Einführung

in die

Theoretische Physik

Der elektrische Strom – Wesen und Wirkungen

Teil II: Elektrische Wirkungen magnetischer Felder

Siegfried Petry

Fassung vom 19. Januar 2013

I n h a l t :

1 Kraft auf einen elektrischen Strom im Magnetfeld

Es ist zu erwarten, dass ein stromdurchflossener Leiter in einem Magnetfeld eine Kraft erfährt, da er ja selbst von einem Magnetfeld umgeben ist und die beiden Felder im Allgemeinen aufeinander einwirken.

Experimenteller Befund: Ein geradliniger Leiter erfährt in einem Magnetfeld eine Kraft, die

- proportional der Stromstärke I im Leiter,
- proportional der Leiterlänge l,
- proportional dem Betrag H der Feldstärke und
- proportional dem Sinus des Winkels α zwischen Leiter und Feldlinien ist. (Dies kann so gedeutet werden, dass nur die Komponente des Stromes zählt, die auf der Feldstärke senkrecht steht.)

Also ist

$$F = k\, I\, l\, H \sin\alpha \qquad \textbf{(1)}$$

und vektoriell geschrieben

$$\boldsymbol{F} = k\, I \left[\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{H}\right]. \qquad \textbf{(2)}$$

Der Wert des Faktors k ergibt sich aus der Definition der Einheit der elektrischen Stromstärke:

„Ein Ampere ist die Stärke eines elektrischen Stromes, der durch zwei geradlinige, unendlich lange parallele Leiter (…) mit einem Abstand von einem Meter fließt und der zwischen den Leitern je Meter Länge eine Kraft von 2×10^{-7} N hervorruft.“

Berücksichtigt man, dass die magnetische Feldstärke am Ort eines jeden Leiters 1 A/(2π m) beträgt (siehe: Der elektrische Strom I, Kap. 5.2), so ergibt sich aus Gleichung (1):

$$k = \frac{2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N} \cdot 2\pi\,\mathrm{m}}{1\mathrm{A} \cdot 1\mathrm{m} \cdot 1\mathrm{A}} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}.$$

Diese Größe heißt **magnetische Feldkonstante μ_0.**

Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{F} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}\, I \left[\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{H}\right] = \mu_0 I \left[\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{H}\right]. \qquad \textbf{(3)}$$

Da die Kraft des Magnetfeldes nicht primär auf den Leiter, sondern auf die bewegten Ladungen in ihm einwirkt, soll jetzt die Kraft auf eine einzelne Ladung berechnet werden.

Der Betrag der Kraft auf das Leiterstück ist nach Gleichung (1)

$$F = \mu_0\, I\, l\, H \sin\alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen Stromrichtung und Feldrichtung ist.

Die Stromstärke I ergibt sich aus der Ladungsdichte ρ, dem Leiterquerschnitt A und der Geschwindigkeit v der Ladungen zu

$$I = \rho A v. \qquad \textbf{(4)}$$

Begründung: Es ist $I = \mathrm{d}Q / \mathrm{d}t$. In der Zeit d$t$ fließen alle diejenigen Ladungsträger durch irgendeinen Leiterquerschnitt, die sich auf der Strecke d$s = v\,\mathrm{d}t$ vor diesem Leiterquerschnitt befinden. Sie haben die Ladung $\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}V = \rho\,A\,\mathrm{d}s = \rho\,A\,v\,\mathrm{d}t$. Damit wird $I = \mathrm{d}Q / \mathrm{d}t = \rho\,A\,v$.

Also ist

$$F = \mu_0\,\rho A v\,l\,H \sin\alpha.$$

Nun ist aber $\rho\,A\,l$ die in dem Leiterstück befindliche Ladung Q. Damit ergibt sich

$$F = \mu_0\,Q\,v\,H \sin\alpha. \tag{5}$$

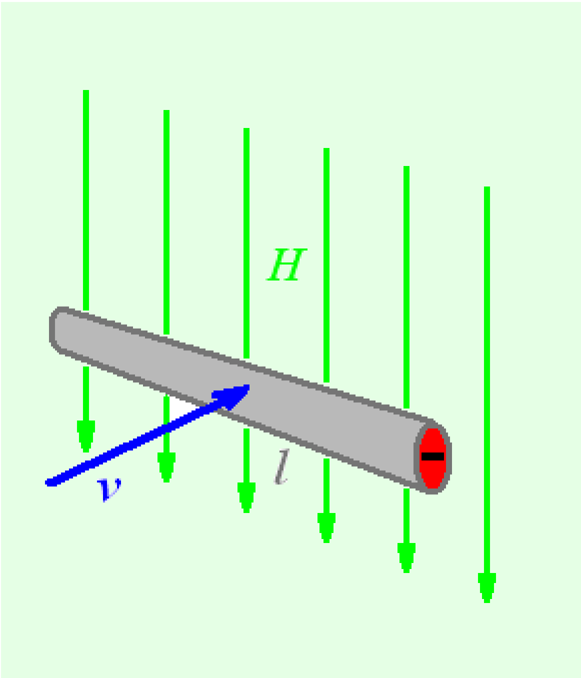
Dies ist die Kraft, die eine mit der Geschwindigkeit v im Magnetfeld mit der Feldstärke H bewegte Ladung Q erfährt. Insbesondere erfährt ein Elektron (Ladung $-e$), das sich mit der Geschwindigkeit v senkrecht zur Feldrichtung bewegt, die Kraft

$$F_\mathrm{E} = \mu_0\,e\,v\,H. \tag{6}$$

2 Die elektromagnetische Induktion

2.1 Ursachen der Induktion

Wird ein Leiter in einem magnetischen Feld so bewegt, dass er Feldlinien schneidet, wird in ihm eine elektrische Spannung »induziert«. Die Spannung ist am größten, wenn die Bewegung des Leiters senkrecht zu den Feldlinien und senkrecht zu seiner Achse erfolgt.



Erklärung: Die im Leiter befindlichen elektrischen Ladungen erfahren wegen ihrer Bewegung im Feld eine Kraft. Die positiven Ladungen (Protonen) können sich nicht bewegen, aber die Elektronen werden durch die Kraft ein Stück verschoben (in der Abbildung nach rechts), und so entsteht an den Leiterenden eine negative bzw. positive Flächenladung. Diese erzeugt im Leiter ein elektrisches Feld, das auf die Elektronen eine Kraft ausübt. Es stellt sich sehr schnell ein Gleichgewicht ein, wobei die Kraft des elektrischen Feldes so groß ist wie die Kraft des Magnetfeldes:

$$e\,E = \mu_0\,e\,v\,H.$$

Durch das elektrische Feld entsteht zwischen den Leiterenden ein Potentialunterschied $\Delta\varphi$, der gleichbedeutend ist mit einer elektrischen Spannung $U = E\ l$ (l = Leiterlänge). Aus der obigen Gleichung ergibt sich dafür

$$U = \mu_0\, v H\, l. \tag{7}$$

Die vektorielle Beschreibung der induzierten Feldstärke (in der Abbildung schräg von links nach rechts gerichtet) lautet:

$$\boldsymbol{E} = -\mu_0 \left[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}\right]. \tag{8}$$

Derselbe Effekt tritt auf, wenn der Leiter ruht und das Magnetfeld (das zum Beispiel von einem Hufeisenmagneten erzeugt wird) sich bewegt. Es kommt also auch hier nur auf die Relativgeschwindigkeit zwischen Leiter und Magnetfeld an.

Es gibt auch Induktionsvorgänge ohne Bewegung, zum Beispiel wenn das Magnetfeld durch einen Strom in einer Spule erzeugt wird und die Stromstärke verändert wird. Für solche Fälle brauchen wir eine allgemeinere Formulierung des Induktionsgesetzes. Diese lautet:

1. In einer Leiterschleife wird eine elektrische Spannung induziert, wenn sich der »magnetische Fluss« Φ durch die Fläche A der Schleife ändert. Der magnetische Fluss ist der Fluss des Vektors $\mu_0 \boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_A \mu_0\, \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}\boldsymbol{A}. \tag{9}$$

2. Die induzierte Spannung ist gleich der Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses durch die Fläche A der Leiterschleife:

$$U = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \mu_0\, \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}\boldsymbol{A}. \tag{10}$$

Anmerkung: Das vor dem Bruch $\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}/\mathrm{d}t$ übliche Minuszeichen ist sinnlos und bei Einführung von Zählpfeilen sogar falsch.
(Siehe dazu: »Die physikalische Rumpelkammer«, „Das Minuszeichen im Induktionsgesetz“ auf dieser Website.)
Vor dem Integral dagegen ist das Minuszeichen sinnvoll. Haben nämlich $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{A}$ dieselbe Richtung, so bildet der Zählpfeil der induzierten Spannung zusammen mit jedem der beiden Vektoren eine Linksschraube, weshalb U negativ ist.

Die induzierte Spannung ist andererseits gleich dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke über die Leiterschleife S:

$$U = \oint_S \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Nach dem Integralsatz von STOKES ist

$$\oint_S \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{A}.$$

und daher mit Gleichung (10)

$$\int_A \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{A} = U = -\int_A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu_0 \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}\boldsymbol{A}.$$

Da diese Gleichung für jede beliebige Fläche erfüllt sein muss, müssen die Integranden der Flächenintegrale gleich sein. Also ist:

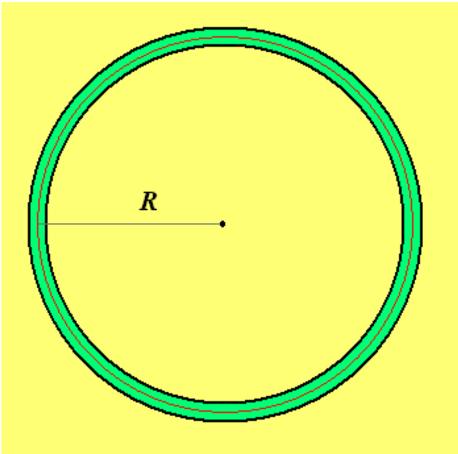
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}. \tag{11}$$

Nach der Maxwellschen Theorie ist die induzierte Feldstärke von der Existenz eines Leiters unabhängig und daher gilt diese Gleichung für jeden Punkt des Raumes.

2.2 Selbstinduktion und Induktivität

Eine Leiterschleife, in der ein elektrischer Strom fließt, wird von ihrem eigenen Magnetfeld durchdrungen. Ändert sich die Stromstärke, so ändern sich auch die Feldstärke und damit der magnetische Fluss durch die Leiterschleife, und folglich wird in der Leiterschleife eine Spannung induziert.

Die quantitative Betrachtung wird besonders einfach bei einer schlanken Ringspule (Toroidspule).



Die Spule sei eng gewickelt, habe n Windungen und werde vom Strom I durchflossen. Ihr Querschnitt sei A. Das Magnetfeld im Innern der Spule hat kreisförmige Feldlinien und ist nahezu homogen. Der Betrag der magnetischen Feldstärke in ihr ist analog zu der einer sehr langen Zylinderspule, wo sie

$$H = \frac{n\,I}{l} \tag{12}$$

beträgt,

$$H = \frac{n\,I}{2\pi R}. \tag{13}$$

Der magnetische Fluss Φ durch jede Windung der Spule ist

$$\Phi = A\mu_0 H = \mu_0 \frac{n\,A}{2\pi R} I. \tag{14}$$

Ändert sich der Strom in der Spule, wird in ihr die Spannung U induziert, für die gilt:

$$U = n\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{n^2 A}{2\pi R}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{15}$$

In der Literatur findet man vor den beiden rechten Termen meist noch ein Minuszeichen. Dies ist eine der »Altlasten« der Physik, die gedankenlos unentwegt weiter verbreitet werden. Die Zuteilung eines negativen Vorzeichens setzt die Einführung von so genannten Zählpfeilen voraus. Geschieht dies aber auf vernünftige Weise, dann zeigt sich, dass das Minuszeichen sogar falsch ist. Näheres dazu im III. Teil.

Der nur von den Eigenschaften der Spule und der magnetischen Feldkonstanten abhängige Faktor heißt die **Induktivität *L*** der Spule. Für die Induktivität der Toroidspule gilt also:

$$L = \mu_0 \frac{n^2 A}{2\pi R}. \tag{16}$$

Allgemein gilt die Definitionsgleichung der Induktivität:

$$L = \frac{U_{\text{ind}}}{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}. \tag{17}$$

Auch bei dieser Gleichung findet man in der Literatur im Allgemeinen ein Minuszeichen vor der rechten Seite. Auch für dieses gilt das oben Gesagte.

Die Einheit der Induktivität ist das Henry. 1 Henry = 1 Vs/A. Eine Spule hat die Induktivität 1 Henry, wenn bei einer Stromstärkeänderungsgeschwindigkeit von 1 A/s in ihr die Spannung von 1 Volt induziert wird.

Da einerseits

$$U_{\text{ind}} = n\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

und andererseits

$$U_{\text{ind}} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

ist, gilt für den magnetischen Fluss Φ in jeder Spule oder Leiterschleife

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{L}{n}I. \tag{18}$$

2.3 Gegenseitige Induktion und gegenseitige Induktivität

Wenn zwei Spulen so angeordnet sind, dass der magnetische Fluss der Spule 1 wenigstens teilweise auch die Spule 2 durchdringt, so wird eine Änderung der Stromstärke I_1 in der Spule 1 auch in der Spule 2 eine Spannung $U_{1,2}$ induzieren, die der Änderungsgeschwindigkeit $\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t$ der Stromstärke I_1 proportional ist:

$$U_{1,2} = L_{1,2}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}. \tag{19}$$

Der Proportionalitätsfaktor $L_{1,2}$ heißt gegenseitige Induktivität der Spule 1 bezüglich der Spule 2. Aus Gleichung (18) folgt

$$L_{1,2} = \frac{U_{1,2}}{\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}}. \tag{20}$$

Analog ist die gegenseitige Induktivität der Spule 2 bezüglich der Spule 1:

$$L_{2,1} = \frac{U_{2,1}}{\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}}. \tag{21}$$

Sind die Spulen so angeordnet, dass der gesamte magnetische Fluss der Spule 1 sämtliche Windungen der Spule 2 durchsetzt und umgekehrt, dann spricht man von einer vollständigen Kopplung der beiden Spulen. Diese ist nur realisierbar, indem die beiden Spulen auf einem Toroid ineinander gewickelt werden (abwechselnd immer eine Windung der Spule 1 und eine der Spule 2) oder wenn sie einen (streuungsfreien) gemeinsamen Eisenkern haben. Bei vollständiger Kopplung ist (siehe Gleichung (18))

$$U_{1,2} = n_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = n_2 \frac{L_1}{n_1} \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t},$$

woraus mit Gleichung (21) folgt:

$$L_{1,2} = \frac{n_2}{n_1} L_1.$$

Analog findet man:

$$L_{2,1} = \frac{n_1}{n_2} L_2.$$

Für eine doppelte Toroidspule (wie oben beschrieben) gilt (siehe Gleichung (15)):

$$L_1 = \mu_0 \frac{A}{l} n_1^2 \quad \text{und} \quad L_2 = \mu_0 \frac{A}{l} n_2^2,$$

woraus sich nach einer einfachen Rechnung ergibt:

$$L_{1,2} = L_{2,1} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

3 Die Energiedichte des magnetischen Feldes

Der Aufbau eines Magnetfeldes erfordert Energie. Dies äußert sich darin, dass beim Einschalten des Stromes dieser verzögert auf seinen endgültigen Wert wächst, der durch den Ohmschen Widerstand des Stromkreises bestimmt ist. (Eine genaue Untersuchung des Einschaltvorgangs erfolgt später.) Die unmittelbare Ursache dieser Verzögerung ist die durch Selbstinduktion induzierte Spannung U_{ind}, die der angelegten Spannung entgegen wirkt. Zum Transport der Ladung dq gegen diese Spannung ist die Arbeit

$$\mathrm{d}W = U_{\mathrm{ind}}\,\mathrm{d}q = U_{\mathrm{ind}}\,I\,\mathrm{d}t = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} I\,\mathrm{d}t = L\,I\,\mathrm{d}I \tag{22}$$

erforderlich. Da diese Arbeit nicht in Wärme umgesetzt wird, muss sie im magnetischen Feld gespeichert sein. Die Integration der Gleichung (22) zwischen den Grenzen 0 und I liefert:

$$W = \tfrac{1}{2} L I^2.$$

Diese Energie findet sich im magnetischen Feld wieder. Zur Berechnung der Energiedichte $w = \mathrm{d}W/\mathrm{d}V$ ist das praktisch homogene Feld einer großen dünnen Toroidspule besonders gut geeignet. Für sie findet man mit den Gleichungen (13) und (15)

$$W = \mu_0 \pi H^2 R A$$

und mit $2\pi\, R\, A = V$ = Volumen des Feldes

$$w = \tfrac{1}{2}\mu_0 H^2.$$

Da man jedes beliebige Feld in hinreichend kleinen Bereichen als homogen betrachten kann, gilt auch dieses Ergebnis ganz allgemein.

4 Die Maxwellschen Gleichungen

4.1 Maxwells Hypothese und die 1. Maxwellsche Gleichung

Zunächst eine kurze Wiederholung:

Das magnetische Durchflutungsgesetz besagt für das Magnetfeld eines unendlich langen geraden Leiters, dass das Linienintegral der magnetischen Feldstärke H über eine geschlossene Kurve gleich der Stromstärke I des von der Kurve umschlossenen Stromes ist:

$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{I},$$

und in Differentialschreibweise

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}.$$

Betrachten wir nun einen Plattenkondensator mit Dielektrikum, der an einer Wechselspannung liegt. Das Dielektrikum wird durch Ladungsverschiebung polarisiert. Die Flächenladungsdichte σ an den Grenzflächen des Dielektrikums heißt auch Polarisation P und beträgt:

$$\sigma = P = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right) E.$$

Dabei ist E der Größenwert der (hier wechselnden) elektrischen Feldstärke im Kondensator. Wenn die Feldstärke sich ändert, ändert sich proportional dazu auch die Polarisation. Dabei werden ständig elektrische Ladungen verschoben. Dies ist gleichwertig mit einem elektrischen Wechselstrom im Dielektrikum, für den gilt:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = A\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = A\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = A\varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right)\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Dabei ist A die Fläche des Kondensators. Die Stromdichte dieses Stromes ist

$$j = \frac{I}{A} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right)\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Dieser »Verschiebungsstrom« liefert natürlich auch einen Beitrag zum magnetischen Feld, das den Stromkreis umgibt, und für das analog wie oben gilt

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1\right)\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Maxwells Hypothese war nun, dass es auch im Vakuum (im »Äther«) einen Verschiebungsstrom I_V gäbe, dessen Stromdichte

$$\boldsymbol{j}_V = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

sein müsste. Zusammen mit dem Verschiebungsstrom im Dielektrikum gäbe das die gesamte Stromdichte

$$\boldsymbol{j}_G = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Demnach müsste für die gesamte, von den Verschiebungsströmen erzeugte Feldstärke H_G gelten:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{j}_G = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Das ist Maxwells Hypothese.

Nun hat sich das Konzept des »Äthers« und damit auch das des Verschiebungsstroms im Äther längst als unhaltbar erwiesen. (Wie überhaupt die Ätherhypothese kein Ruhmesblatt in der Geschichte der Physik war.) Man braucht dieses Konzept aber auch gar nicht, denn in der obigen Gleichung treten die Verschiebungsströme gar nicht mehr explizit auf. Als eigentliche Ursache der »elektromagnetischen Induktion« (d. h. hier: der Erzeugung eines Magnetfelds) erscheint nämlich die zeitliche Ableitung (also die Änderungsgeschwindigkeit) der elektrischen Feldstärke. Daher lautet eine

Moderne Formulierung der Maxwellschen Hypothese:

Magnetische Felder werden nicht nur durch elektrische Ströme hervorgerufen, sondern auch durch wechselnde elektrische Felder (wobei dann auch das Magnetfeld ein Wechselfeld ist).

Die Erzeugung magnetischer Wechselfelder durch elektrische Wechselfelder ist als eigenständiges Phänomen aufzufassen, das nicht auf andere Phänomene zurückgeführt und durch diese erklärt werden kann. (Wie ja auch die Erzeugung eines Magnetfeldes durch einen Strom nicht weiter erklärt werden kann.)

Beim gleichzeitigen Auftreten eines elektrischen Stromes der Stromdichte j und eines elektrischen Wechselfeldes mit der Änderungsgeschwindigkeit $\frac{\partial E}{\partial t}$ in einem Punkt gilt für die dadurch in diesem Punkt induzierte magnetische Feldstärke $\boldsymbol{H}$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{E} + \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

wobei ρ der spezifische elektrische Widerstand des Mediums ist.

Dies ist übrigens die einzige der vier so genannten Maxwellschen Gleichungen, die tatsächlich auf Maxwell zurückgeht (1864). Die übrigen drei waren schon vor ihm bekannt. Auch gab es zur Zeit Maxwells zunächst keine experimentelle Begründung seiner Gleichung. Im Laufe der folgenden Jahrzehnte aber wurden alle daraus abgeleiteten Folgerungen experimentell bestätigt. Die eindrücklichste Bestätigung der Maxwellschen Hypothese war der Nachweis der Existenz elektromagnetischer Wellen durch Heinrich Hertz (1888/89), deren Möglichkeit aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleitet werden kann.

4.2 Die drei anderen Maxwellschen Gleichungen

Die übrigen drei Gleichungen lauten

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_r\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E} = \rho, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0.$$

Die erste Gleichung dieser Zeile stellt das Gesetz der magnetischen Induktion dar, nach der zweiten Gleichung ist die Quelldichte des Vektors $\varepsilon_r\ \varepsilon_0\ \boldsymbol{E}$ gleich der elektrischen Raumladungsdichte ρ. Die dritte Gleichung konstatiert die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes.