

**Einführung
in die
Theoretische Physik**

Relativistische Mechanik

Siegfried Petry

Fassung vom 10. Juni 2016

Inhalt:

1 Einleitung	2
2 Die Transformationsgleichungen	2
2.1 GALILEI-Transformationen	2
2.2 LORENTZ-Transformationen	3
3 Die relativistischen Effekte	4
3.1 Die Relativität der Länge	4
3.2 Die Relativität der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse	5
3.3 Die Relativität der Dauer eines Vorgangs (Zeitdilatation)	6
3.4 Die Additionstheoreme der Geschwindigkeit	7
3.5 Die Relativität der Beschleunigung	7
3.5.1 Longitudinale Beschleunigung	7
3.2.5 Transversale Beschleunigung	8
3.6 Die kinetische Energie eines bewegten Körpers	8
3.7 Die Trägheit der Energie	9
3.8 Relativistischer Impuls, relativistische Bewegungsgleichungen	9
4 Der MINKOWSKI-Raum	10
4.1 Grundlegendes	10
4.2 Die Relativität der Länge	15
4.3 Die Relativität der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse	15
4.4 Die Relativität der Dauer eines Vorgangs	15
4.5 Ein grundsätzliches Problem des Minkowski-Raumes	16

1 Einleitung

Die wichtigste experimentelle Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie (EINSTEIN, 1905) ist der Versuch von MICHELSON und MORLEY (1887), mit dem der Einfluss der Erdbewegung auf die Geschwindigkeit des Lichtes relativ zu einem irdischen Beobachter nachgewiesen werden sollte. Dem Versuch lag die damals herrschende Vorstellung zugrunde, dass der Träger der Lichtwellen ein Medium wäre, das den Weltraum erfüllte und relativ zu diesem »absoluten Raum« ruhte. Dieses hypothetische Medium wurde »Lichtäther« genannt. Die Bewegung der Erde um die Sonne mit einer Geschwindigkeit von etwa 30 km/s müsste sich dann darin äußern, dass die Geschwindigkeit eines Lichtstrahls relativ zu einem Beobachter auf der Erde in Bewegungsrichtung der Erde eine andere sein müsste als in der entgegengesetzten Richtung. Der Unterschied müsste etwa 60 km/s betragen, was mit dem von MICHELSON entwickelten Interferometer nachzuweisen gewesen wäre. Der negative Ausgang des Versuchs stürzte die Physik in ein schweres Dilemma, das EINSTEIN erst 18 Jahre später und um den Preis eines radikalen Umsturzes der Grundlagen der Physik löste. Die Lösung bestand in den von ihm formulierten Prinzipien der Konstanz der (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit und der Gleichberechtigung (oder Gleichwertigkeit) aller Inertialsysteme (das sind unbeschleunigte Bezugssysteme) auch für optische Vorgänge

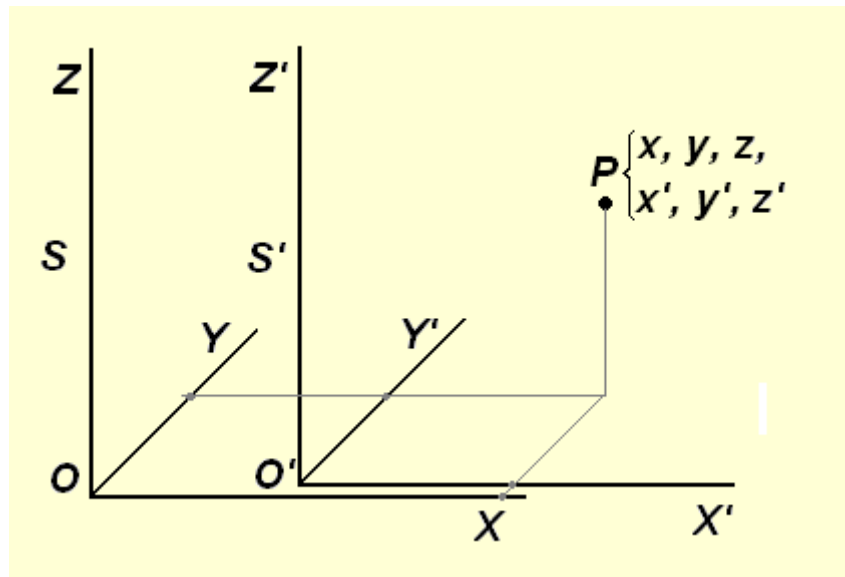
Die erste Konsequenz dieser Prinzipien war, dass die Hoffnung aufgegeben werden musste, mit Hilfe optischer Versuche die Geschwindigkeit eines Bezugssystems relativ zum Lichtäther und zum absoluten Raum bestimmen zu können. Dies wiederum bedeutete, dass der Lichtäther und der absolute Raum zu physikalisch leeren Begriffen wurden, und dass es sinnlos ist, von einem in ihm ruhenden bzw. bewegten Bezugssystem zu sprechen. (Es gibt nur noch relativ zueinander ruhende bzw. bewegte Bezugssysteme.) Ferner lässt sich bereits an dieser Stelle durch einen einfachen Gedankenversuch und ohne jede Rechnung zeigen, dass der Begriff der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse, die an verschiedenen Orten stattfinden, sowie die Merkmale »vorher« und »nachher« keine über das jeweilige Bezugssysteme hinausgehende Bedeutung haben. (Siehe dazu „Einführung in die Spezielle Relativitätstheorie“, Teil 1, Seite 8 auf dieser Website.) Daraus folgt wiederum, dass die klassische Vorstellung einer »absoluten Zeit« (NEWTON) aufgegeben werden muss. Besonders eindrucksvoll wird dies durch das sogenannte Zwillingsparadoxon begründet.

2 Die Transformationsgleichungen

2.1 GALILEI-Transformationen

Das erste Opfer des Prinzips der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wurden die GALILEI-Transformationen der klassischen Mechanik, die dort für den Übergang zwischen zwei relativ zueinander bewegten Bezugssystemen galten.

Wir betrachten zwei mit der Bahngeschwindigkeit v relativ zueinander bewegte Bezugssysteme S und S' in der üblichen Anordnung. Sie bestehen aus je einem kartesischen Koordinatensystem und einer Anzahl synchronisierter Uhren.



Zur Zeit $t = t' = 0$ sollen die beiden Ursprünge zusammenfallen. Die Abbildung zeigt die beiden Bezugssysteme zu einer beliebigen Zeit t . Ein Punkt P habe in S die Koordinaten x, y, z , in S' die Koordinaten x', y', z' . Dann gilt für die Umrechnung (Transformation) der Koordinaten und der Zeit von einem Bezugssystem ins andere:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, & x &= x' + vt, \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= z, & z &= z', \\ t' &= t, & t &= t'. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen heißen GALILEI-Transformationen. Sie sind – wie leicht zu erkennen ist – mit dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nicht vereinbar.

2.2 Die LORENTZ-Transformationen

Aus dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgen die so genannten LORENTZ-Transformationen:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= z, & z &= z', \\ t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, & t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}, \quad c: \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit}$$

(Für eine Herleitung der LORENTZ-Transformationen siehe z. B. „Einführung in die Spezielle Relativitätstheorie“ unter dem Obertitel „Spezielle Relativitätstheorie“ auf dieser Website. Dort sind

auch eine Abhandlung „Das Zwillingsparadoxon“ und unter „Anlagen“ alle weiteren Herleitungen zu finden.

Bei der Herstellung der beiden relativ zueinander bewegten Bezugssysteme ist nun zu beachten, dass nicht – wie EINSTEIN es in seiner grundlegenden Arbeit zur Speziellen Relativitätstheorie tat – einfach eines der beiden Systeme auf die Geschwindigkeit v beschleunigt werden darf, weil dadurch die Gleichwertigkeit der beiden Systeme zerstört wird, indem der Gang der Uhren im beschleunigten System verändert wird. Vielmehr müssen die beiden Systeme in entgegengesetzten Richtungen, aber sonst in völlig gleicher Weise beschleunigt werden. (Siehe dazu: „Das Zwillingsparadoxon“, ebenfalls auf dieser Website unter „Spezielle Relativitätstheorie“.)

Aus den LORENTZ-Transformationen ergeben sich reelle Koordinaten nur für $\beta < 1$, d. h. für $v < c$. Daraus folgt, dass die Relativgeschwindigkeit von Bezugssystemen immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein muss. Für nicht zu große Geschwindigkeiten ergeben sich aus den LORENTZ-Transformationen als Näherung die GALILEI-Transformationen,

Zunächst soll verifiziert werden, dass die LORENTZ-Transformationen dem Prinzip der Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen und in beiden Bezugssystemen genügen. Wir nehmen dazu an, dass sich in S eine kugelförmige Lichtwelle mit der Geschwindigkeit c ausbreite, die zur Zeit $t = 0$ in O gestartet ist. Die Gleichung ihrer Wellenfront lautet dann

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Wie breitet sich diese Welle für einen Beobachter in S' aus? Zur Beantwortung ersetzen wir mit Hilfe der rechts stehenden Gleichungen der LORENTZ-Transformationen die ungestrichenen Koordinaten durch die gestrichenen und erhalten:

$$\frac{(x' + vt')^2}{1 - \beta^2} + y'^2 + z'^2 = c^2 \frac{\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)^2}{1 - \beta^2},$$

woraus sich schließlich ergibt

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2.$$

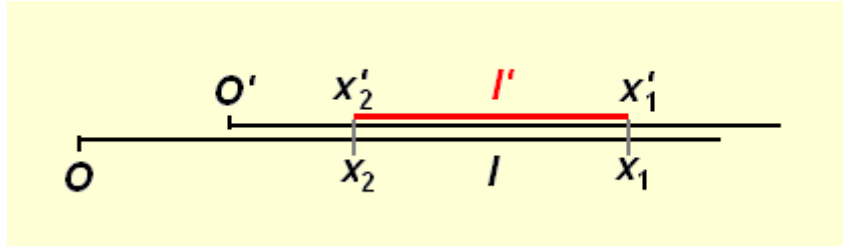
Das bedeutet: Auch im System S' breitet sich das Licht als Kugelwelle, also einer in allen Richtungen gleichen Geschwindigkeit – nämlich c – aus.

3 Die relativistischen Effekte

3.1 Die Relativität der Länge eines Körpers (»Längenkontraktion«)

Auf der X' -Achse des Systems S' liege ein Körper, im einfachsten Fall ein Stab, der für einen Beobachter in S' die Länge l' hat. Wie kann ein Beobachter in S die Länge dieses Stabes messen, der sich mit der Geschwindigkeit v an ihm vorbeibewegt? Eine plausible, von EINSTEIN vorgeschlagene Methode ist, dass der Beobachter auf irgendeine Weise *zur gleichen Zeit* die Position des Anfangs- und die des Endpunktes des Stabes auf seiner X -Achse markiert.

Im System S' sollen die beiden Punkte die Koordinaten x'_1 und x'_2 haben. Ihre im System S zur gleichen Zeit t registrierten Positionen seien x_1 und x_2 .



Dann ist

$$l = x_1 - x_2 \quad \text{und} \quad l' = x'_1 - x'_2,$$

wobei

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

woraus folgt

$$x'_1 - x'_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad x_1 - x_2 = (x'_1 - x'_2) \sqrt{1 - \beta^2}$$

oder

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Für den Beobachter in S ist der Stab also kürzer als für den Beobachter in S' . Die Ursache der relativistischen Verkürzung ist nicht etwa, dass der Stab sich in S' verkürzt hätte (die ursprüngliche Bedeutung der sogenannten LORENTZ-Kontraktion) oder dass der Stab dem Beobachter in S nur verkürzt vorkäme, sondern vielmehr die unterschiedliche Bewertung der Gleichzeitigkeit bzw. Ungleichzeitigkeit in beiden Systemen. Das heißt: Wenn der Beobachter in S die Position des Anfangs- und die des Endpunktes des Stabes gleichzeitig registriert, so geschieht das für einen Beobachter in S' nicht gleichzeitig. (Siehe dazu das nächste Kapitel.)

Ruht der Stab dagegen im System S , dann ist seine Länge für einen Beobachter in S'

$$l' = l \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Der Effekt ist also „symmetrisch“: Für jeden Beobachter ist der im jeweils anderen System ruhende Stab kürzer geworden. (Darin zeigt sich auch die Gleichberechtigung und die Gleichwertigkeit der beiden Bezugssysteme.)

3.2 Die Relativität der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse

Wir betrachten zwei Ereignisse, die im System S in den Punkten $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ zur selben Zeit t stattfinden. Dann sind die entsprechenden Zeiten im System S' :

$$t'_1 = \frac{t - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t'_2 = \frac{t - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{und} \quad t'_2 - t'_1 = \frac{v}{c^2} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Im System S' haben die beiden Ereignisse einen von null verschiedenen zeitlichen Abstand, der zur Relativgeschwindigkeit der Systeme und dem räumlichen Abstand der Ereignisse proportional ist.

Finden dagegen die Ereignisse im System S' gleichzeitig statt, dann haben sie im System S den zeitlichen Abstand

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2} \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Auch dieser Effekt ist also im oben beschriebenen Sinn symmetrisch.

3.3 Die Relativität der Dauer eines Vorgangs (Zeitdilatation)

In einem Punkt des Systems S' spiele sich vom Zeitpunkt t'_1 bis zum Zeitpunkt t'_2 irgendein Vorgang ab. Die Dauer dieses Vorgangs ist demnach $t'_2 - t'_1$. Wie lang dauert dieser Vorgang für einen Beobachter in S ?

Aus der Gleichung

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

folgt:

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{oder} \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Umgekehrt gilt für die Dauer eines Vorgangs, der in einem Punkt des Systems S stattfindet:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Die Dauer jedes Vorgangs ist für einen relativ dazu bewegten Beobachter länger als für einen relativ dazu ruhenden Beobachter. Auch dieser Effekt ist symmetrisch; er wird als (relative) Zeitdilatation bezeichnet. (Relativ deshalb, weil es auch eine absolute Zeitdilatation gibt.)

3.4 Die Additionstheoreme der Geschwindigkeit

Als Folge der Zeitdilatation und der Relativität der Länge erscheinen in einem relativ bewegten Bezugssystem auch die Geschwindigkeiten verändert. Es sei

\mathbf{u}' die Geschwindigkeit eines Körpers im System S' mit den Komponenten u'_x, u'_y, u'_z ,

\mathbf{u} die Geschwindigkeit dieses Körpers im System S mit den Komponenten u_x, u_y, u_z ,

v die Bahngeschwindigkeit des Systems S' gegenüber dem System S in Richtung der X -Achsen.

Dann ist

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{dx'}{dt'} \frac{dt'}{dt} + v \frac{dt'}{dt}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\left(\frac{dx'}{dt'} + v \right) \frac{dt'}{dt}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(u'_x + v) \frac{dt'}{dt}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

und mit

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt'} \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{dt'}{dt'} + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dt'}}$$

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

Hieraus folgt, dass selbst für $u'_x = v = c$ auch u_x lediglich gleich c wäre. Ebenso findet man

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \frac{dt'}{dt} = u'_y \frac{dt'}{dt} = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

und

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}$$

Wegen der Gleichberechtigung der beiden Systeme findet man durch Analogieschlüsse

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}.$$

3.5 Die Relativität der Beschleunigung

Hier müssen wir unterscheiden zwischen einer Beschleunigung in Bewegungsrichtung (longitudinal) und senkrecht dazu (transversal). Der betrachtete Körper möge zunächst im System S' ruhen ($u'_{x'} = 0$).

3.5.1 Longitudinale Beschleunigung

Ein im System S' zunächst ruhender Körper erfahre (in diesem System) die longitudinale Beschleunigung a'_l . Damit ist eine Beschleunigung in Richtung der X' -Achse gemeint, also in Richtung der Geschwindigkeit v , die er gegenüber dem System S hat. Dann beträgt seine Beschleunigung a_l gegenüber dem System S

$$a_l = a'_l (1 - \beta^2)^{3/2}.$$

Die Beweise für dieses Theorem und das folgende finden Sie unter „Anlagen zur Speziellen Relativitätstheorie“ auf dieser Website.

3.5.2 Transversale Beschleunigung

Erfährt der Körper dagegen eine transversale Beschleunigung a'_t , also eine Beschleunigung senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung und damit senkrecht zur X' -Achse, dann gilt für seine Beschleunigung bezüglich des Systems S :

$$a_t = a'_t (1 - \beta^2).$$

Die longitudinale und die transversale Beschleunigung werden demnach unterschiedlich transformiert.

3.6 Die kinetische Energie eines bewegten Körpers

Durch einen Gedankenversuch (Beschleunigung eines elektrisch geladenen Körpers in einem elektrischen Feld) fand EINSTEIN (1905, 1) für die kinetische Energie eines Körpers der Masse m bei der Geschwindigkeit v

$$E_{kin} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \quad (\text{A})$$

Durch Reihenentwicklung des Bruchs folgt daraus

$$E_{kin} = m \left(\frac{v^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^2} + \dots \right),$$

woraus sich für nicht zu große Geschwindigkeiten als Näherung der klassische Ausdruck für die kinetische Energie ergibt.

3.7 Die Trägheit der Energie

In seiner zweiten Arbeit zur Speziellen Relativitätstheorie bewies EINSTEIN (1905, 2), dass die Trägheit eines Körpers kleiner wird, wenn er durch elektromagnetische Strahlung Energie abgibt. Er hat dieses Ergebnis verallgemeinert und gefolgert, dass jede Änderung der Energie (kinetische Energie, potentielle Energie, Wärmeenergie, ...) eines Körpers mit einer Änderung seiner Trägheit und damit auch einer Änderung seiner Masse verbunden ist. Er schloss daraus, dass Energie Masse besitzt. Nach seinen Befunden beträgt die Masse m_E einer Energie E :

$$m_E = \frac{E}{c^2}.$$

Zusammen mit der Gleichung (A) von Seite 8 folgt daraus, dass die Summe aus der (eigentlichen) Masse m eines Körpers und der Masse m_E seiner kinetischen Energie bei der Geschwindigkeit v

$$m + m_E = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

beträgt.

Anmerkungen zur „Äquivalenz von Masse und Energie“.

Dieser häufig anzutreffende Terminus ist irreführend. Äquivalenz bedeutet Gleichwertigkeit. Masse und Energie aber sind nicht gleichwertig, sondern ganz verschiedene physikalische Größenarten. Richtig sind folgende Aussagen:

1. Jedes Energiequantum besitzt Trägheit (und somit eine Eigenschaft, deren Träger in der Physik als Masse bezeichnet wird). Der Größenwert dieser Trägheit ist dem Größenwert der Energie proportional. Wird der Gehalt eines Körpers an zum Beispiel potentieller Energie, kinetischer Energie oder Wärmeenergie verändert, dann verändert sich seine Trägheit proportional zur Änderung der Energie.

2. Jeder Masse (eines Körpers) entspricht eine dieser Masse proportionale Energiemenge. Sie kann bei bestimmten Prozessen) freigesetzt werden.

In beiden Fällen ist die Proportionalitätskonstante keine reine Zahl (Skalar), sondern das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit bzw. dessen Kehrwert. Schon dies beweist, dass Masse und Energie nicht gleichwertig (äquivalent) sind.

Auch ist die Aussage falsch, bei Kernspaltungsprozessen würden 0,07 % und bei Kernfusionen 0,7 % der beteiligten Masse in Energie umgesetzt. (Bei chemischen Prozessen liege die Umwandlungsquote im Nano- oder Pikobereich.) Tatsächlich wird in allen drei Fällen potentielle Energie in andere Energieformen umgesetzt. Und die freigesetzte Energie nimmt die Trägheit (also die „Masse“) mit. Lediglich bei Zerstrahlungsprozessen (beim Zusammentreffen eines Elementarteilchens mit einem seiner Antiteilchen) verschwinden die beteiligten Teilchen. Aber selbst dann geht ihre Trägheit auf die entstehende Strahlung über.

3.8 Relativistischer Impuls, relativistische Bewegungsgleichungen

Dementsprechend beträgt der Impuls \mathbf{p} eines Körpers der Masse m (unter Beibehaltung der klassischen Impulsdefinition) bei der Geschwindigkeit \mathbf{v}

$$\mathbf{p} = (m + m_E)\mathbf{v} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

und die Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ der klassischen Mechanik wird – da \mathbf{F} und \mathbf{a} nicht immer dieselbe Richtung haben (siehe unten) – ersetzt durch

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Die Komponentengleichungen lauten dann

$$F_x = m \frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = m \frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_x^2}{c^2}}} = m \frac{1}{\left(1-\frac{v_x^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv_x}{dt} = \frac{m a_x}{(1-\beta^2)^{3/2}},$$

$$F_y = m \frac{d}{dt} \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m a_y}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$F_z = m \frac{d}{dt} \frac{v_z}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m a_z}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Die Beschleunigung ist folglich

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2 + a_z \mathbf{e}_3 = \frac{1}{m} \left[F_x (1-\beta^2)^{3/2} \mathbf{e}_1 + F_y \sqrt{1-\beta^2} \mathbf{e}_2 + F_z \sqrt{1-\beta^2} \mathbf{e}_3 \right],$$

oder

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} \left[F_x (1-\beta^2) \mathbf{e}_1 + F_y \mathbf{e}_2 + F_z \mathbf{e}_3 \right].$$

Die Beschleunigung hat also nicht immer dieselbe Richtung wie die Kraft. Dies rührt daher, dass der Körper gegenüber longitudinaler Beschleunigung (Beschleunigung in Bewegungsrichtung) eine andere Trägheit besitzt als gegenüber transversaler Beschleunigung. Der Grund dafür ist, dass bei transversaler Beschleunigung nur die Richtung seiner Geschwindigkeit geändert wird, nicht aber deren Betrag. Damit ändert sich auch die kinetische Energie des Körpers nicht, während bei longitudinaler Beschleunigung beide, Geschwindigkeit und kinetische Energie, zunehmen. Die klassische Gleichung

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

muss ersetzt werden durch:

$$F_x = \frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}} a, \quad F_y = F_z = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} a.$$

Daraus hat man früher geschlossen, der Körper besitze drei verschiedene Massen:

die Ruhemasse m , die longitudinale Masse $\frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}}$, die transversale Masse $\frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Diese Auffassung und die daher stammenden Begriffe gelten inzwischen als überholt, sind aber noch nicht ausgestorben.

4 Der MINKOWSKI-Raum

4.1 Grundlegendes

Das Weltmodell der klassischen Physik ist ein dreidimensionaler euklidischer Raum, in dem eine »absolute Zeit« abläuft, die keinen äußeren Einflüssen unterworfen ist. Dieses Weltmodell ist mit den Ergebnissen der Speziellen Relativitätstheorie nicht vereinbar. Die naheliegende Frage, was denn nun an seine Stelle zu treten habe, schien Einstein nicht sonderlich zu interessieren, wohl aber beschäftigte sie jahrelang den deutschen Mathematiker Hermann MINKOWSKI, der die Ergebnisse seiner Arbeit 1908 veröffentlichte. Sie werden im Folgenden dargestellt.

Multipliziert man die Gleichungen

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

der LORENTZ-Transformationen mit c und setzt dann überall $ct = w$ und $ct' = w'$, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - \frac{v}{c} w}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x &= \frac{x' + \frac{v}{c} w'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ w' &= \frac{w - \frac{v}{c} x}{\sqrt{1-\beta^2}}, & w &= \frac{w' + \frac{v}{c} x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{B}$$

Ich nenne diese Gleichungen **Minkowski-Transformationen**.

Als erstes fällt die Ähnlichkeit der unteren Gleichungen mit den jeweils darüberstehenden auf: Die unteren Gleichungen gehen durch Vertauschung der Koordinaten aus den oberen hervor und umgekehrt. Das besagt, dass bei Übergang zu einem in X -Richtung bewegten Bezugssystem die w -Koordinaten ganz analog transformiert werden wie die x -Koordinaten. (Die beiden anderen Koordinaten bleiben – wie bei den Lorentz-Transformationen – unverändert.)

Ferner haben wir statt der drei räumlichen Koordinaten (Längenkoordinaten) und einer Zeitkoordinate jetzt vier räumliche Koordinaten, denn die w -Koordinate ist ebenfalls eine Länge, nämlich die Strecke, welche das Licht in der Zeit t zurücklegt. Die vier Koordinatenachsen für x , y , z und w spannen also einen vierdimensionalen Raum auf, der für uns zwar denkbar und mathematisch erfassbar, aber nicht anschaulich vorstellbar ist. Dieser Raum heißt MINKOWSKI-Raum und gilt – unbestritten und auch kaum bestreitbar - als das der Speziellen Relativitätstheorie angemessene Weltmodell.

Um uns mit diesem Raum vertraut zu machen, betrachten wir als erstes eine kugelförmige Lichtwelle, die zur Zeit $t = 0$ in O startet. Für die Koordinaten ihrer Wellenfront gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad \text{und} \quad w = ct \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = w^2.$$

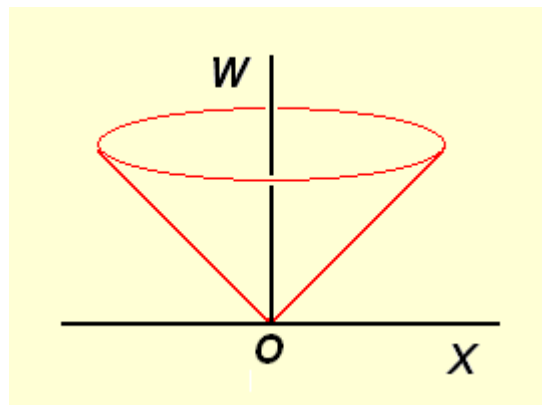
In der XY -Ebene breitet sie sich als Kreiswelle aus, für deren Frontwelle gilt

$$x^2 + y^2 = c^2 t^2.$$

In dem auf drei Dimensionen reduzierten XYW -Minkowski-Raum lautet die Gleichung der Wellenfront

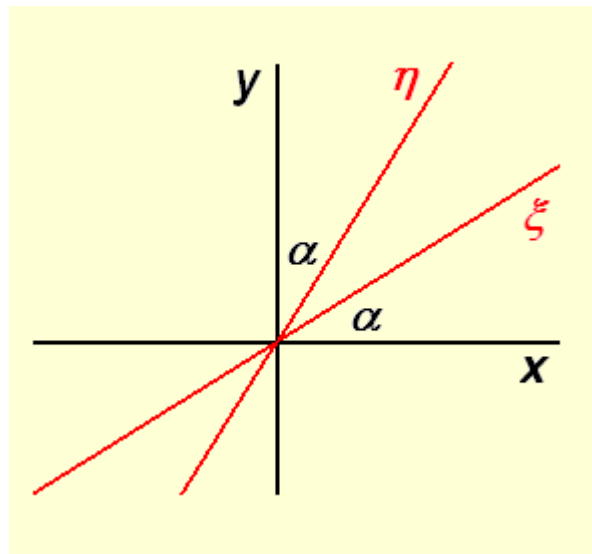
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 t^2 \\ w = ct \end{cases}$$

Während sich der Radius des Kreises mit Lichtgeschwindigkeit vergrößert, bewegt er sich im Minkowski-Raum mit Lichtgeschwindigkeit nach oben und beschreibt dabei einen Kreiskegel. (Die Y -Achse stehe auf der Zeichenebene senkrecht.)



Da der gezeichnete Kreis in der XY -Ebene liegt, muss sich auch diese im Minkowski-Raum mit Lichtgeschwindigkeit nach oben bewegen. Das gleiche gilt für den dreidimensionalen XYZ -Raum. Im vierdimensionalen Minkowski-Raum bewegt sich also unser dreidimensionaler Raum mit Lichtgeschwindigkeit längs der W -Achse nach oben.

Wie ist nun das System S' im Minkowski-Raum darzustellen? Die Gleichungen (B) können interpretiert werden als Gleichungen für die Koordinatentransformation von einem rechtwinkligen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem und umgekehrt.



Aus der Analytischen Geometrie entnehmen wir dafür folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha, & \xi &= \frac{x \cos \alpha - y \sin \alpha}{\cos 2\alpha}, \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha, & \eta &= \frac{-x \sin \alpha + y \cos \alpha}{\cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Als nächstes drücken wir alle vorkommenden Winkelfunktionen durch $\tan \alpha$ aus:

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

Damit erhalten wir

$$x = \xi \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} + \eta \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad y = \xi \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} + \eta \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

Da $\tan \alpha$ alle reellen Zahlenwerte annehmen kann, ist es stets möglich, den Winkel α so zu wählen, dass $\tan \alpha = \beta = v/c$ wird. Dann ist

$$x = \xi \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} + \eta \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}}, \quad y = \xi \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} + \eta \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}. \quad (\text{C})$$

Nun sollen die Einheitsstrecken e und e' auf den Achsen des schiefwinkligen Koordinatensystems im Verhältnis

$$\frac{e'}{e} = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$$

gestreckt werden. Dabei ist e' die neue Einheitsstrecke und e die alte Einheitsstrecke (gleichzeitig die Einheitsstrecke auf den rechtwinkligen Achsen). Das hat zur Folge, dass die Koordinaten eines jeden Punktes im schiefwinkligen System entsprechend – und das heißt: im reziproken Verhältnis – kleiner werden. Bezeichnen wir die neuen Koordinaten mit x' und w' und ersetzen gleichzeitig y durch w , dann gilt

$$\frac{x'}{\xi} = \sqrt{\cos 2\alpha} \Rightarrow \xi = \frac{x'}{\sqrt{\cos 2\alpha}} = x' \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

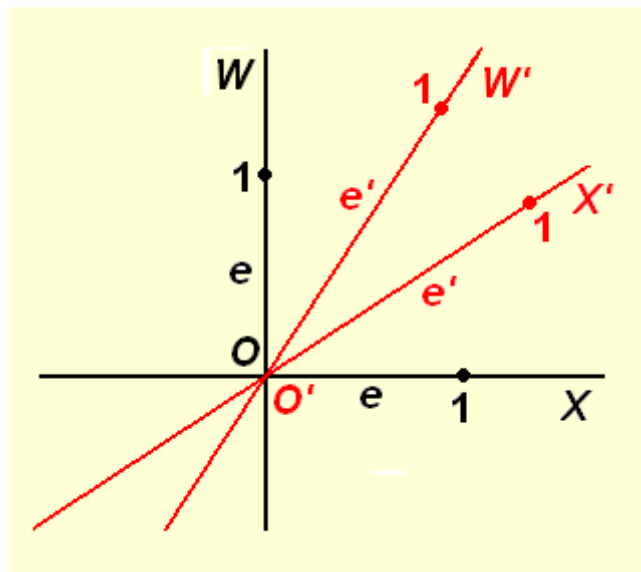
$$\frac{w'}{\eta} = \sqrt{\cos 2\alpha} \Rightarrow \eta = \frac{w'}{\sqrt{\cos 2\alpha}} = w' \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Setzt man dies in die Gleichungen (C) ein, ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$x = \frac{x' + \beta w'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad w = \frac{w' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Diese Gleichungen sind identisch mit den entsprechenden Gleichungen von (B). Analog findet man die beiden anderen Gleichungen

$$x' = \frac{x - \beta w}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad w' = \frac{w - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$



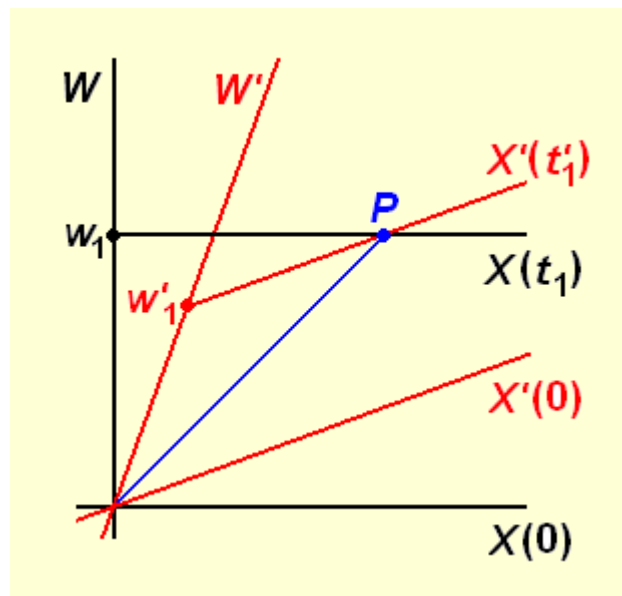
Wegen der Gleichberechtigung der beiden Bezugssysteme ist es auch möglich, das Systems S' im Minkowski-Raum rechtwinklig und das Systems S schiefwinklig (mit entgegengesetztem Drehwinkel) darzustellen.

Der Anspruch, der Minkowski-Raum wäre das der Speziellen Relativitätstheorie angemessene Weltmodell, gründet sich darauf, dass sich die relativistischen Effekte als logische Konsequenz seiner Struktur ergeben. Die enge, unlösbare Verknüpfung der Zeitkoordinaten mit den Ortskoordinaten, wie sie sich in den LORENTZ-Transformationen ausdrückt, äußert sich zunächst darin, dass die vierte

Dimension das Produkt aus der Lichtgeschwindigkeit und der Zeit ist. Der unaufhaltsame, naturgesetzliche Ablauf der Zeit zeigt sich darin, dass der dreidimensionale Raum, in dem wir leben, sich mit Lichtgeschwindigkeit längs der W -Achse bewegt. Dazu kommt, dass dem relativ zu S bewegten Bezugssystem S' eine eigene W' -Achse zugeordnet wird, auf der sich der Ursprung der X' -Achse ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Die Drehung der beiden Achsen (in entgegengesetztem Sinn) schließlich führt, wie noch gezeigt wird, zwangsläufig zu den oben beschriebenen relativistischen Effekten, für die es in der klassischen Physik keine Erklärung gibt.

So eng aber auch die Verknüpfung von Raum und Zeit im Minkowski-Raum sein mag, so ist es doch absurd, diesen als vierdimensionale »Raum-Zeit« zu betrachten, wie das weithin üblich ist. Weil die Koordinate $w = ct$ ebenfalls eine Längenkoordinate ist, ist der Minkowski-Raum ein vierdimensionaler Raum mit vier Längachsen. Die Konsequenzen dieser Tatsache werden im Kapitel 4.5 dargestellt.

Ein Lichtimpuls, der zur Zeit $t = t' = 0$ von O und O' ausgeht und sich längs der positiven X/X' -Achse mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, bewegt sich im Minkowski-Raum auf der Winkelhalbierenden der Achsen des Systems S . Da diese gleichzeitig die Winkelhalbierende der Achsen des Systems S' ist, breitet sich der Lichtimpuls auch im System S' mit der Geschwindigkeit c aus. Wie zu erwarten war, gilt also im Minkowski-Raum das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.



Hat der Lichtimpuls den Punkt P erreicht, befinden die X/X' -Achsen in den gezeichneten Positionen. Die Koordinaten des Punktes P sind dann

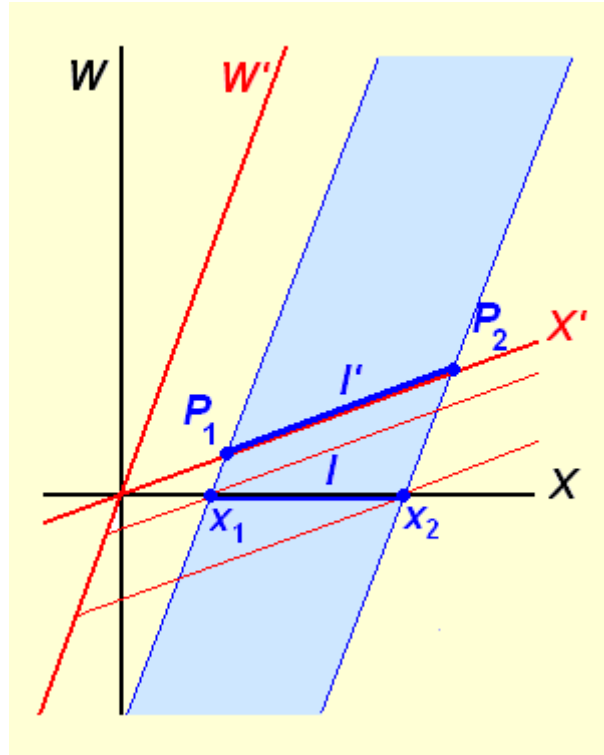
$$x_1 = ct_1, \quad w_1 = ct_1, \quad x'_1 = ct'_1, \quad w'_1 = ct'_1.$$

Bezeichnen wir das Eintreffen des Lichtimpulses in P als »Ereignis E «, dann ist P der Ort des Ereignisses E und x_1, w_1 sind seine Koordinaten im Minkowski-Raum für das Bezugssystem S , dagegen sind x'_1, w'_1 seine Koordinaten im Minkowski-Raum für das Bezugssystem S' . Die Punkte des Minkowski-Raumes repräsentieren also jeweils den Ort und (indirekt) die Zeit eines Ereignisses in der Welt. Ein Ereignis tritt im Systems S genau dann ein, wenn die X -Achse (allgemeiner: die XY -Ebene, und ganz genau: der XYZ -Raum) durch den Punkt geht, der das Ereignis repräsentiert. Ereignisse, deren Punkte oberhalb der X -Achse (der XY -Ebene ...) liegen, sind zukünftig, Ereignisse, deren Punkte darunterliegen, sind vergangen.

4.2 Die Relativität der Länge

Betrachten wir einen auf der X' -Achse liegenden Stab, der von den Punkten P_1 und P_2 begrenzt wird, welche in S' die (festen) Koordinaten x'_1 und x'_2 haben. Die Länge l' des Stabes für einen Beobachter in S' ist dann

$$l' = x'_2 - x'_1.$$



Im Laufe der Zeit durchläuft der auf der X' -Achse liegende Stab den hellblau gezeichneten Streifen. Seine Ränder schneiden die X -Achse in den Punkten mit den Koordinaten x_1 und x_2 , und dies geschieht im System S gleichzeitig zur Zeit $t = 0$. daher stellt die Strecke $x_2 - x_1$ die Länge l des Stabes im System S dar. Die Berechnung der Koordinaten liefert dann für l den Wert

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2}.$$

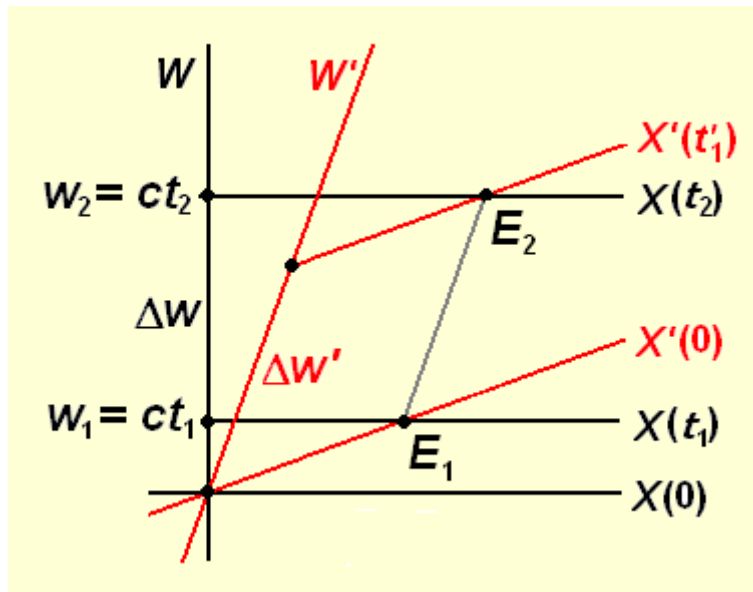
Soweit die übliche Erklärung der so genannten Längenkontraktion. Sie hat nur einen Haken, der regelmäßig übersehen wird: Die X' -Achse kann nicht gleichzeitig an zwei verschiedenen Stellen sein – es sei denn, sie wäre gleichzeitig überall. – Wir kommen später darauf zurück.

4.3 Die Relativität der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse

Dieser relativistische Effekt erklärt sich durch die Drehung der X' -Achse. Wie man der obigen Abbildung entnehmen kann, sind zwei Ereignisse, die in S gleichzeitig sind (hier die mit den Koordinaten x_1 und x_2), in S' nicht gleichzeitig. Andererseits sind die durch P_1 und P_2 charakterisierten Ereignisse in S' gleichzeitig, nicht aber in S .

4.4 Die Relativität der Dauer eines Vorgangs

Beginn und Ende eines Vorgangs, der an einem bestimmten Ort des Systems S' stattfindet, können als zwei Ereignisse E_1 und E_2 aufgefasst werden.



In der Abbildung erscheint $\Delta w < \Delta w'$, dies liegt jedoch an den vergrößerten Einheitsstrecken in S' . Tatsächlich ist $\Delta w > \Delta w'$, und damit $\Delta t = t_2 - t_1 > t'_2 - t'_1 = \Delta t'$.

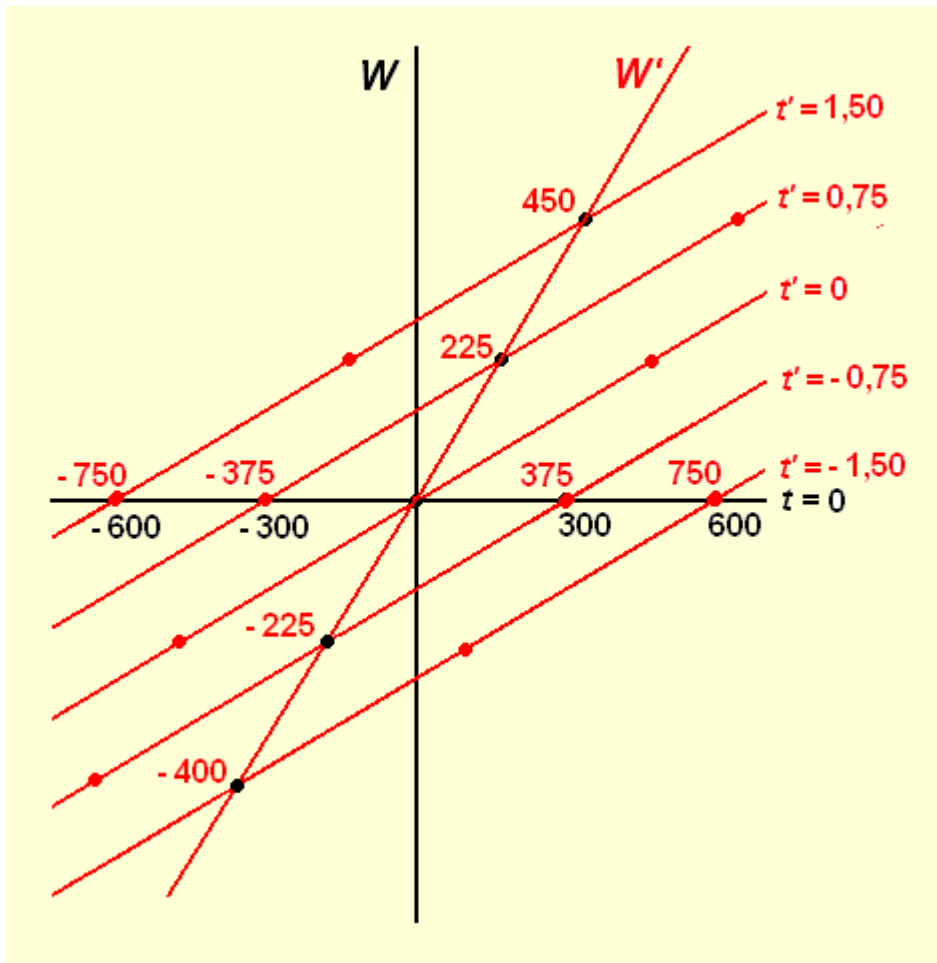
4.5 Ein grundsätzliches Problem des Minkowski-Raumes

Wir können uns dem Problem von drei verschiedenen Seiten aus nähern:

1. Im Kapitel 4.2 begegnete uns die Schwierigkeit, dass für einen Beobachter im System S die X' -Achse gleichzeitig an zwei verschiedenen Stellen gegenwärtig sein musste.
2. Durch die Drehung der X' -Achse hat sie immer nur einen Punkt mit der X -Achse gemeinsam, nämlich ihren Ursprung O' , der sich auf der X -Achse bewegt. Alle anderen Punkte sind aus der X -Achse herausgedreht und befinden sich für einen Beobachter in S entweder in seiner Vergangenheit oder in seiner Zukunft, sind also für ihn nicht gegenwärtig und daher unsichtbar.
3. Den LORENTZ-Transformationen können wir dagegen entnehmen, dass jeder Punkt der X -Achse mit genau einem (wechselndem) Punkt der X' -Achse zusammenfällt, in welchem allerdings eine andere Zeit gilt. Betrachten wir einige Punkte der X -Achse zur Zeit $t = 0$ und berechnen wir die dazugehörigen Orts- und Zeitkoordinaten im System S' für $\beta = 0,6$.

x/m	x'/m	$t'/\mu s$
-600	-750	1,50
-300	-375	0,75
0	0	0
300	375	-0,75
600	750	-1,50

Im Minkowski-Raum dargestellt:



Wieder erkennt man, dass durch jeden Punkt der X -Achse genau eine X' -Achse geht, und dass jeder dieser Achsen einen anderen w' -Wert hat und damit eine andere Zeit. Alle diese Achsen sind jedoch für einen Beobachter in S gleichzeitig gegenwärtig. Daraus muss man folgern, dass auch im Minkowski-Raum alle diese Achsen gleichzeitig existieren. Was sich tatsächlich bewegt, ist nur der vom Beobachter als gegenwärtig wahrgenommene dreidimensionale Ausschnitt daraus.

Literatur:

Einstein¹, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik und Chemie, Jg. 17.

Einstein², Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? A. a. O. Jg. 18