{(1)} &= \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{e}_{(2)} &= \operatorname{grad} v = \frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{e}_{(3)} &= \operatorname{grad} w = \frac{\partial w}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Durch Bildung der entsprechenden Skalarprodukte kann bestätigt werden, dass das kontravariante und das kovariante System reziproke Systeme sind. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^{(1)} \cdot \boldsymbol{e}_{(1)} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \operatorname{grad} u = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial u} = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^{(1)} \cdot \boldsymbol{e}_{(2)} &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \operatorname{grad} v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial z}\\
&= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial u} = 0,
\end{aligned}$$

usw. Ein beliebiger Vektor $\boldsymbol{V}$ kann nun in jedem der beiden reziproken Systeme dargestellt werden. Seine Darstellung im kontravarianten System wird geschrieben

$$\boldsymbol{V} = V^1\boldsymbol{e}^{(1)} + V^2\boldsymbol{e}^{(2)} + V^3\boldsymbol{e}^{(3)},$$

seine Darstellung im kovarianten System dagegen ist

$$\boldsymbol{V} = V_1\boldsymbol{e}_{(1)} + V_2\boldsymbol{e}_{(2)} + V_3\boldsymbol{e}_{(3)}.$$

Die Indizes der Vektorkomponenten im kontravarianten System werden dabei zur Vereinfachung nicht in Klammern gesetzt, da eine Verwechslung mit Hochzahlen (Exponenten) wohl ausgeschlossen werden kann.

Da der Vektor vom benutzten Koordinatensystem unabhängig ist, gilt

$$V^1\boldsymbol{e}^{(1)} + V^2\boldsymbol{e}^{(2)} + V^3\boldsymbol{e}^{(3)} = V_1\boldsymbol{e}_{(1)} + V_2\boldsymbol{e}_{(2)} + V_3\boldsymbol{e}_{(3)}.$$

Zur Berechnung des Betrages von ***V*** bilden wir das Skalarprodukt ***V·V.*** Dabei benutzen wir die beiden verschiedenen Darstellungen und berücksichtigen beim Multiplizieren, dass die benutzten Basissysteme reziprok sind. Dabei erhalten wir ein interessantes Ergebnis:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V} = V^2 &= \left(V^1\boldsymbol{e}^{(1)} + V^2\boldsymbol{e}^{(2)} + V^3\boldsymbol{e}^{(3)}\right)\left(V_1\boldsymbol{e}_{(1)} + V_2\boldsymbol{e}_{(2)} + V_3\boldsymbol{e}_{(3)}\right)\cdot \\ &= V^1\boldsymbol{e}^{(1)}\cdot V_1\boldsymbol{e}_{(1)} + V^1\boldsymbol{e}^{(1)}\cdot V_2\boldsymbol{e}_{(2)} + V^1\boldsymbol{e}^{(1)}\cdot V_3\boldsymbol{e}_{(3)} + V^2\boldsymbol{e}^{(2)}\cdot V_1\boldsymbol{e}_{(1)} + V^2\boldsymbol{e}^{(2)}\cdot V_2\boldsymbol{e}_{(2)} + V^2\boldsymbol{e}^{(2)}\cdot V_3\boldsymbol{e}_{(3)} \\ &\quad + V^3\boldsymbol{e}^{(3)}\cdot V_1\boldsymbol{e}_{(1)} + V^3\boldsymbol{e}^{(3)}\cdot V_2\boldsymbol{e}_{(2)} + V^3\boldsymbol{e}^{(3)}\cdot V_3\boldsymbol{e}_{(3)} \\ &= V^1V_1 + V^2V_2 + V^3V_3.\end{aligned}$$

In abgekürzter Schreibweise:

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V} = V^2 = \sum_{i=1}^{3} V^iV_i = \sum_{i=1}^{3} V_iV^i.$$

Die Regel zur Berechnung eines Skalarprodukts gilt also auch, wenn die Faktoren der einzelnen Summanden aus verschiedenen Darstellungen stammen.

Übung 3.3

Zeigen Sie, dass die Gleichungen 3.26 homogen sind.

Übung 3.4

Berechnen Sie die Funktionen $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$.
Anleitung: Dies ist relativ einfach, weil das *XYZ*-System rechtwinklig ist und daher *x, y, z* die senkrechten Projektionen des Ortsvektors ***r*** von *P* auf die drei Achsen sind. Führen Sie dazu die Richtungskosinus $\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i\ \ (i = 1, 2, 3)$ der schiefwinkligen Achsen ein und projizieren Sie den Vektor

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = u\,\boldsymbol{e}_1 + v\,\boldsymbol{e}_2 + w\,\boldsymbol{e}_3$$

auf die kartesischen Achsen. Überzeugen Sie sich, dass die Gleichungen linear sind. Danach ist es prinzipiell möglich – wenn auch etwas mühsam –, die Umkehrfunktionen $u = u(x, y, z)$ zu finden. Wie wäre das anzustellen?

Übung 3.5

Woher kann man die für die Aufstellung der Gleichungen 3.30 benötigten partiellen Ableitungen von x, y, z nach u, v, w bekommen?

Übung 3.6

Rekapitulieren Sie, wie der Vektor grad u definiert ist und welche Eigenschaften er hat. Zeigen Sie, dass er auch die für unsere Zwecke richtige Richtung hat (also auf der positiven Seite seiner Orthogonalebene steht).

Übung 3.7

Die partielle Ableitung von u nach u ist offensichtlich gleich 1. Aber warum ist die partielle Ableitung von v nach u gleich 0?

7 Lösungen

Übung 3.1

Da in der Gleichung nur die Quadrate von ξ, η und ς auftreten dürfen, muss sein:

$$t_{12} = -t_{21}, \quad t_{23} = -t_{32}, \quad t_{31} = -t_{13}.$$

Übung 3.2

Die Gleichung eines Ellipsoids, dessen Hauptachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ein Rotationsellipsoid hat zwei gleiche Achsen, also muss sein

$$a = b \quad \text{oder} \quad a = c \quad \text{oder} \quad b = c,$$

woraus wegen

$$a^2 = \frac{1}{t_{11}}, \quad b^2 = \frac{1}{t_{22}}, \quad c^2 = \frac{1}{t_{33}}$$

folgt

$$t_{11} = t_{22} \quad \text{oder} \quad t_{11} = t_{33} \quad \text{oder} \quad t_{22} = t_{33}.$$

Wenn das Ellipsoid eine Kugel ist, sind alle drei Achsen gleich, also

$$t_{11} = t_{22} = t_{33}.$$

Übung 3.3

Da die Systeme denselben Ursprung O haben, muss für $x = y = z = 0$ auch $u = v = w = 0$ sein. Daher dürfen die Transformationsgleichungen kein Konstantglied enthalten.

Übung 3.4

Der Ortsvektor eines Punktes $P(x, y, z$ bzw. $u, v, w)$ ist im *XYZ*-System

$$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}, \tag{3.31}$$

im *UVW*-System

$$\boldsymbol{r} = u\,\boldsymbol{e}_1 + v\,\boldsymbol{e}_2 + w\,\boldsymbol{e}_3. \tag{3.32}$$

Da x, y, z die senkrechten Projektionen von $\boldsymbol{r}$ auf die Koordinatenachsen sind und diese sich aus den entsprechenden Skalarprodukten ergeben, ist

$$x = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{i}, \quad y = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j}, \quad z = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{k}$$

und mit Gleichung (3.32)

$$x = \left(u\,\boldsymbol{e}_1 + v\,\boldsymbol{e}_2 + w\,\boldsymbol{e}_3\right)\boldsymbol{i} = u\left(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{i}\right) + v\left(\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{i}\right) + \left(\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{i}\right). \tag{3.33}$$

Bezeichnen wir die Richtungskosinus von $\boldsymbol{e}_i$ mit α_i, dann wird aus Gleichung (3.33)

$$x = u\alpha_1\left|\boldsymbol{e}_1\right| + v\alpha_2\left|\boldsymbol{e}_2\right| + w\alpha_3\left|\boldsymbol{e}_3\right| = \alpha_1\left|\boldsymbol{e}_1\right|u + \alpha_2\left|\boldsymbol{e}_2\right|v + \alpha_3\left|\boldsymbol{e}_3\right|w. \tag{3.34}$$

Analog findet man

$$y = \beta_1\left|\boldsymbol{e}_1\right|u + \beta_2\left|\boldsymbol{e}_2\right|v + \beta_3\left|\boldsymbol{e}_3\right|w, \tag{3.35}$$

$$z = \gamma_1\left|\boldsymbol{e}_1\right|u + \gamma_2\left|\boldsymbol{e}_2\right|v + \gamma_3\left|\boldsymbol{e}_3\right|w. \tag{3.36}$$

Es handelt sich also um drei lineare homogene Funktionen.

Aus den Gleichungen (3.34), (3.35), (3.36) können mit den Methoden der Algebra (Einsetzmethode, Gleichsetzmethode, Additionsmethode) oder mit einem Rechenprogramm Gleichungen für u, v und w gewonnen werden.

Übung 3.5

Die partiellen Ableitungen ergeben sich aus den Gleichungen (3.26).

Übung 3.6

Der Vektors grad u weist in die Richtung der größten Steigung (des steilsten Anstiegs) der skalaren Feldgröße u. Der Betrag von grad u ist gleich dem Größenwert dieser größten Steigung. Der Vektor grad u steht auf der positiven Seite der *VW*-Ebene senkrecht, weil nur in dieser Richtung die u-Werte zunehmen.

Übung 3.7

Die partielle Ableitung von v nach u ist null, weil v eine von u unabhängige Variable ist.