Einführung
in die
Theoretische Physik

Elektrostatik II

Siegfried Petry

Fassung vom 18. Januar 2013

I n h a l t :

7 Spezielle elektrostatische Felder

7.1 Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallelen ebenen Metallplatten in geringem Abstand zu einander. Im Folgenden soll die Plattenfläche A mindestens einige Quadratdezimeter betragen und der Plattenabstand d nicht größer als einige Millimeter sein. Dann kann man von den Feldanteilen am Rand des Kondensators absehen und das Feld als insgesamt homogen betrachten. Außerhalb der Kondensatorplatten existiert praktisch kein Feld. Aus dem »Durchflutungsgesetz der Elektrostatik« (siehe Teil I, 5.2) findet man für eine Hüllfläche, welche eine der beiden eng Platten umschließt,

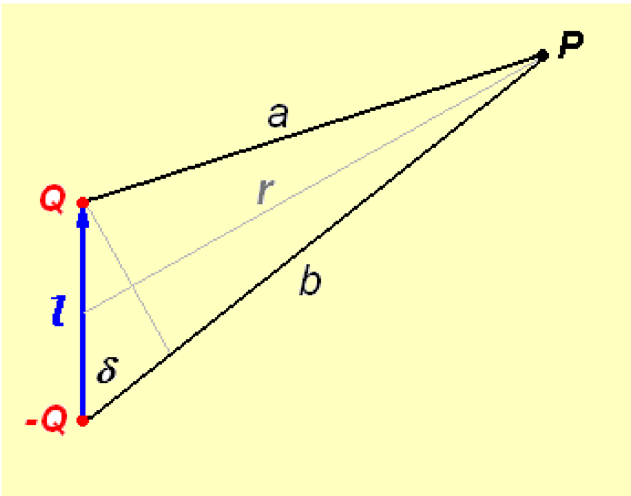
$$E \cdot A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}.$$

Im Allgemeinen wird eine der beiden Platten des Kondensators geerdet. Sie hat dann (gemäß Verabredung) das Potential null. Die andere Platte kann man z. B. mit einem geriebenen Glas- oder Hartgummistab aufladen und ihr Potential φ mit einem Elektrometer messen. Dieses Potential ist identisch mit der Spannung U zwischen den Platten, da die geerdete Platte das Potential null hat. Wird auf die isolierte Platte die Ladung Q aufgebracht, so »saugt« diese Ladung aus der Erde die Ladung $-Q$ auf die andere Platte. (Dies ergibt sich auch mit dem Hüllenintegral über diese Platte und mit der bekannten Feldstärke. Siehe dazu auch Kap. 7.5 Influenzladungen) Wegen der Homogenität des Feldes ($\boldsymbol{E}$ = konst.) ist:

$$U = \varphi = E\,d \quad \Rightarrow \quad E = \frac{U}{d}.$$

7.2 Elektrischer Dipol

Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen Q und $-Q$ im Abstand $\boldsymbol{l}$. Das Produkt $Q\,\boldsymbol{l}$ heißt Dipolmoment $\boldsymbol{m}$. Es ist ein Vektor von der Richtung des Vektors $\boldsymbol{l}$.



Das Potential in P ist die Summe der einzelnen Potentiale:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{a\,b}.$$

Für $r >> l$ ist

$$b - a \approx l\cos\delta \quad \text{und} \quad a\,b \approx r^2.$$

Dann ist annähernd:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{l\cos\delta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Das Dipolpotential nimmt also mit $1/r^2$ ab und hängt außerdem vom Winkel zwischen $\boldsymbol{l}$ und $\boldsymbol{r}$ ab. Es ist auf der Mittelsenkrechten des Dipols überall null und hat bei konstantem r in der Dipolachse den größten Betrag. Auf der Seite der positiven Ladung ist es positiv, auf der anderen negativ. Das Feld ist nicht mehr kugelsymmetrisch (radialsymmetrisch), sondern lediglich rotationssymmetrisch. Für den Betrag der Feldstärke gilt

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{m}{r^3} \sqrt{3\cos^2\delta + 1}$$

und für die Punkte auf der Mittelsenkrechten der beiden Ladungen

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{m}{r^3}.$$

7.3 Elektrische Doppelschicht

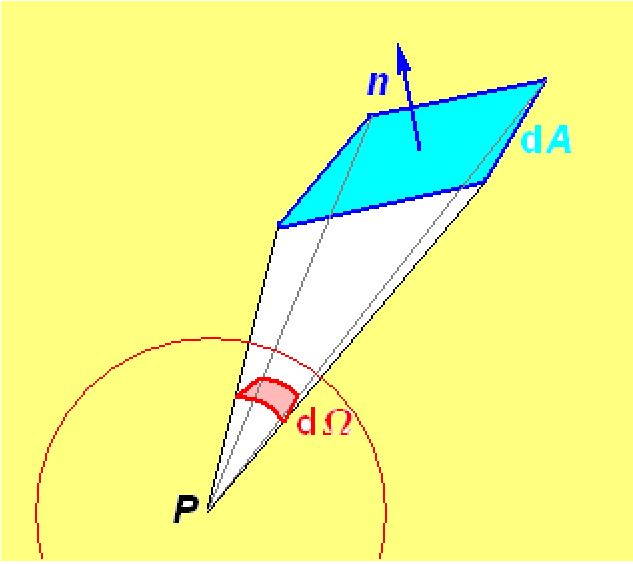
Eine elektrische Doppelschicht ist ein Flächenstück, das auf beiden Seiten mit entgegengesetzt gleichen elektrischen Ladungen belegt ist. Die Doppelschicht kann aufgefasst werden als eine Anhäufung von parallelen elektrischen Dipolen, deren Achsen überall die Richtung der Flächennormalen $\boldsymbol{n}$ haben. Die Flächendichte des Dipolmoments sei $m^* = \mathrm{d}m/\mathrm{d}A$. Dann ist das Potential in P:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_A \frac{m^* \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})}{r^2} \mathrm{d}A.$$

Ist die Schicht homogen, d. h. ist m^* = konst., dann ist

$$\varphi = \frac{m^*}{4\pi\varepsilon_0} \int_A \frac{\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})}{r^2} \mathrm{d}A.$$

Der räumliche Winkel $\mathrm{d}\Omega$, unter dem das Flächenelement $\mathrm{d}A$ von P aus erscheint, ist definiert als die Fläche, die der von P aus nach dem Rand von $\mathrm{d}A$ sich erstreckende Körper aus der Einheitskugel um P ausschneidet:



Daher ist dΩ gleich dem Integranden des obigen Integrals. Durch Integration ergibt sich somit:

$$\varphi = \frac{m^* \Omega}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Unmittelbar vor einer ausgedehnten ebenen Doppelschicht ist $\Omega = 2\pi$ und daher $\varphi = m^*/2\varepsilon_0$, unmittelbar dahinter ist $\varphi = -m^*/2\ \varepsilon_0$ Es findet also auf einer möglicherweise sehr kurzen Strecke ein beträchtlicher Potentialsprung statt.

7.4 Kugelkondensator

Gegeben zwei konzentrische, leitende Kugelflächen mit den Radien a und b. Auf die innere Kugelfläche wird (mit einer isolierten Durchführung durch die äußere Fläche) die Ladung Q gebracht. Die äußere Kugelfläche wird mit der Erde verbunden (»geerdet«) und nimmt so deren Potential an, das wir gleich null setzen.

Für den Raum zwischen den beiden Kugelflächen finden wir mit Hilfe des Hüllenintegrals und der von der Ladung Q ausgehendem Fluss für den Betrag der Feldstärke wieder

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Das Potential finden wir durch folgende Überlegung: Aus $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ folgt wegen der Radialsymmetrie des Feldes für den Betrag der Feldstärke

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = -E\,\mathrm{d}r = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}r$$

und

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k.$$

Für $r = b$ muss $\varphi = \varphi_b = 0$ sein. Daraus folgt

$$k = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

und

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right).$$

Das Potential der inneren Kugel ergibt sich mit $r = a$ zu

$$\varphi_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Die Potentialdifferenz $\varphi_a - \varphi_b = \varphi_a$ zwischen den beiden Flächen des »Kugelkondensators« heißt elektrische Spannung U des Kondensators. Sie wird wie das Potential in Volt (V = Nm/As) gemessen und ist der Ladung Q proportional. Die spannungsbezogene Ladung Q/U ist ein Maß für das elektrische Fassungsvermögen des Kondensators und wird Kapazität C des Kondensators genannt und in As/V = Farad (F) gemessen.

Für den Kugelkondensator gilt:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 a\, b}{b - a}.$$

Für b gegen unendlich erhält man daraus die Kapazität einer freistehenden Kugel vom Radius a:

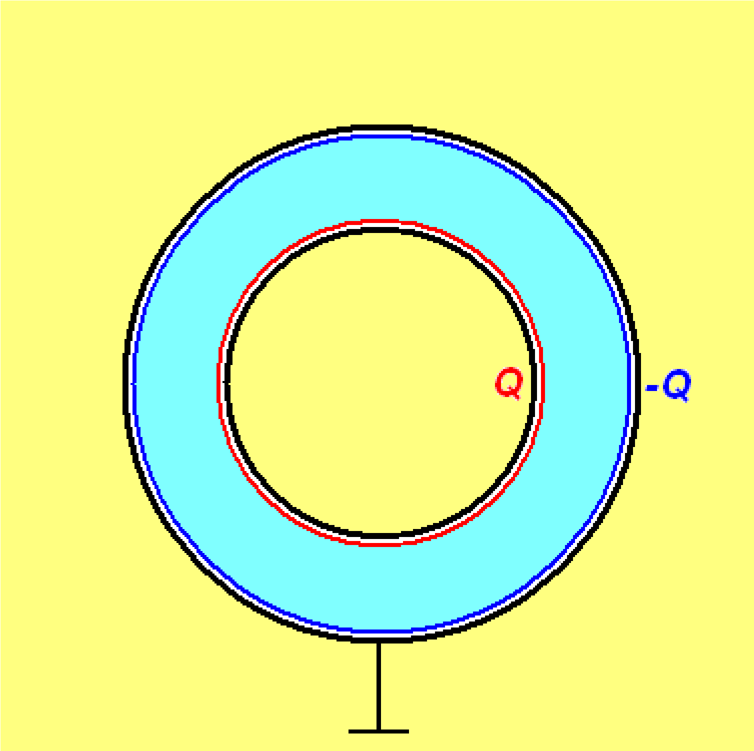
$$C = 4\pi\varepsilon_0 a.$$

Farad ist eine sehr große Einheit. Beispiel: Die Kapazität der Erdkugel beträgt 0,7 mF.

7.5 Influenzladungen

Es lohnt sich, den Kugelkondensator noch etwas genauer zu betrachten: Außerhalb der äußeren Kugel ist überall $E = 0$, und daher muss die von einer im Außenraum befindlichen geschlossenen Hülle umfasste Ladung ebenfalls null sein. Wie ist das möglich?

Ferner: Die von der inneren Ladung Q ausgehenden Feldlinien müssen – da der Außenraum feldfrei ist – auf der äußeren Kugel enden. Als Senken der Feldlinien kommen aber nur negative Ladungen in Frage. Also muss auf der Innenfläche der äußeren Kugel die Ladung $-Q$ gleichmäßig verteilt sein. Dann ist auch die von der geschlossenen Hülle insgesamt umfasste Ladung gleich null.



Es fragt sich nun: Wo kommt diese Ladung her? Hier treffen wir auf das Phänomen der »Influenzladungen« oder »influenzierten Ladungen«. Die negative Ladung der äußeren Kugel wurde von der positiven Ladung der inneren Kugel aus der Erde angezogen. (Dieses Phänomen ist uns auch schon beim Plattenkondensator begegnet.) Diese Influenzladung kann mit geeigneten Mitteln nachgewiesen werden, wenn man zuvor die Verbindung der äußeren Kugel mit der Erde trennt und so der influenzierten Ladung den Rückzug abschneidet. Verbindet man dann die beiden Kugeln miteinander, erweisen sie sich als ungeladen.

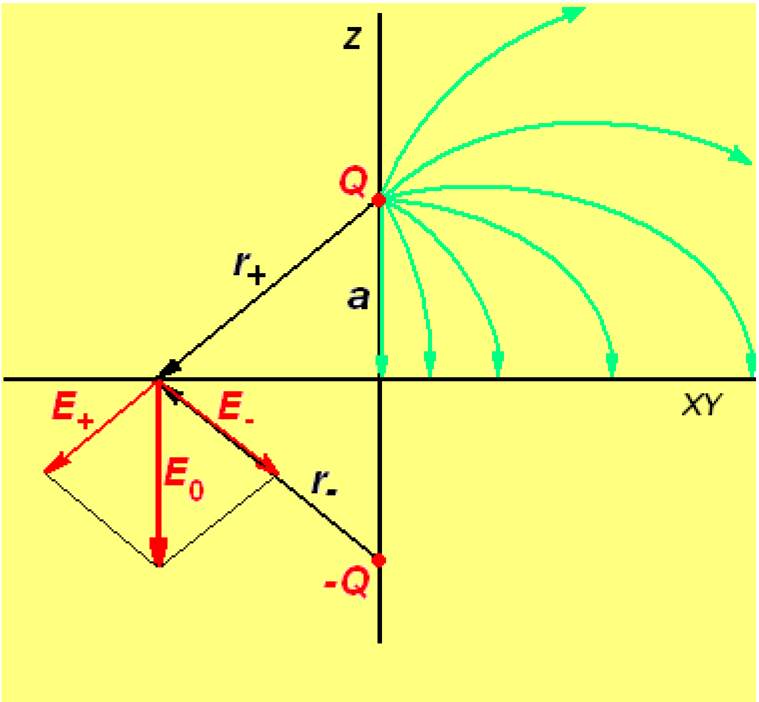
Wenn man die innere Kugel auflädt, ohne dass die äußere zuvor geerdet wurde, geschieht etwas ganz anderes: Auf der äußeren Kugel findet durch Influenz eine Ladungstrennung statt. Auf ihrer Innenfläche erscheint die Ladung $-Q$, auf der Außenfläche die Ladung Q. Das hat zur Folge, dass nun auch im Außenraum ein elektrisches Feld entsteht, und zwar von gleicher Art, als wenn die Ladung Q im Mittelpunkt vereinigt wäre.

7.6 Punktladung über einer unendlich ausgedehnten leitenden Ebene

Auf der Z-Achse befinde sich im Punkt $z = a$ eine Punktladung Q. (Siehe dazu die obere Hälfte der folgenden Abbildung.) Die XY-Ebene sei eine leitende Ebene, der wir das Potential 0 zuschreiben. Da die XY-Ebene eine Äquipotentialfläche ist, stehen die Feldlinien auf ihr senkrecht. Im Raum oberhalb der leitenden Ebene gilt für jede die Ladung Q umschließende Fläche:

$$\oint_A \boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\oint_A \operatorname{grad}\varphi\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Für z gegen null muss auch φ gegen null gehen. Dies gilt auch für den Raum unterhalb der Ebene. Außerdem hat dort jedes Hüllenintegral den Wert null. Folglich muss dort überall $E = 0$ und daher $\varphi =$ konst., also ebenfalls null sein.



Da die Feldlinien alle auf der leitenden Ebene enden, muss es dort negative Influenzladungen mit nach außen abnehmender Ladungsdichte geben.

Stellen wir uns nun vor, es würde symmetrisch zu Q auf der negativen Z-Achse eine Ladung $-Q$ angebracht. Es entstünde dann im unteren Raum ein spiegelsymmetrisches Feld, allerdings mit Feldlinien, die auf die Ladung $-Q$ zuliefen. In der XY-Ebene würden durch Influenz positive Ladungen erzeugt, die sich mit den negativen Influenzladungen kompensieren würden. Die leitende Ebene könnte also entfernt werden, ohne dass sich am Feld etwas ändern würde. Übrig bliebe ein elektrischer Dipol mit dem Dipolmoment vom Betrag $m^* = 2\,a\,Q$ in Richtung der $+Z$-Achse. Dieses Feld ist uns aber bereits bekannt, und wir können für jeden Punkt das Potential und die Feldstärke berechnen:

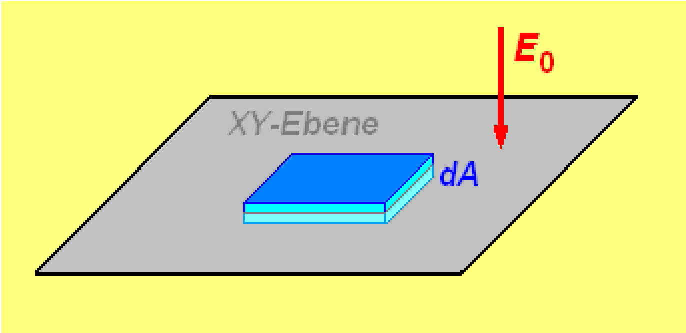
$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right),$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\boldsymbol{r}_+}{r_+^3} - \frac{\boldsymbol{r}_-}{r_-^3}\right).$$

Für den Betrag der Feldstärke in der XY-Ebene, die senkrecht nach unten gerichtet ist, gilt insbesondere:

$$E_0 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^3} a.$$

Aus dieser Feldstärke finden wir die Ladungsdichte σ der Influenzladung auf der XY-Ebene, indem wir ein Flächenelement der Ebene durch eine quaderförmige Fläche von der Grundfläche dA und verschwindend kleiner Höhe einhüllen. Das Hüllenintegral besteht dann nur aus zwei Anteilen. An der Oberseite ist die Feldstärke gleich E_0, an der Unterseite null. Folglich ist



$$\oint_A \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -E_0\, \mathrm{d}A = \frac{\mathrm{d}Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, \mathrm{d}A}{\varepsilon_0},$$

wobei dQ die Ladung des Flächenelements dA und σ die Flächenladungsdichte ist. Daraus folgt:

$$\sigma = -\varepsilon_0 E_0 = \frac{Q}{2\pi r^3} a.$$

Durch Integration über die ganze Ebene findet man, dass die influenzierte Ladung gleich –Q ist, entsprechend der Tatsache, dass die influenzierte Ladung die Senke des von Q erzeugten Feldes ist.

8 Isolatoren (Dielektrika) im elektrischen Feld

8.1 Polarisation

Füllt man nun den Raum zwischen den Platten mit einem Dielektrikum (einem Isolator), so sinkt die Spannung U und damit auch die Feldstärke E_0 drastisch auf einen Bruchteil des ursprünglichen Wertes, obwohl die Ladung des Kondensators offensichtlich unverändert geblieben ist. (Entfernt man das Dielektrikum wieder, stellen sich die ursprünglichen Werte wieder ein.) Es gilt nun für die neue Feldstärke E:

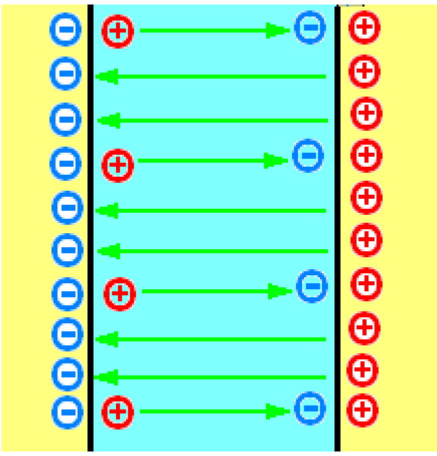
$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}.$$

Der Nenner ε_r ist vom Material des Dielektrikums abhängig und heißt relative Permittivität, Permittivitätszahl oder (veraltend) relative Dielektrizitätskonstante des Materials.

Die Abnahme der Feldstärke erklärt sich dadurch, dass das Dielektrikum durch das elektrische Feld »polarisiert« worden ist, d. h. dass seine Endflächen – ähnlich wie bei der Influenz, jedoch in verringertem Maß – nun elektrische Ladungen tragen.

Für die Herkunft dieser Ladungen kann es zwei Ursachen geben: 1. Falls die Moleküle des Dielektrikums elektrische Dipole sind, die normalerweise regellos angeordnet sind, werden diese nun im Feld graduell ausgerichtet. 2. Wenn die Moleküle keine Dipole sind, kommt es im Feld zu einer (sehr geringen) Verformung der Elektronenhüllen und damit zu einer Ladungsverschiebung. – In beiden Fällen ist die Wirkung dieselbe: Im Inneren des Dielektrikums ist die Verteilung der positiven und negativen Ladungen noch immer gleichmäßig. An den Endflächen überwiegen jedoch nun auf der einen Seite die positiven Ladungen, auf der anderen Seite die negativen. Es entsteht also jeweils eine Flächenladung.

Das von diesen Ladungen erzeugte Feld wirkt dem angelegten Feld entgegen, was zu einer Herabsetzung der Feldstärke führt.



Polarisation des Dielektrikums und Verminderung der Feldstärke

Die Ladungsdichte der Polarisationsladung sei $\sigma = P$. Dann ist der Betrag der Polarisationsfeldstärke $E_{\mathrm{pol}} = P/\varepsilon_0$ und der Betrag der neuen Feldstärke

$$E = E_0 - E_{\mathrm{pol}} = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} \quad \text{und mit} \quad E_0 = \varepsilon_r E \quad \Rightarrow \quad P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E.$$

Der dazu gehörige Vektor $\boldsymbol{P}$ heißt Polarisation des Dielektrikums:

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E}.$$

8.2 Das Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien

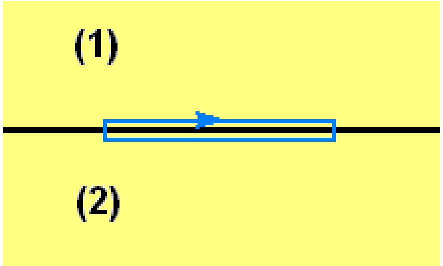
An der Trennungsfläche zweier verschiedener Dielektrika mit $\varepsilon_r = \varepsilon_1$ bzw. ε_2 werden die elektrischen Feldlinien gebrochen, wenn sie nicht gerade senkrecht zur Trennungsfläche verlaufen. Der Grund dafür ist, dass sich die Tangentialkomponenten der Feldstärken an der Grenzschicht anders verhalten als die Normalkomponenten. Für die Normalkomponenten gilt wie oben:

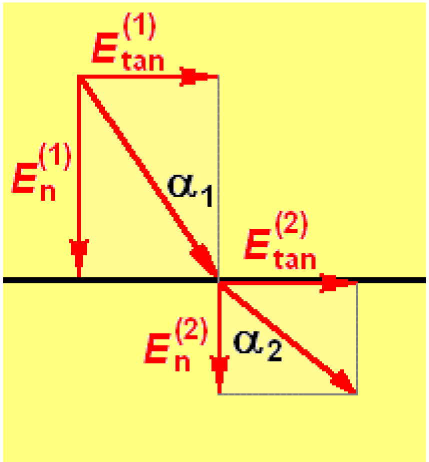
$$E_{\mathrm{n}}^{(1)} = \frac{E_0}{\varepsilon_1} \quad \text{und} \quad E_{\mathrm{n}}^{(2)} = \frac{E_0}{\varepsilon_2}.$$

Für die Tangentialkomponenten dagegen gilt:

$$E_{\tan}^{(1)} = E_{\tan}^{(2)}.$$

Begründung: Erfahrungsgemäß sind elektrostatische Felder auch in Dielektrika wirbelfrei. So muss das Linienintegral über die Feldstärke entlang der Trennfläche null sein (siehe Abbildung). Daraus folgt die Gleichheit der Tangentialkomponenten.





Für die beiden Winkel gilt daher:

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

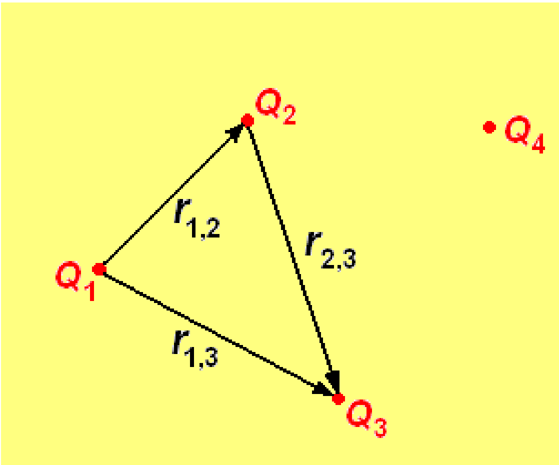
9 Die Energie des elektrischen Feldes

9.1 Potential eines Systems von Punktladungen

Wir gehen aus von dem Potentialfeld einer Punktladung. Für das Potential φ in einem Punkt P im Abstand r von der Ladung Q gilt:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Wir denken uns nun sukzessive ein System von Punktladungen Q_1, Q_2, Q_3 usw. zusammengebaut, die sich zunächst im Unendlichen befinden sollen.



Im (zunächst) feldfreien Raum ist zum Transport (zum Hereinbringen) von Q_1 keine Arbeit erforderlich.

Das Potential, das Q_1 dann am künftigen Ort von Q_2, erzeugt, ist

$$\varphi_{1,2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\, r_{1,2}}.$$

Um Q_2 aus dem Unendlichen an ihren Ort zu bringen, ist die Arbeit W_2 nötig, für die gilt:

$$W_2 = \varphi_{1,2}\, Q_2 = \frac{Q_1\, Q_2}{4\pi\varepsilon_0\, r_{1,2}}.$$

Q_1 und Q_2 erzeugen am künftigen Ort der Ladung Q_3 zusammen das Potential

$$\varphi_{1,3} + \varphi_{2,3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{1,3}} + \frac{Q_2}{r_{2,3}}\right).$$

Um Q_3 aus dem Unendlichen an ihren Ort zu bringen, ist die Arbeit W_3 nötig:

$$W_3 = \left(\varphi_{1,3} + \varphi_{2,3}\right) Q_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_{1,3}} + \frac{Q_2}{r_{2,3}}\right) Q_3, \quad \text{usw.}$$

Dies ist die Arbeit, die nötig ist, um die jeweilige Anordnung der vorgegebenen, also bereits als vorhanden angenommenen Punktladungen herzustellen. Nicht berücksichtigt sind dabei jedoch die Arbeiten, die nötig sind, um Q_1 und alle übrigen Ladungen im Unendlichen aus einzelnen Elementarladungen zusammenzusetzen. Wenn wir den Begriff »Punktladungen« wörtlich nähmen, wäre dazu jeweils eine unendlich große Arbeit nötig. Nun gibt es aber in der Realität keine Punktladungen, weshalb wir kugelschalenförmige Flächenladungen entsprechender Größe benutzen müssen. Deshalb ist unsere nächste Aufgabe, die Energie zu berechnen, die zur Herstellung einer solchen Ladung erforderlich ist.

9.2 Der Energieinhalt einer geladenen Kugel

Das Potential einer geladenen Kugel vom Radius R ist

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Um nun die zusätzliche Ladung dQ auf die Kugel zu bringen, braucht man die Arbeit

$$\mathrm{d}W = \varphi\,\mathrm{d}Q = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,\mathrm{d}Q.$$

Um die Kugel vom ursprünglich ungeladenen Zustand (Q = 0) in den Endzustand (Q = Q_E) zu bringen, braucht man die Arbeit

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{Q_\mathrm{E}} Q\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\,\frac{Q_\mathrm{E}^2}{2}.$$

Dieses Ergebnis entspricht der Tatsache, dass das mittlere Potential der Kugel während des Ladevorgangs gleich dem halben Endpotential ist.

9.3 Die Energiedichte des elektrischen Feldes

Wo befindet sich die elektrische Energie eines geladenen Körpers? Auf diese Frage gab es in der Physik lange Zeit zwei gegensätzliche Antworten. Nach der so genannten Nahewirkungstheorie (auf die hier nicht näher eingegangen werden soll) sollte sich die Energie auf dem geladenen Körper und gleichsam in den Ladungen befinden. Nach der Fernwirkungstheorie, die sich schließlich aus zwingenden Gründen durchgesetzt hat, befindet sich die Energie im elektrischen Feld, das den geladenen Körper umgibt. Dabei ist zu erwarten, dass die Energiedichte dW/dV eine Funktion der Feldstärke ist. Um diesen Zusammenhang zu klären, betrachten wir das homogene Feld eines Plattenkondensators mit der Plattenfläche A, dem Plattenabstand d und der Ladung Q. Der Betrag seiner Feldstärke ist dann

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A},$$

und der Potentialunterschied seiner Platten

$$\Delta\varphi = U = E\,\mathrm{d} = \frac{Q\,\mathrm{d}}{\varepsilon_0\,A}.$$

Seinen Energieinhalt W findet man durch eine Integration wie oben:

$$W = \frac{Q^2\,\mathrm{d}}{2\varepsilon_0\,A}.$$

Daraus ergibt sich die Energiedichte des Feldes:

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{W}{V} = \frac{Q^2\,\mathrm{d}}{2\varepsilon_0\,A}\frac{1}{A\mathrm{d}} = \varepsilon_0\,\frac{E^2}{2}.$$

Analog findet man für einen mit Dielektrikum gefüllten Kondensator:

$$w = \varepsilon_r\varepsilon_0\,\frac{E^2}{2}.$$

Diese wichtige Beziehung gilt jedoch nicht nur für das homogene Feld eines Plattenkondensators, sondern ganz allgemein. In hinreichend kleinen Bereichen kann man nämlich jedes Feld als homogen betrachten und es durch einen Plattenkondensator erzeugt denken.

Wir wenden diese Beziehung nun auf das radialsymmetrische Feld einer geladenen Kugel an und überprüfen die Übereinstimmung mit dem oben gefundenen Wert für deren Energie.

Wir zerlegen das Feld in konzentrische Kugelschalen der Fläche $4\pi r^2$ und der Dicke dr, berechnen aus der Energiedichte deren Energiegehalt und integrieren über das Volumen des gesamten Feldes, d. h. von $r = R$ bis r gleich unendlich.

$$W = \int_V w\,\mathrm{d}V = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty E^2\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r \quad \text{und mit} \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,r^2}$$

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R},$$

was mit dem oben gefundenen Wert übereinstimmt.

Zum Schluss noch eine etwas vertrackte Aufgabe:

Man kann die Energiedichte des elektrischen Feldes auch mittels einer Kugelladung finden, indem man zunächst die Arbeit berechnet, die nötig ist, um die Ladung Q auf eine Kugel vom Radius R zu bringen, sodann die Arbeit, die man braucht, um die gleiche Ladung auf eine Kugel vom Radius R – dR zu bringen. Die Differenz der beiden Arbeiten muss gleich der Energie sein, die in dem hinzugekommenen Volumen steckt. Auf diese Weise findet man das richtige Ergebnis.

Dann denken wir uns nun die Kugelladung Q aus einer großen Zahl sehr kleiner Ladungen q zusammengesetzt. Jede dieser Ladungen befindet sich in dem elektrischen Feld, das von der Ladung Q an der Oberfläche der Kugel erzeugt wird und erfährt eine entsprechende Kraft. Verschiebt man jede der kleinen Ladungen um die Strecke dR nach innen, so braucht man dazu eine bestimmte Arbeit und erhält dafür ein größeres Feld mit einer entsprechend höheren Energie. Die Durchführung der Rechnung liefert für die Energiedichte genau das Doppelte des richtigen Wertes. Wo liegt der Fehler?