Einführung
in die
Theoretische Physik

5. Teil: Mechanik starrer Körper

Siegfried Petry

16. Januar 2013

I n h a l t :

1 Die Kinematik starrer Körper

1.1 Was ist ein starrer Körper?

Ein starrer Körper ist ein System von Massenpunkten, deren Entfernungen voneinander konstant sind. Wir sehen also ab von Deformationen des Körpers und von Schwingungen der Massenpunkte (Atome, Moleküle), wie sie bei realen Körpern stets vorhanden sind. Der „starre Körper“ ist also auch eine der so nützlichen Abstraktionen und Idealisierungen der Theoretischen Physik.

1.2 Die Verschiebung eines starren Körpers

Die einzig mögliche Veränderung eines starren Körpers ist demnach die Veränderung seiner Lage relativ zu anderen Körpern, z. B. relativ zu einem Bezugssystem, das von einem Beobachter als ruhend betrachtet wird. Eine solche Lageänderung heißt »Verschiebung«. Sie kann auf drei verschiedene Arten geschehen:

Die Translation

Diese ist eine Verschiebung aller Massenpunkte des Körpers um denselben Vektor $\boldsymbol{s}$. Der Ortsvektor $\boldsymbol{r}_\mathrm{i}$ eines beliebigen Punktes geht dabei über in $\boldsymbol{r}'_\mathrm{i}$, wobei gilt:

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{i}' = \boldsymbol{r}_\mathrm{i} + \boldsymbol{s}.$$

Die Rotation um eine Gerade *g*

Dabei bewegen sich alle Massenpunkte, soweit sie nicht auf der Geraden g liegen, auf Kreisbögen, deren Mittelpunkte auf g liegen. Die Gerade g heißt Rotationsachse.

Die Rotation um einen Punkt *P*

Dabei bewegen sich alle (übrigen) Punkte des Körpers auf konzentrischen Kugelflächen um das Rotationszentrum P. Wie später gezeigt wird, kann eine Rotation um einen Punkt stets auf eine Rotation um eine durch diesen Punkt gehende Achse zurückgeführt werden.

1.3 Die Anzahl der Freiheitsgrade eines starren Körpers

Die Anzahl der Freiheitsgrade eines Körpers gibt an, wie viele voneinander unabhängige Bewegungen der Körper ausführen kann. Ein Eisenbahnzug hat – da er an seine Schienen gebunden ist - nur einen Freiheitsgrad (vorwärts und rückwärts zählen zusammen als eine Bewegungsmöglichkeit). Formal ist dies daran erkennbar, dass die Position des Zuges durch eine einzige Koordinate beschrieben werden kann, wie sie sich z. B. auf den Kilometertafeln findet. Ein Auto auf der Erdoberfläche hat drei Freiheitsgrade: Sein Ort kann durch seine geografische Länge und Breite beschrieben werden, die Richtung seiner Längsachse z. B. durch den Winkel zur Nordrichtung. Die beiden anderen Winkel – die Ausrichtung des Fahrzeugs um die Längsachse und um die horizontale Querachse – dienen der Anpassung an Abweichungen des Geländes von der horizontalen Ebene und sind durch den Ort und die Richtung der Längsachse bestimmt. Sie sind daher keine Freiheitsgrade.

Die Anschauung zeigt, dass ein freier Körper wie z. B. ein kunstflugtaugliches Flugzeug drei Freiheitsgrade der Translation besitzt: er kann sich nämlich frei in drei räumlichen Dimensionen

(Länge, Breite, Höhe) bewegen. Dazu kommen drei Freiheitsgrade der Rotation: er kann um drei räumliche Drehachsen rotieren. Folglich besitzt der freie Körper sechs Freiheitsgrade der Bewegung.

Die Zahl der Freiheitsgrade wird eingeschränkt, wenn der Körper nicht völlig frei beweglich ist. Ist z. B. einer seiner Punkte festgelegt, so fallen die drei Freiheitsgrade der Translation weg, und es bleiben nur noch die drei Freiheitsgrade der Rotation übrig. Wird ein weiterer Punkt festgehalten, so kann der Körper nur noch um die Verbindungsgerade der beiden Punkte rotieren, und seine Lage ist durch eine einzige Koordinate, nämlich den Drehwinkel, festgelegt. Er besitzt also nur noch einen Freiheitsgrad. Legt man nun noch einen dritten Punkt des Körpers fest, so verliert er auch den letzten Freiheitsgrad (sofern die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen).

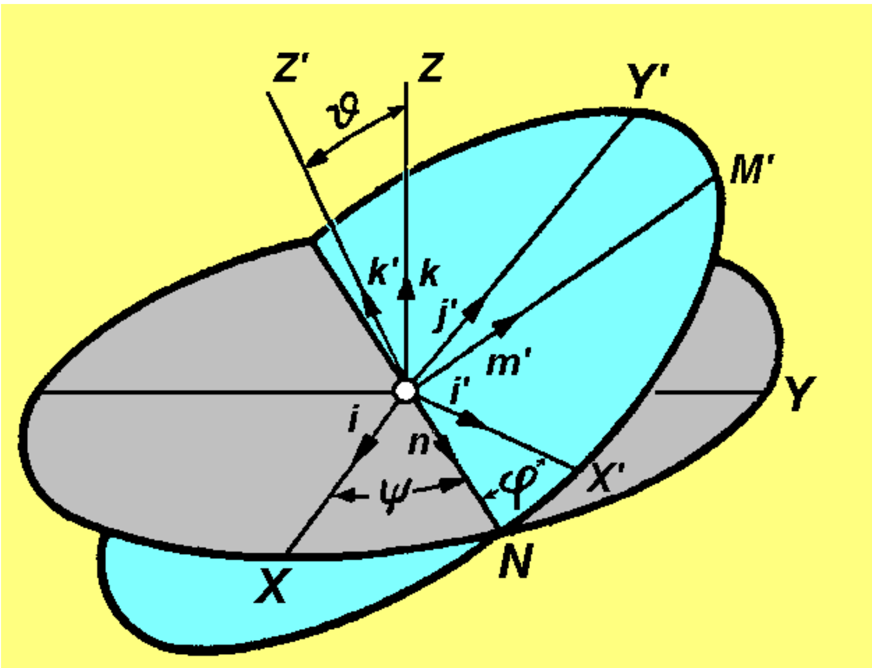
Nach dem folgenden Exkurs über die Eulerschen Winkel werden wir einige Bewegungen untersuchen, die bei verschiedenen Einschränkungen der Freiheit eines starren Körpers möglich sind.

1.4 Die Eulerschen Winkel

Gegeben sei ein relativ zum Beobachter festes kartesisches *XYZ*-Koordinatensystem sowie ein um den gemeinsamen Ursprung drehbares *X'Y'Z'*-Koordinatensystem. Die Lage der Einheitsvektoren der drei „drehbaren Achsen" relativ zu den festen Achsen kann durch die 3 x 3 = 9 Richtungskosinus der Einheitsvektoren beschrieben werden (siehe unten). Da zwischen den neun Richtungskosinus jedoch sechs Bedingungen bestehen, sind davon nur 3 frei wählbar. (Das entspricht den 3 Freiheitsgraden der Rotation.) Die sechs Bedingungen lauten:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}'^2 &= \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1,\\
\boldsymbol{j}'^2 &= \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1,\\
\boldsymbol{k}'^2 &= \cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1,\\
\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j}' &= \cos\alpha_1\ \cos\alpha_2 + \cos\beta_1\ \cos\beta_2 + \cos\gamma_1\ \cos\gamma_2 = 0,\\
\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{k}' &= \cos\alpha_2\ \cos\alpha_3 + \cos\beta_2\ \cos\beta_3 + \cos\gamma_2\ \cos\gamma_3 = 0,\\
\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i}' &= \cos\alpha_3\ \cos\alpha_1 + \cos\beta_3\ \cos\beta_1 + \cos\gamma_3\ \cos\gamma_1 = 0.
\end{aligned}$$

Daher ist es häufig vorteilhaft, von Anfang an nur drei unabhängige Winkel einzuführen. Dazu eignen sich die drei „Eulerschen Winkel" φ, ψ und ϑ (phi, psi und theta).



ϑ ist der Winkel zwischen der Z'-Achse und der Z-Achse. Die XY-Ebene (grau) schneidet die $X'Y'$-Ebene (grün) in einer Geraden, die Knotenlinie genannt wird und auf der der Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ liegt. Senkrecht zu n legen wir in der $X'Y'$-Ebene eine Gerade, auf welcher der Einheitsvektor $\boldsymbol{m'}$ liegt.

Der Winkel ψ ist der Winkel zwischen der Knotenlinie und der X-Achse und wird »Knotenlänge« genannt (analog zur geografischen Länge). Sein Gegenstück in der $X'Y'$-Ebene, nämlich der Winkel zwischen der Knotenlinie und der X'-Achse ist der Winkel φ.

Sind die Eulerschen Winkel gegeben, kann man das Koordinatensystem $\boldsymbol{i', j', k'}$ zeichnen: Zuerst wird mit dem Winkel ψ die Knotenlinien in die XY-Ebene gezeichnet. Durch diese Gerade wird dann eine Ebene gelegt, die mit der XY-Ebene den Winkel ϑ bildet; dies ist die **X'Y'**-Ebene. Das Lot auf dieser Ebene in O ist die Z'-Achse. Die X'-Achse ist in der $X'Y'$-Ebene dann durch den Winkel φ bestimmt.

Die Einheitsvektoren des beweglichen Systems seien

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}' &= \cos\alpha_1\,\boldsymbol{i} + \cos\beta_1\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma_1\,\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{j}' &= \cos\alpha_2\,\boldsymbol{i} + \cos\beta_2\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma_2\,\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{k}' &= \cos\alpha_3\,\boldsymbol{i} + \cos\beta_3\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma_3\,\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Dann gelten die folgenden Beziehungen:

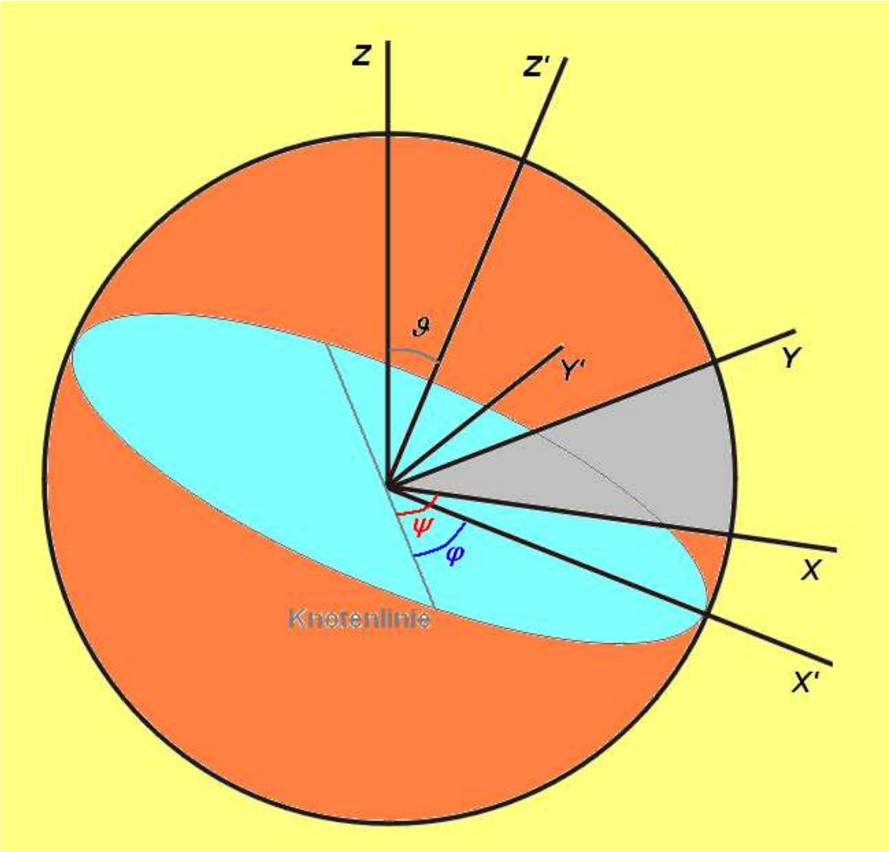
$$\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi\,\cos\vartheta,\\
\cos\beta_1 &= -\sin\varphi\,\cos\psi - \cos\varphi\,\sin\psi\,\cos\vartheta,\\
\cos\gamma_1 &= \sin\psi\,\sin\vartheta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_2 &= \cos\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi\,\cos\vartheta,\\
\cos\beta_2 &= -\sin\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi\,\cos\vartheta,\\
\cos\gamma_2 &= -\cos\psi\,\sin\vartheta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_3 &= \sin\varphi\,\sin\vartheta,\\
\cos\beta_3 &= \cos\varphi\,\sin\vartheta,\\
\cos\lambda &= \cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen lassen sich die Verschiebungskomponenten und die Geschwindigkeitskomponenten bezüglich der X-, Y- und Z-Achse sowie die Rotationsgeschwindigkeiten um diese Achsen aus den entsprechenden Größen des körperfesten Systems berechnen.

Zur Veranschaulichung eignen sich recht gut die Erde und ihre Bewegung im Sonnensystem. Als invariable XY-Ebene bietet sich die Ekliptik an, also die Ebene der Erdbahn, in der auch die Sonne liegt. Die Richtung der X-Achse kann z. B. durch irgendeinen in der Ekliptik gelegenen Fixstern vorgegeben werden. Die Y-Achse steht auf der X-Achse senkrecht, die Z-Achse auf der Ekliptik. Der Nullpunkt beider Koordinatensysteme sei der Erdmittelpunkt. Die $X'Y'$-Ebene ist die Äquatorialebene, wobei die X'-Achse z. B. durch den Nullmeridian (den Meridian von Greenwich) gehen soll. Die Z'-Achse ist die Rotationsachse der Erde.



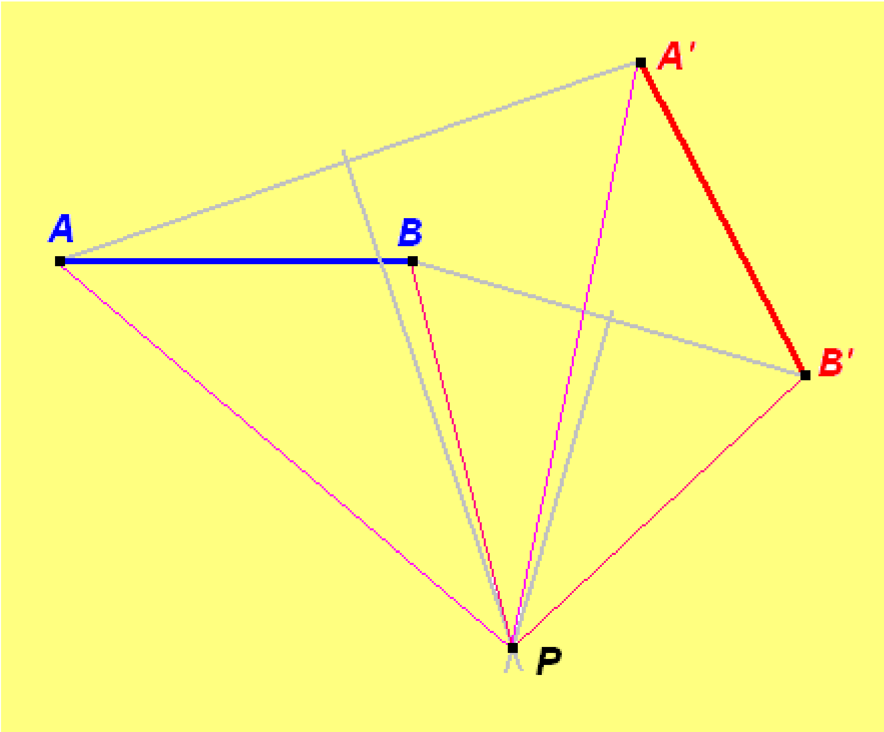
Bliebe die Richtung der Erdachse unverändert und rotierte die Erde lediglich um die *Z'*-Achse, dann änderte sich nur der Winkel φ zwischen Knotenlinie und *X'*-Achse. Tatsächlich aber rotiert die Erdachse in etwa 26 000 Jahren einmal um die *Z*-Achse. Die Erdachse führt also eine so genannte Präzessionsbewegung aus und somit ändert sich auch der Winkel ψ. Schließlich schwankt aber auch der Winkel zwischen *Z'*- und *Z*-Achse ein wenig: die Erdachse führt eine Nutationsbewegung (Nickbewegung) aus.

1.5 Ebene Bewegung eines starren Körpers

Ein Beispiel für die ebene Bewegung eines starren Körpers ist ein Buch, das auf einer Tischplatte bewegt wird. Dabei bewegen sich alle Punkte des Körpers (des Buches) parallel zu einer Ebene (zur Tischplatte). Alle Punkte des Körpers, die auf demselben Lot zur Ebene liegen, bewegen sich dabei auf kongruenten Bahnen. Daher genügt es, den Körper auf eine einzige Ebene – hier eine Seite des Buches – zu reduzieren und lediglich die Bewegung einer Ebene auf einer anderen, festen Ebene zu betrachten.

Diese Bewegung hat drei Freiheitsgrade: Wir können die beiden Koordinaten irgendeines Punktes der beweglichen Ebene beliebig wählen und dann die Ebene noch um diesen Punkt drehen.

Zunächst will ich zeigen, dass man jede beliebige ebene Verschiebung eines Körpers aus einer Position (1) in eine Position (2) als das Ergebnis einer Drehung um einen Punkt auffassen kann. Dabei wird von den Zwischenstadien der Verschiebung völlig abgesehen und es werden nur die Anfangs- und die Endposition betrachtet. Dabei genügt es, zwei in der Bewegungsebene gelegene Punkte *A* und *B* des Körpers herauszugreifen, denn durch die Lage dieser beiden Punkte ist auch die Position aller übrigen Punkte des Körpers festgelegt. Durch die betrachtete Verschiebung seien die beiden Punkte *A* und *B* auf einem beliebigen Weg in die Position *A'* bzw. *B'* bewegt worden. Konstruiert man die Mittelsenkrechten der Strecken *AA'* und *BB'* und schneidet sie miteinander, so erhält man das gesuchte Rotationszentrum *P*. Während der Drehung wird das Dreiecks *PAB* in das kongruente Dreieck *PA'B'* übergeführt und gleichzeitig alle anderen Punkte des Körpers aus ihrer ursprünglichen Lage in eine neue Position gebracht. Da das Drehzentrum für alle Punkte dasselbe ist, würde man denselben Punkt *P* auch mit zwei beliebigen anderen Punkten (statt *A* und *B*) finden.

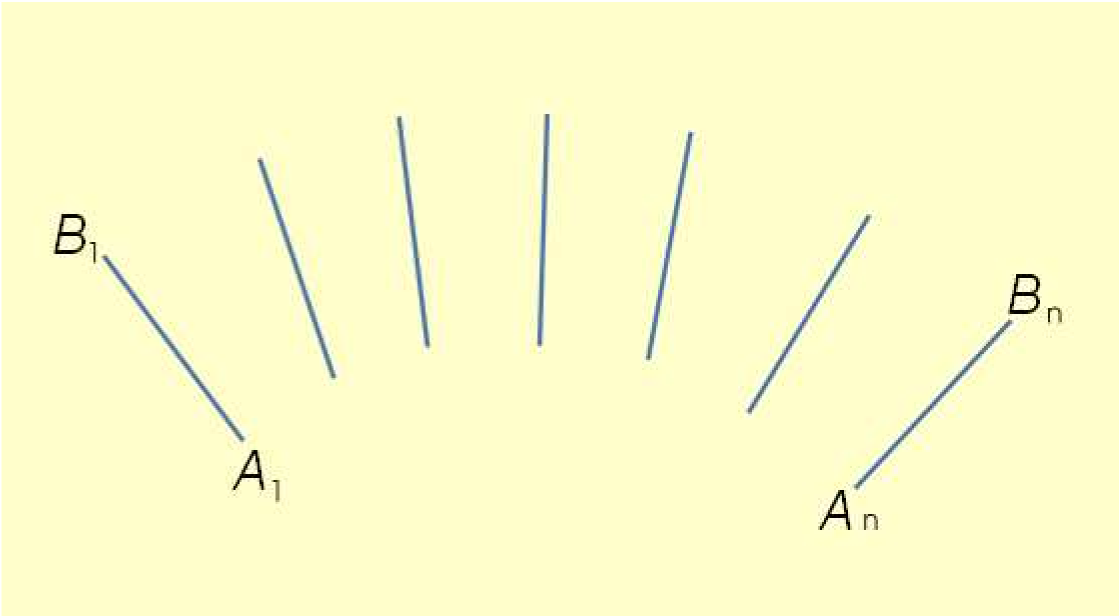


(Zum vollständigen Beweis muss gezeigt werden, dass dieselbe Drehung, welche die Strecke *PA* in die Strecke *PA'* überführt, auch die Strecke *PB* in die Strecke *PB'* überführt. Dazu muss bewiesen werden, dass der Winkel *APA'* gleich dem Winkel *BPB'* ist. Wegen der Kongruenz der Dreiecke *APB* und *A'PB'* sind die Winkel *APB* und *A'PB'* gleich. Ich nenne sie α. Nun ist aber

$$\sphericalangle APA' = \alpha + \sphericalangle BPA' \quad \text{und}$$
$$\sphericalangle BPB' = \alpha + \sphericalangle BPA'.$$

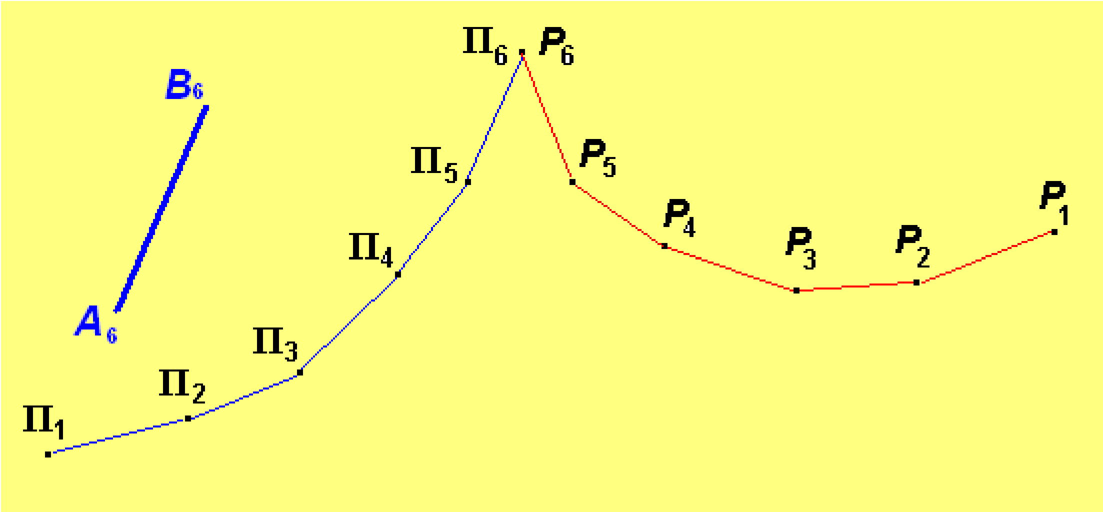
Also sind die beiden fraglichen Winkel gleich. – Einfacher ist folgende Argumentation, die später auch noch in einem anderen Zusammenhang benutzt werden kann: Da wir es hier mit einem starren Körper zu tun haben, ist auch das Dreieck *ABP* ein starres Gebilde. Daher können sich bei einer Rotation um *P* die beiden Radien *PA* und *PB* immer nur um gleiche Winkel drehen.)

Wenn wir nun die Zwischenstadien der Bewegung nicht ignorieren, sondern die Bahnkurven der Punkte *A* und *B* genau verfolgen wollen, so können wir zunächst einige Zwischenstadien der Bewegung betrachten:



Für je zwei benachbarte Lagen der Strecke *AB* können wir - wie oben - ein temporäres Drehzentrum konstruieren und so die gesamte Ortsveränderung durch eine Anzahl von Drehungen um ein jeweils anderes temporäres Drehzentrum („temporärer Pol“) annähern.

Verbindet man die benachbarten temporären Drehzentren miteinander, entsteht ein Polygonzug. Es lohnt sich, diesen Vorgang in seinen Phasen in einem Modell zu realisieren. Dazu befestigt man ein Blatt Papier (die feste Ebene) auf einer geeigneten Unterlage (Korkbrett, Weichfaserplatte, Styroportafel ...). Ein zweites Blatt Papier (das transparent sein sollte) stellt die bewegte Ebene (den bewegten Körper) dar, auf der zwei Punkte *A* und *B* und ihre Verbindungsgerade markiert werden. Anstatt nun aber die einzelnen Phasen der Verschiebung dieser Ebene vorzugeben und dann Mittelsenkrechten über mehreren kleinen Teilstrecken zu errichten und diese paarweise miteinander zu schneiden (was mühsam und ungenau wäre), ist es weitaus bequemer, das Pferd von hinten aufzuzäumen und sich den Polygonzug von temporären Zentren beliebig vorzugeben. Dann wird das transparente Papier auf die feste Ebene gelegt. Mit einer Stecknadel sticht man zunächst in den Punkten *A* und *B* durch die beiden Papiere hindurch und markiert so deren Ausgangslage auf der festen Ebene. Dann sticht man im ersten Drehzentrum P_1 durch beide Ebenen und dreht die das obere Papier um einen beliebigen Winkel (etwa 20° bis 30°), wobei die Stecknadel die Drehachse bildet. Dann sticht man die Nadel durch das zweite Drehzentrum und dreht wiederum die obere Ebene um einen beliebigen Winkel usw. Nach der letzten Drehung markiert man durch Durchstechen die Lage der Punkte Π_i auf der festen Ebene und ebenso die Endlage der Punkte *A* und *B*, die mit *A'* und *B'* bezeichnet sind. Dadurch erhält man auf der festen Ebene eine Figur, die etwa so aussieht:

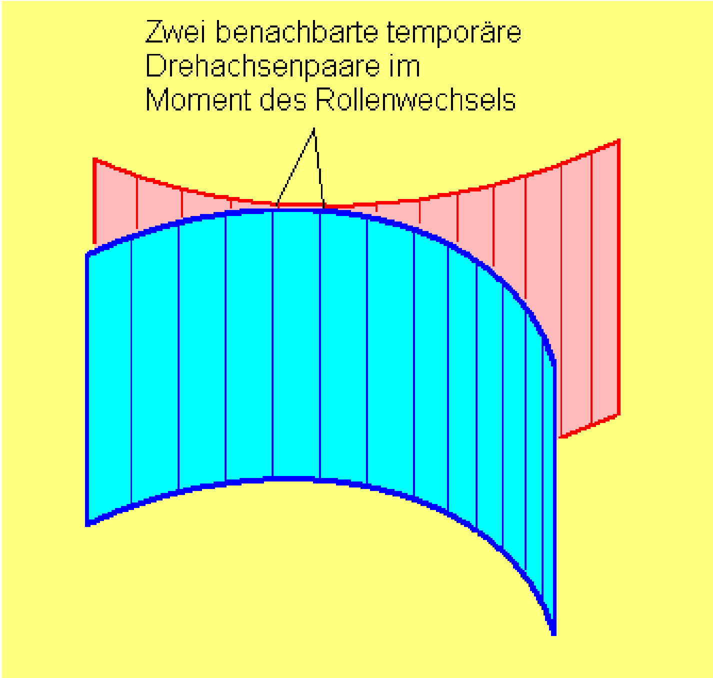


Diese Abbildung lässt sich auch als „Ausschneidebogen“ zur Demonstration verwenden. Dazu schneidet man den linken Teil am blauen Polygonzug entlang aus. Dann legt man die Punkte Π_6 und P_6 wieder aufeinander und dreht den ausgeschnittenen linken Teil um Π_6, bis Π_5 auf P_5 zu liegen kommt usw. So kann man den ganzen Vorgang rückwärts verfolgen, bis man am Anfang angekommen ist. Von dort kann man den ursprünglichen Ablauf nachvollziehen. Man kann also die wirkliche Bewegung der Ebene (oder des Körpers) annähern, indem man das körperfeste (blaue) Polygon um das raumfeste (rote) Polygon „kantet“.

Wenn wir nun die Anzahl der betrachteten Bewegungsphasen unbegrenzt wachsen lassen, so nähert sich der Bewegungsablauf unbeschränkt dem tatsächlichen Vorgang und die beiden Polygone werden zu glatten Kurven, von denen die blaue auf der roten abrollt. So ergibt sich folgender Satz:

Jede beliebige Bewegung eines starren Körpers in einer Ebene kann dadurch erzeugt werden, dass eine bestimmte, im Körper feste Kurve auf einer bestimmten, im Raume festen Kurve abrollt. Die erste Kurve heißt Gangpolkurve oder Körperzentrode, die zweite Rastpolkurve oder Raumzentrode.

Handelt es sich um die ebene Bewegung eines Körpers, so können wir in den Punkten der Rast– und Gangpolkurve Lote auf der festen Ebene errichten. Diese bilden je eine gerade Zylinderfläche, die Gangpolfläche (blau) und die Rastpolfläche (rot), die aufeinander abrollen.

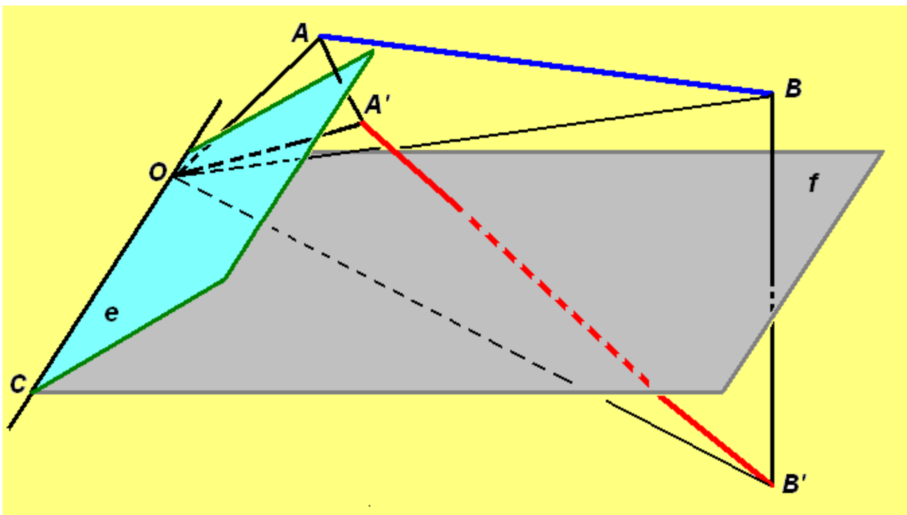


1.6 Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt

Eine solche Bewegung heißt auch sphärische Bewegung, weil sich dabei alle Punkte des Körpers auf Kugelschalen („Sphären") bewegen, deren Mittelpunkt der feste Punkt *O* ist.

Wir betrachten wieder zwei Punkte *A* und *B* des starren Körpers. Durch eine beliebige Bewegung um den festen Punkt *O* mögen die beiden Punkte in die Endlage *A′* und *B′* überführt werden. Wenn wir wieder von dem tatsächlichen Verlauf der Bewegung absehen und nur die Ausgangs- und die Endlage betrachten, so kann der gleiche Effekt stets durch eine Rotation um eine durch den festen Punkt gehende Achse erzielt werden. Es gilt also der Satz: Eine beliebige Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ist äquivalent (d. h. hinsichtlich des Ergebnisses gleichwertig) einer Rotation um eine bestimmte, durch diesen Punkt gehende Achse (Eulersches Theorem).

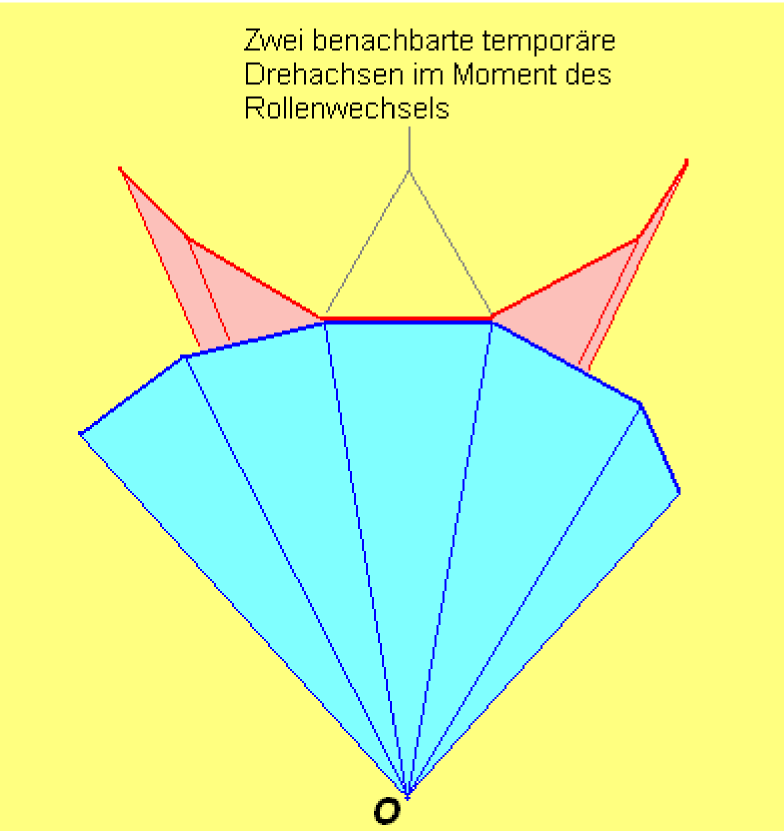
Der Beweis verläuft analog zu dem für die ebene Bewegung.



Die beiden Dreiecke *OAA′* und *OBB′* sind gleichschenklig. Wir errichten die mittelsenkrechte Ebene *e* auf *AA′* und *f* auf *BB′*. Jeder Punkt der Ebene *e* ist von *A* und *A′* gleich weit entfernt, und jeder Punkt der Ebene *f* ist von *B* und *A′B′* gleich weit entfernt. Beide Ebenen gehen durch *O* und schneiden einander in einer Geraden *OC*. Alle Punkte dieser Geraden haben die Eigenschaften der Punkte beider Ebenen gemeinsam: sie sind sowohl von *A* und *A′* als auch von *B* und *B′* gleich weit entfernt. Außerdem ist der Winkel *AOC* gleich dem Winkel *A'OC* und der Winkel *BOC* gleich dem Winkel B*′OC*.

Jede durch *O* gehende und in der Ebene *e* liegende Gerade kann als Drehachse dienen, um *A* in *A′* überzuführen. Dasselbe gilt für jede in der Ebene *f* liegende und durch *O* gehende Gerade bezüglich der Punkte *B* und *B′*. Da die Gerade *OC* zusammen mit der Strecke *AB* als starrer Körper aufgefasst werden kann, führt eine Drehung um *OC*, welche *A* in *A′* überführt, auch *B* in *B′* über.

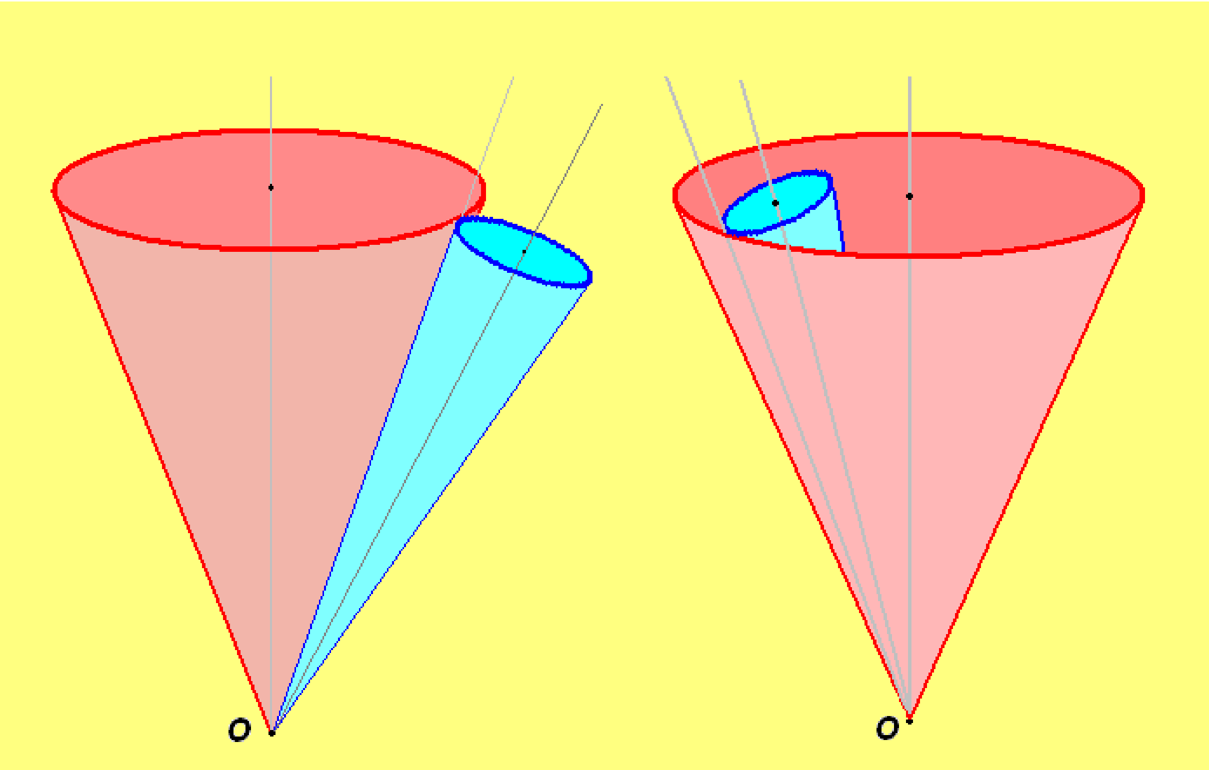
Analog zu unserem Vorgehen bei der ebenen Bewegung betrachten wir nun mehrere Zwischenstadien der tatsächlichen Bewegung und nähern jede der Bewegungsphasen durch eine Rotation um einen bestimmte Achse an, die wie oben gefunden werden kann. Die verschiedenen Achsen und die von ihnen bestimmten Ebenen bilden dann einerseits eine im Raum feste Pyramidenfläche (Rastpolpyramide) mit der Spitze in *O* und andererseits eine im Körper feste (und somit im Raum bewegliche) Pyramidenfläche, die Gangpolpyramide. Beide Pyramiden rollen über die Kanten aneinander ab.



Wenn die Anzahl der betrachteten Bewegungsphasen unbeschränkt zunimmt, gehen die beiden Pyramidenflächen in Kegelflächen über, die aufeinander abrollen und deren Mantellinien die (raumfesten und körperfesten) momentanen Drehachsen sind.

Im Hinblick auf die später zu behandelnde Kreiselbewegung ist insbesondere der Fall interessant, in dem die beiden Kegelflächen kreisförmig sind. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: Der

Gangpolkegel (blau) kann auf dem Rastpolkegel (rot) außen oder innen abrollen. Dies zeigt die folgende Abbildung.



1.7 Die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers

Die allgemeinste Bewegung eines Körpers ist eine Bewegung, die keinen Einschränkungen unterliegt. Ein solcher frei beweglicher Körper hat sechs Freiheitsgrade, nämlich drei Freiheitsgrade der Translation und drei der Rotation. Seine Lage ist festgelegt durch Angabe von drei seiner Punkte. Die Anfangslage dieser Punkte sei A, B, C, ihre Endlage sei A', B', C'.

Es kann gezeigt werden, dass jede solche Bewegung äquivalent einer Schraubenbewegung ist. Das heißt: Zu jeder Bewegung eines starren Körpers lässt sich eine Schraubenlinie angeben, welche (ohne Berücksichtigung der Zwischenpositionen) die Punkte A, B, C in die Punkte A', B', C' überführt (Theorem von CHASLES).

Auch hier kann der tatsächliche Bewegungsablauf durch eine Anzahl n von einzelnen Schraubenbewegungen angenähert werden. Für n gegen unendlich ergibt sich eine kontinuierliche Folge von unendlich vielen, verschwindend kleinen Schraubenbewegungen, welche den tatsächlichen Bewegungsablauf exakt wiedergibt. Eine solche Bewegungsfolge heißt Schrotung.

2 Kräftesysteme, die an einem starren Körper angreifen

Ein einzelner Massenpunkt erfährt keine Beschleunigung, wenn die Resultierende aller an ihm angreifenden Kräfte null ist. Man sagt dann, die angreifenden Kräfte seien im Gleichgewicht (oder auch – weniger präzise – der Massenpunkt sei im Gleichgewicht).Analog gilt für ein System von Massenpunkten, dass sein Schwerpunkt keine Beschleunigung erfährt, wenn die Resultierende aller Kräfte, die an dem Punktsystem angreifen, null ist.

Es sei $\boldsymbol{F}$i die Resultierende aller Kräfte, die am i-ten Massenpunkten angreifen. Dann lautet die Bedingung für die Kräftefreiheit seines Schwerpunkts also:

$$\sum_{\mathrm{i}} \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}} = 0.$$

Das bedeutet jedoch nicht unbedingt, dass dann auch alle Massenpunkte des Systems unbeschleunigt sind, denn es könnte ja noch Rotationsbeschleunigungen um den (unbeschleunigten) Schwerpunkt geben. Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Fehlen von Rotationsbeschleunigungen ist, dass die Summe aller an dem System angreifenden Drehmomente null ist:

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\mathrm{i}} \boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}} = 0.$$

Beweis: Wie ich in „Mechanik realer Körper" im Kapitel „Drehimpuls und Drehmoment" gezeigt habe, ist ganz allgemein bei einem System von Massenpunkten

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_0}{\mathrm{d}t} = \sum_{\mathrm{i}} \boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{M}_0.$$

Das bedeutet: Die Änderungsgeschwindigkeit $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}}/\mathrm{d}t$ des Drehimpulses $\boldsymbol{L}_{\mathrm{O}}$ des Systems ist gleich der Summe der auf das System einwirkenden Drehmomente. Wenn das Drehmoment $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}}$ null ist, ist auch die Summe der Änderungen der Drehimpulse im Zeitelement dt gleich null. Das damals betrachtete System bestand allerdings aus unabhängigen Massenpunkten. In einem solchen System ist es denkbar, dass verschiedene Massenpunkte positive bzw. negative Drehimpulsänderungen erfahren, die einander kompensieren können. Da wir aber nun ein starres System von Massenpunkten betrachten, müssen eventuelle Änderungen des Drehimpulses der einzelnen Massenpunkte stets dasselbe Vorzeichen haben. Ihre Summe kann daher nur dann null sein, wenn sie alle einzeln null sind. Also finden für $\boldsymbol{M}_{\mathrm{O}} = 0$ im System keine Rotationsbeschleunigungen statt.

Folglich gilt: Notwendige und hinreichende Bedingung für das Fehlen von Translations- und Rotationsbeschleunigung bei einem starren Körpers ist, dass sowohl die Resultiere $\boldsymbol{F}$ der Kräfte als auch die Resultierende $\boldsymbol{M}$ der Drehmomente, die an dem Körper angreifen, null ist:

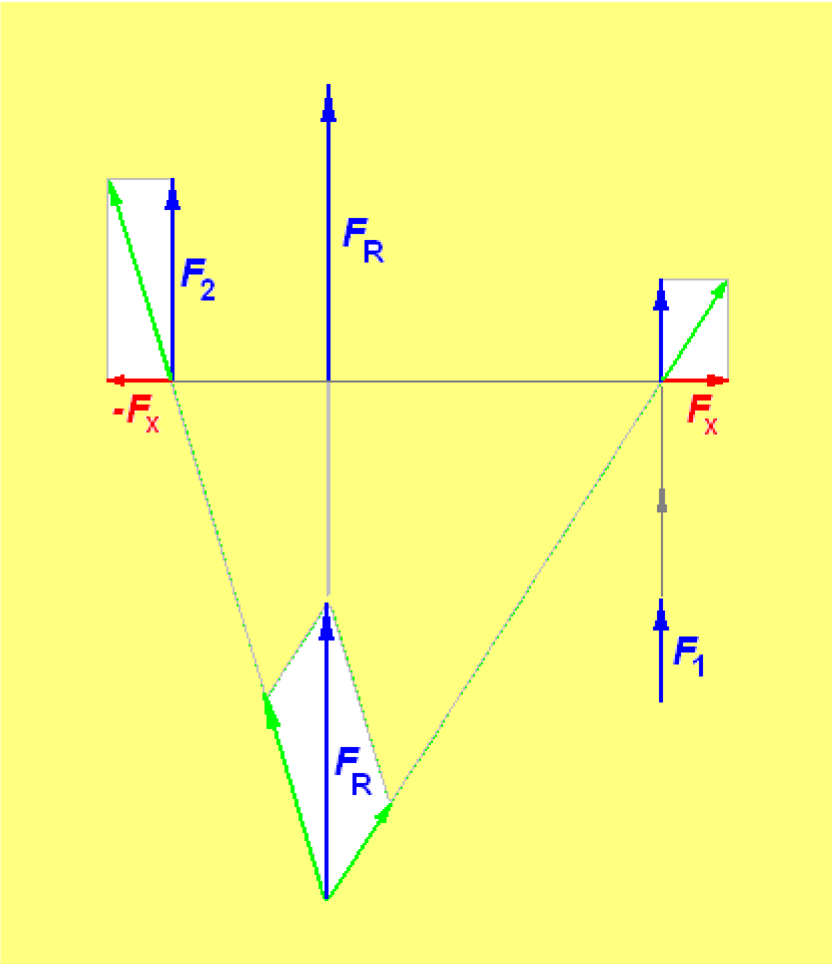
$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}} = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{i}} = 0.$$

Für die Wirkung des an einem starren Körper angreifenden Kräftesystems kommt es also nur auf die beiden Resultierenden $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{M}$ an. Dies gilt – wie später gezeigt werden wird – nicht nur für den (statischen) Fall, dass keine Beschleunigungen stattfinden. Auch in den Gleichungen der Dynamik treten nur diese beiden Summenvektoren auf, sodass man sagen kann: Alle Systeme von Kräften, die in den Resultierenden $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{M}$ übereinstimmen, sind in ihrer Wirkung gleichwertig (äquivalent).

In diesem Zusammenhang begegnet uns ein weiterer Typ von Vektoren: Im Gegensatz zu den freien Vektoren (sie sind beliebig verschiebbar) und den gebundenen Vektoren (sie sind an einen Punkt gebunden; z. B. Feldvektoren und Ortsvektoren), dürfen Kraftvektoren nur in ihrer Wirkungslinie verschoben werden, da sich bei einer Parallelverschiebung außerhalb ihrer Wirkungslinie das von ihnen ausgeübte Drehmoment ändert. Solche Vektoren heißen linienflüchtig.

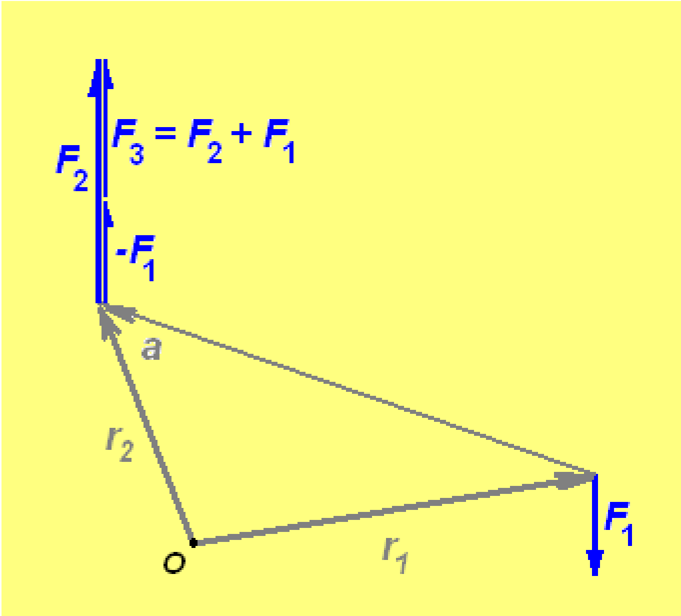
Dass Kraftvektoren nur in ihrer Wirkungslinie verschoben werden dürfen, hat Konsequenzen für die graphische Addition paralleler und antiparalleler Kräfte.

1. Fall: Parallele Kräfte: Um die Resultierende zweier paralleler Kräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ zu finden, verschieben wir zunächst eine der beiden Kräfte (hier $\boldsymbol{F}_1$) in ihrer Wirkungslinie, sodass die Verbindungslinie der Angriffspunkte der beiden Kräfte auf ihren Wirkungslinien senkrecht steht. Dann addieren wir zu beiden Kräften eine Hilfskraft $\boldsymbol{F}_x$ bzw. $-\boldsymbol{F}_x$. Da sowohl die Summe wie das Drehmoment der beiden Kräfte null ist, ändert ihr Hinzufügen nichts an dem gegebenen Kräftesystem. Nun werden die beiden resultierenden Kräfte (grün) ermittelt und beide in ihren Wirkungslinien bis zum Schnitt verschoben. Durch Addition ergibt sich die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}_R$. Sie ist parallel zu $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$. Ihr Betrag ist gleich der Summe $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$. Die Resultierende kann nach Belieben in ihrer Wirkungslinie verschoben werden. Geschieht das so, wie in der Abbildung gezeigt, erkennt man, dass ihre Abstände von den beiden Teilkräften nach dem Hebelgesetz berechnet werden können.



2. Fall: Antiparallele Kräfte: Die größere der beiden Kräfte (hier $\boldsymbol{F}_2$) wird in zwei Teilkräfte $-\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_3$ zerlegt. $\boldsymbol{F}_1$ und $-\boldsymbol{F}_1$ bilden zusammen ein **Kräftepaar** (das sind zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die nicht am selben Punkt angreifen). Also gilt:

Antiparallele Kräfte sind äquivalent einer Einzelkraft und einem Kräftepaar.



Ist $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$, so ist die Einzelkraft null. Dies ist ein einfaches Beispiel dafür, dass zwar $\boldsymbol{F} = 0$, aber $\boldsymbol{M}'$ ungleich null sein kann.

Das Drehmoment des Kräftepaares ist

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times (-\boldsymbol{F}_1) = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}_1.$$

Das Drehmoment eines Kräftepaares ist also von der Lage des Bezugspunktes O unabhängig.

Im Allgemeinen jedoch hängt der Betrag eines Drehmoments vom Bezugspunkt O ab, da sich bei einer Verlagerung des Bezugspunktes die "Kraftarme" ändern und sogar beliebig groß werden können. Das Drehmoment ist jedoch immer dann vom Bezugspunkt unabhängig, wenn die Resultierende $\boldsymbol{F}$ der Kräfte null ist.

Beweis: Verschiebt man den Bezugspunkt O um den Vektor $\boldsymbol{s}$ nach O' und bezeichnet die neuen Ortsvektoren mit $\boldsymbol{r}'$, so ist

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{s} \quad \text{und} \quad \sum \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i - \sum \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i - \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{F}.$$

Für $\boldsymbol{F} = 0$ verschwindet der letzte Term und es bleibt übrig

$$\sum \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i.$$

Wie oben gesagt wurde, kommt es bei einem Kräftesystem, das an einem starren Körper angreift, nur auf die Resultierenden $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{M}$ an. Die Resultierende $\boldsymbol{F}$ ist eine einzelne Kraft, und das resultierende Moment $\boldsymbol{M}$ kann durch ein geeignetes Kräftepaar aufgebracht werden. Also gilt:

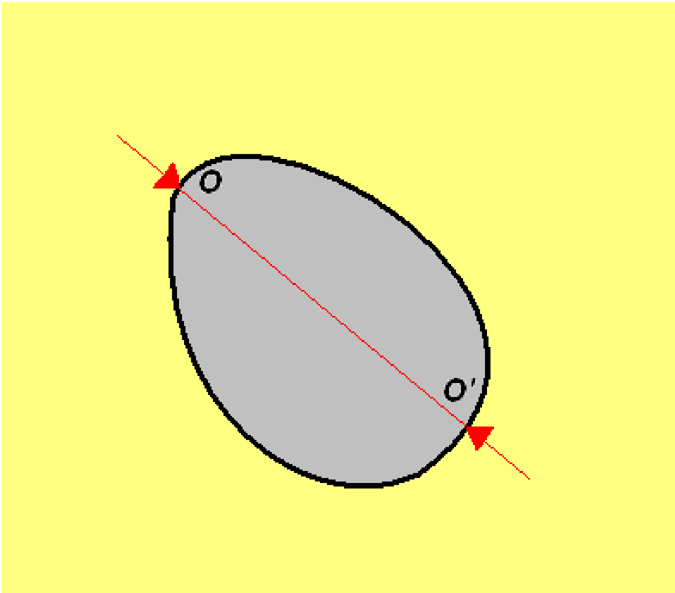
Jedes an einem starren Körper angreifende Kräftesystem kann ersetzt werden durch eine Einzelkraft und ein Kräftepaar.

3 Rotation eines starren Körpers um eine feste Achse

Wenn ein starrer Körper in zwei Punkten O und O' fixiert wird, ist seine Freiheit auf die Rotation um die Achse OO' eingeschränkt. Er hat nur noch einen Freiheitsgrad, und seine Lage ist durch den Drehwinkel φ eindeutig beschrieben.

Von den an ihm angreifenden Drehmomenten wirken lediglich ihre in der Drehachse liegenden Komponenten; die übrigen Komponenten werden durch Zwangskräfte in den Lagern kompensiert.

Wir legen nun den Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt O und die Z-Achse in die Drehachse.



Die Gleichung für die Änderung des Gesamt-Drehimpulses des Körpers vereinfacht sich daher auf die Berücksichtigung der Z-Komponenten des Drehimpulses und der Resultierenden der (auf den Punkt O bezogenen) Drehmomente:

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z.$$

Für den Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ gilt:

$$\boldsymbol{L} = \sum m_\mathrm{i}\left(\boldsymbol{r}_\mathrm{i} \times \boldsymbol{v}_\mathrm{i}\right),$$

und mit

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{i} = \omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}_\mathrm{i}$$

$$\boldsymbol{L} = \sum m_\mathrm{i}\left[\boldsymbol{r}_\mathrm{i} \times \left(\omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}_\mathrm{i}\right)\right],$$

wobei $\omega\boldsymbol{k}$ der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist.

Für ein zweifaches Vektorprodukt gilt:

$$\boldsymbol{u} \times \left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}\right) = \boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}\right) - \boldsymbol{w} \cdot \left(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}\right).$$

Also ist

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{i} \times \left(\omega\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}_\mathrm{i}\right) = \omega\boldsymbol{k} \cdot \left(\boldsymbol{r}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{r}_\mathrm{i}\right) - \boldsymbol{r}_\mathrm{i}\left(\omega\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}_\mathrm{i}\right)$$

und

$$\boldsymbol{L} = \omega \boldsymbol{k} \sum m_i \boldsymbol{r}_i^2 - \omega \sum m_i \boldsymbol{r}_i \left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}_i \right) = \omega \boldsymbol{k} \sum m_i \boldsymbol{r}_i^2 - \omega \sum m_i \boldsymbol{r}_i z_i .$$

Die Z-Komponente von $\boldsymbol{L}$ ist gleich der Z-Komponente der rechten Seite der Gleichung:

$$L_z = \omega \sum m_i \boldsymbol{r}_i^2 - \omega \sum m_i z_i z_i = \omega \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \right) - \omega \sum m_i z_i^2$$

und schließlich

$$L_z = \omega \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right).$$

Die Größe

$$\sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right) = \sum m_i \rho_i^2 =: J_{zz}$$

heißt Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Z-Achse und wird aus einem erst später erkennbaren Grund J_{zz} genannt.

Damit ergibt sich die (einzige) Bewegungsgleichung des Körpers:

$$J_{zz} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_{zz} \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M_z .$$

Ein Vergleich mit der Bewegungsgleichung der eindimensionalen Translationsbewegung

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F_x$$

zeigt die formale Identität der beiden Gleichungen, wobei

- das Trägheitsmoment J_{zz} entspricht der Masse m,
- die Winkelbeschleunigung $\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2$ entspricht der Bahnbeschleunigung $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$,
- die axiale Komponente des Drehmoments entspricht der Bahnkomponente der Kraft.

Die kinetische Energie des rotierenden Körpers ist

$$E_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2} \sum m_i \left(\omega \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{r}_i \right)^2 = \tfrac{1}{2} \sum m_i \rho_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2} J_{zz} \omega^2 = \tfrac{1}{2} J_{zz} \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right)^2 ,$$

in völliger Analogie zur kinetischen Energie der Translationsbewegung

$$E_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)^2 .$$

3.1 Das Trägheitsmoment eines starren Körper

3.1.1 Das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers

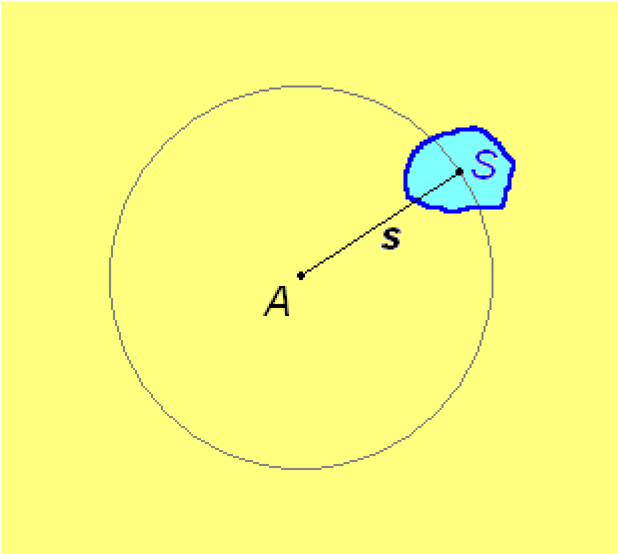
Aus der Definition des Trägheitsmoments folgt für einen homogenen Körper (das ist ein Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung und konstanter Dichte ρ)

$$J = \int_M r^2 \,\mathrm{d}m = \rho \int_V r^2 \,\mathrm{d}V = \rho \iiint_V r^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z ,$$

wobei r den Abstand des Massen- bzw. Volumenelements von der Drehachse bedeutet, M die Masse des Körpers und V sein Volumen ist.

3.1.2 Der Satz von Steiner

Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer durch den Schwerpunkt gehenden Achse, so lässt sich ohne neuerliche Integration sein Trägheitsmoment bezüglich jeder dazu parallelen Achse berechnen (und umgekehrt).



Ein Körper rotiere um eine durch A gehende, auf der Zeichenebene senkrecht stehende Achse. Durch seinen im Abstand s liegenden Schwerpunkt S legen wir eine dazu parallele Achse. Der Körper sei mit der Drehachse durch A starr verbunden. Dann dreht er sich, während er einmal um A rotiert, gleichzeitig genau einmal um seine Schwerpunktachse. Sein Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktachse sei J_S, sein Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch A sei J_A. Die Winkelgeschwindigkeit der beiden Rotationen sei ω.

Wir betrachten nun die kinetische Energie des rotierenden Körpers. Sie setzt sich zusammen aus der Rotationsenergie bezüglich der Schwerpunktachse und der kinetischen Energie der Kreisbewegung um A:

$$E = \tfrac{1}{2} J_S\, \omega^2 + \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} J_S\, \omega^2 + \tfrac{1}{2} m s^2\, \omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(J_S + m s^2\right)\omega^2 .$$

Andererseits ist die kinetische Energie aus dem Trägheitsmoment bezüglich der Achse durch A

$$E = \tfrac{1}{2} J_A\, \omega^2 .$$

Durch Vergleich erhält man

$$J_A = J_S + m s^2 \qquad \text{Satz von Steiner}$$

3.1.3 Das Trägheitsellipsoid

Durch einen Punkt O eines Körpers gehe eine Drehachse A, deren (beliebige) Richtung durch einen Einheitsvektor $\boldsymbol{a}$ beschrieben werde. Den Punkt O machen wir zum Ursprung der Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$. Die Richtungskosinus des Vektors $\boldsymbol{a}$ seien cos α, cos β, cos γ. Das Trägheitsmoment des betrachteten Körpers bezüglich der Achse ist dann

$$
\begin{aligned}
J &= \sum m_{\mathrm{i}} \left(\boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{a}\right)^2 \\
&= \sum m_{\mathrm{i}} \left[\left(y_{\mathrm{i}} \cos\gamma - z_{\mathrm{i}} \cos\beta\right)^2 + \left(z_{\mathrm{i}} \cos\alpha - x_{\mathrm{i}} \cos\gamma\right)^2 + \left(x_{\mathrm{i}} \cos\beta - y_{\mathrm{i}} \cos\alpha\right)^2 \right] \\
&= \sum m_{\mathrm{i}} \left(y_{\mathrm{i}}^2 + z_{\mathrm{i}}^2\right)\cos^2\alpha + \sum m_{\mathrm{i}} \left(z_{\mathrm{i}}^2 + x_{\mathrm{i}}^2\right)\cos^2\beta + \sum m_{\mathrm{i}} \left(x_{\mathrm{i}}^2 + y_{\mathrm{i}}^2\right)\cos^2\lambda \\
&\quad - 2\sum m_{\mathrm{i}}\, y_{\mathrm{i}}\, z_{\mathrm{i}} \cos\beta\cos\gamma - 2\sum m_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{i}}\, z_{\mathrm{i}} \cos\alpha\cos\gamma - 2\sum m_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{i}}\, y_{\mathrm{i}} \cos\alpha\cos\beta.
\end{aligned}
$$

Das Trägheitsmoment ist demnach eine quadratische Funktion der Richtungskosinus der Achse. Die Koeffizienten dieser Funktion sind zum einen die Trägheitsmomente des Körpers bezüglich der Koordinatenachsen, nämlich

$$
\begin{aligned}
\sum m_{\mathrm{i}} \left(y_{\mathrm{i}}^2 + z_{\mathrm{i}}^2\right) &:= J_{xx}, \\
\sum m_{\mathrm{i}} \left(x_{\mathrm{i}}^2 + z_{\mathrm{i}}^2\right) &:= J_{yy}, \\
\sum m_{\mathrm{i}} \left(x_{\mathrm{i}}^2 + y_{\mathrm{i}}^2\right) &:= J_{zz},
\end{aligned}
$$

zum anderen die folgenden Größen, welche Deviationsmomente genannt werden:

$$
\begin{aligned}
\sum m_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{i}}\, y_{\mathrm{i}} &:= J_{xy}, \\
\sum m_{\mathrm{i}}\, y_{\mathrm{i}}\, z_{\mathrm{i}} &:= J_{yz}, \\
\sum m_{\mathrm{i}}\, x_{\mathrm{i}}\, z_{\mathrm{i}} &:= J_{xz}.
\end{aligned}
$$

Damit lautet die obige Gleichung

$$
J = J_{xx}\cos^2\alpha + J_{y}\cos^2\beta + J_{zz}\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma.
$$

Führt man nun statt der Richtungskosinus der Drehachse die Koordinaten eines auf der Achse gelegenen Punktes $P(x, y, z)$ und den Betrag r seines Ortsvektors ein, setzt also

$$
\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r},
$$

so wird

$$
J = J_{xx}\frac{x^2}{r^2} + J_{yy}\frac{y^2}{r^2} + J_{zz}\frac{z^2}{r^2} - 2J_{xy}\frac{xy}{r^2} - 2J_{yz}\frac{yz}{r^2} - 2J_{xz}\frac{xz}{r^2},
$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist.

Die Gleichung vereinfacht sich erheblich, wenn man P so wählt, dass $r^2 = 1/J$ ist. Sie lautet dann:

$$
J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{xz}xz = 1.
$$

Dies ist die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, also eines Ellipsoids, eines Paraboloids oder eines Hyperboloids, das wegen der oben getroffenen Verabredung folgende Eigenschaft hat: Der Abstand r eines jeden Punktes P der Fläche vom Punkt O ist gleich dem Kehrwert aus der Wurzel des Trägheitsmoments J, das der betrachtete Körper bezüglich der Achse OP hat. Da das Trägheitsmoment eines realen Körpers niemals null sein kann, wird r niemals unendlich. Folglich muss die Fläche ein Ellipsoid sein (in Spezialfällen ein Rotationsellipsoid oder eine Kugel).

Das Ellipsoid ist durch die sechs Koeffizienten seiner Gleichung eindeutig bestimmt. Bei Kenntnis dieser Größen kann man den Abstand r eines jeden Punktes P der Fläche von O berechnen, woraus sich dann das Trägheitsmoment des betrachteten Körpers bezüglich der Achse *OP* ergibt: $J = 1/r^2$. Das Ellipsoid heißt daher Trägheitsellipsoid des Körpers für den Punkt *O*.

Aus der Analytischen Geometrie ist bekannt, dass es für jede Fläche 2. Ordnung ein ausgezeichnetes Koordinatensystem (X', Y', Z') gibt (und zwar das Koordinatensystem, dessen Achsen in Richtung der Hauptachsen des Ellipsoids liegen), in welchem die Flächengleichung eine besonders einfache Form annimmt, nämlich die Form

$$J_{\mathrm{I}}\, x'^2 + J_{\mathrm{II}}\, y'^2 + J_{\mathrm{III}}\, z'^2 = 1,$$

wobei J_{I}, J_{II} und $J_{\mathrm{III'}}$ zunächst irgendwelche Koeffizienten sind. In unserem Fall heißen diese drei Größen die Hauptträgheitsmomente des Körpers (bezüglich *O*). Sind die Achsen der Hauptträgheitsmomente und deren Beträge bekannt, so kann daraus das Trägheitsmoment des Körpers für jede beliebige Achse durch *O* ermittelt werden. Ist *O* zugleich der Schwerpunkt *S* des Körpers, so kann man aus den Hauptträgheitsmomenten zunächst das Trägheitsmoment für jede andere Achse durch *S* berechnen und daraus nach dem Satz von Steiner das Trägheitsmoment für jede dazu parallele Achse.

Ein Vergleich der beiden Gleichungen des Trägheitsellipsoids zeigt, dass beim Übergang auf die Hauptträgheitsachsen Folgendes geschieht:

$$J_{xx} \Rightarrow J_{x'x'} = J_{\mathrm{I}}, \quad J_{yy} \Rightarrow J_{y'y'} \Rightarrow J_{\mathrm{II}}, \quad J_{zz} \Rightarrow J_{z'z'} = J_{\mathrm{III}}, \quad J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0.$$

3.2 Trägheitsmoment und Rotationsenergie

Für die Rotationsenergie des Körpers gilt

$$E = \tfrac{1}{2}\sum m_{\mathrm{i}}\, v_{\mathrm{i}}^2 = \tfrac{1}{2}\sum m_{\mathrm{i}}\left(\omega \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{i}}\right)^2 = \tfrac{1}{2} J\,\omega^2,$$

wobei ω der Betrag der Winkelgeschwindigkeit und $\boldsymbol{a}$ der Einheitsvektor in der Drehachse ist.

In dem Koordinatensystem, dessen Achsen mit den Hauptträgheitsachsen des Körpers zusammenfallen, ist

$$E = \tfrac{1}{2}\omega^2\left(J_{\mathrm{I}}\cos^2\alpha' + J_{\mathrm{II}}\cos^2\beta' + J_{\mathrm{III}}\cos^2\gamma'\right),$$

wobei

$$\cos\alpha' = \frac{\omega_{x'}}{\omega}, \quad \cos\beta' = \frac{\omega_{y'}}{\omega}, \quad \cos\gamma' = \frac{\omega_{z'}}{\omega}$$

und somit

$$E = \tfrac{1}{2}\left(J_{\mathrm{I}}\,\omega_{x'}^2 + J_{\mathrm{II}}\,\omega_{y'}^2 + J_{\mathrm{III}}\,\omega_{z'}^2\right)$$

ist.

3.3 Beispiel: Das Trägheitsellipsoid für den Mittelpunkt eines homogenen Würfels und sein Trägheitsmoment bezüglich einer durch den Mittelpunkt gehenden Achse.

Die Hauptachsen eines Ellipsoids haben einige besondere Eigenschaften:

1. Die Hauptachsen (und damit auch die von ihnen aufgespannten Ebenen) stehen aufeinander senkrecht.

2. Die Hauptachsen und ihre Ebenen sind Symmetrieachsen bzw. Symmetrieebenen des Ellipsoids.

3. Die auf den Hauptachsen gelegenen Punkte des Ellipsoids haben vom Mittelpunkt extreme Abstände. Diese sind entweder größer oder kleiner als die Abstände der Nachbarpunkte vom Mittelpunkt.

4. Die Eigenschaften 2. und 3. sind hinreichende Bedingungen dafür, dass drei aufeinander senkrechte Achsen Hauptachsen des Ellipsoids sind.

Betrachten wir nun ein Koordinatensystem mit dem Ursprung im Mittelpunkt des Würfels, dessen Achsen parallel zu den Kanten des Würfels sind. Die Symmetrie des Würfels bezüglich dieser Achsen überträgt sich natürlich auch auf sein Trägheitsellipsoid. Folglich (gemäß 4.) sind die Koordinatenachsen Hauptachsen des Würfels. Aus der Symmetrie folgt weiter, dass die Hauptachsen gleich lang sein müssen, also ist das Trägheitsellipsoid des Würfels eine Kugel. Daraus folgt, dass das Trägheitsmoment des Würfels für jede Achse durch den Mittelpunkt gleich ist. Für das Trägheitsmoment bezüglich der Z-Achse gilt dann:

$$J = \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x = \left| \frac{x^3}{3} + y^2 x \right|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{12} + a y^2,$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^3}{12} + a y^2 \right) \mathrm{d}y = \left| \frac{a^3}{12} y + a \frac{y^3}{3} \right|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{a^4}{6},$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{a^4}{6} \mathrm{d}z = \left| \frac{a^4}{6} z \right|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{a^5}{6},$$

$$J = \rho \frac{a^5}{6} = M \frac{a^2}{6}.$$

a = Kantenlänge, M = Masse des Würfels.

Dieses Ergebnis gilt für alle durch den Mittelpunkt des Würfels gehende Achsen.