Einführung
in die
Theoretische Physik

1. Teil: Kinematik

Siegfried Petry

11. Januar 2013

I n h a l t :

1 Einleitung

In der Kinematik geht es um grundlegende Vorgänge und Begriffe im Zusammenhang mit der Bewegung von Körpern: um Verschiebung, Geschwindigkeit, Beschleunigung, gleichförmige Bewegung, gleichmäßig beschleunigte Bewegung; um Bewegungen auf gekrümmten Bahnen – und natürlich um die mathematische Behandlung der entsprechenden physikalischen Vorgänge und Größen. Da es sich dabei meist um »gerichtete Größen«, also um Vektoren handelt, ist die Vektoranalysis[1] das angemessene mathematische Instrument dafür.

Die einfachste vektorielle Größe der Kinematik ist die »Verschiebung« $\Delta\boldsymbol{s}$, die ein Körper während einer Zeitspanne Δt erfährt. Dass die Verschiebung ein Vektor ist, folgt daraus, dass sie den Gesetzen der Vektoraddition folgt. Erfährt nämlich ein Körper *nacheinander* oder *gleichzeitig* zwei Verschiebungen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, so ist die daraus resultierende Verschiebung gleich der Vektorsumme $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ der beiden einzelnen Verschiebungen.

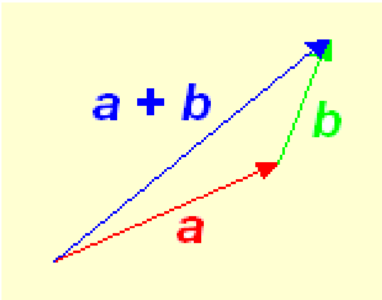

Abb. 1

Zwei gleichzeitige Bewegungen treten vor allem dann auf, wenn sich ein Körper relativ zu einem Bezugssystem bewegt und dieses Bezugssystem selbst sich relativ zu einem anderen Bezugssystem (zum Beispiel zu dem eines Beobachters) bewegt. Beispiel: Die Bewegung eines Reisenden in einem fahrenden Zug, der vom Bahndamm aus beobachtet wird.

Anmerkung zur Schreibweise: Vektorbezeichnungen werden fett und kursiv geschrieben.

2 Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung

Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung werden im Alltag (zum Beispiel im Straßenverkehr) einfach Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung genannt. In der Physik jedoch sind Geschwindigkeit und Beschleunigung Vektoren (gerichtete Größen), und so sind klare Begriffe und Unterscheidungen notwendig.

Legt ein Körper[2] von einem Punkt P aus in der Zeit Δt die Strecke Δs zurück, so heißt der Quotient $\Delta s/\Delta t$ seine mittlere Bahngeschwindigkeit v_m im Zeitintervall Δt oder auf der Strecke Δs.

[1] Siehe dazu Vektoranalysis I und Folgende auf dieser Website.

[2] Der Körper wird hier durch einen Punkt dargestellt, der sein Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) ist. Für die Kinematik genügte es sogar, den Körper als masselosen Punkt aufzufassen.

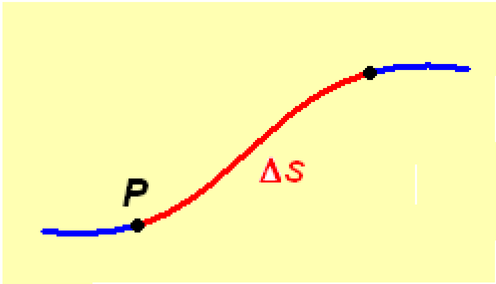

Abb. 2

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Man beachte, dass Δs hier nicht die Verschiebung, sondern die Bogenlänge, also die zurückgelegte Wegstrecke ist. Von *mittlerer* Bahngeschwindigkeit sprechen wir, weil sich der Körper auf der betrachteten Strecke möglicherweise nicht gleichmäßig schnell bewegt hat.

Machen wir das Zeitintervall Δt kleiner, so wird auch die Strecke Δs kürzer. Für Δt gegen null (oder Δs gegen null, was auf dasselbe hinausläuft) nähert sich der Quotient $\Delta s/\Delta t$ unbeschränkt einem Grenzwert, den wir die Bahngeschwindigkeit v_P des Körpers im Punkt P nennen:

$$v_P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

In der Analysis wird dieser Grenzwert auch mit $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ bezeichnet, also:

$$v_P = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \right)_P .$$

Dies ist zunächst nichts weiter als eine bequeme Abkürzung. (Und die Zeiten sind lange, lange vorbei, da man $\mathrm{d}s$ und $\mathrm{d}t$ noch als »unendlich klein« oder »infinitesimal« bezeichnen durfte. Auch wenn es manche Leute noch immer nicht bemerkt haben.) Der Index P auf der rechten Seite der Gleichung bedeutet, dass der Grenzwert an der Stelle P zu bilden ist.

Nehmen wir weiter an, der Punkt habe zur Zeit t die Bahngeschwindigkeit v und zur Zeit $t + \Delta t$ die Bahngeschwindigkeit $v + \Delta v$. Dann bezeichnen wir den Quotienten $\Delta v/\Delta t$ als die mittlere Bahnbeschleunigung a_m des Körpers im Zeitintervall Δt:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Für Δt gegen null strebt dieser Quotient einem Grenzwert zu, der Bahnbeschleunigung a_B[3] des Körpers zur Zeit t heißt.

$$a_B = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \right)_t .$$

[3] Die Bahnbeschleunigung ist identisch mit der Tangentialbeschleunigung, welche die Richtung der Bahntangente hat. Die (Gesamt-)Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ hat im Allgemeinen auch eine Komponente senkrecht dazu (siehe unten).

Ist der Weg s als analytische Funktion $s = s(t)$ der Zeit t beschrieben, so ist die Bahngeschwindigkeitsfunktion $v(t)$ die erste Ableitung der Funktion $s(t)$ nach der Zeit, und die Bahnbeschleunigungsfunktion $a(t)$ ihre zweite Ableitung. (Ableitungen nach der Zeit können auch durch einen Punkt über dem Formelzeichen bezeichnet werden.)

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{s}(t); \qquad a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{s}(t).$$

Umgekehrt können die Bahngeschwindigkeitsfunktion und die Wegfunktion durch Integration der entsprechenden anderen Funktionen gefunden werden:

$$v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t; \qquad s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \iint a(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t.$$

Die zu den unbestimmten Integralen gehörigen additiven Konstanten müssen aus den Anfangsbedingungen oder den Randbedingungen bestimmt werden.

Die Veränderung der Geschwindigkeit v bzw. der Ortskoordinate s zwischen den Zeiten t_1 und t_2 dagegen kann mit bestimmten Integralen berechnet werden:

$$v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t, \qquad s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t.$$

Beispiel: Beim freien Fall erfährt ein Körper die konstante Beschleunigung g. Dann ist, wenn er zur Zeit $t = 0$ die senkrecht nach oben oder unten gerichtete Bahngeschwindigkeit v_0 und die Ortskoordinate s_0 hat,

$$v(t) = \int g\,\mathrm{d}t = gt + C_1,$$

und da $v(t = 0) = v_0$ sein soll, ist $C_1 = v_0$, also ist

$$v(t) = g\,t + v_0.$$

Ferner ist

$$s(t) = \int \left(g\,t + v_0\right)\mathrm{d}t = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + C_2,$$

woraus wegen $s(t = 0) = s_0$ folgt $C_2 = s_0$ und somit

$$s(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + s_0.$$

Aus den bestimmten Integralen von oben ergibt sich

$$v(t_2) - v(t_1) = g\,(t_2 - t_1), \qquad s(t_2) - s(t_1) = \frac{g}{2}(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1).$$

3 Geschwindigkeit und Beschleunigung

3.1 Geschwindigkeit

Wir betrachten nun einen Körper, der im Raum eine beliebige Kurve durchläuft. Zur Zeit t befinde er sich in P, zur Zeit $t + \Delta t$ in Q. Der Ort des Körpers wird durch seinen Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ beschrieben. Dieser sei eine Funktion von t und werde durch eine Funktion $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ beschrieben.

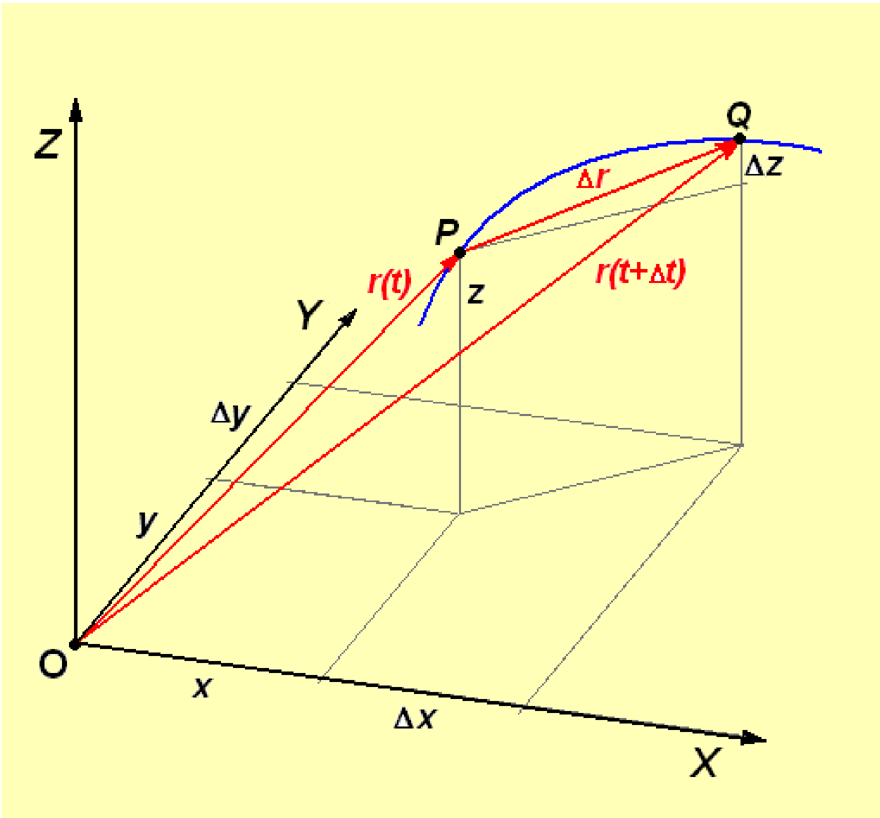

Abb. 3

Es sei

$$\boldsymbol{r}(t) = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 = x(t)\boldsymbol{e}_1 + y(t)\boldsymbol{e}_2 + z(t)\boldsymbol{e}_3$$

und

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) = (x+\Delta x)\boldsymbol{e}_1 + (y+\Delta y)\boldsymbol{e}_2 + (z+\Delta z)\boldsymbol{e}_3,$$

wobei $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$ die Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen sind.

Die Verschiebung des Körpers im betrachteten Zeitintervall ist dann

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = \Delta x\,\boldsymbol{e}_1 + \Delta y\,\boldsymbol{e}_2 + \Delta z\,\boldsymbol{e}_3.$$

Der Quotient $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ ist die mittlere (vektorielle) Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_m$ des Körpers im Zeitintervall Δt. Es ist

$$\boldsymbol{v}_m = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\Delta z}{\Delta t}\boldsymbol{e}_3.$$

Als Summe dreier Vektoren ist $\boldsymbol{v}_m$ (und später auch $\boldsymbol{v}$) auch wieder ein Vektor.

Dabei ist (siehe oben unter »Bahngeschwindigkeit und Bahnbeschleunigung«) $\Delta x/\Delta t$ die mittlere Bahngeschwindigkeit des Körpers parallel zur X-Achse, $\Delta y/\Delta t$ seine mittlere Bahngeschwindigkeit parallel zur Y-Achse und $\Delta z/\Delta t$ seine mittlere Bahngeschwindigkeit parallel zur Z-Achse im Intervall Δt.

Der »Grenzvektor«, dem der Bruch $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ für Δt gegen 0 zustrebt, heißt Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_t$ des Massenpunktes in P bzw. zur Zeit t.

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_t = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_t \boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_t \boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)_t \boldsymbol{e}_3.$$

Die (vektorielle) Geschwindigkeitsfunktion $\boldsymbol{v}(t)$ ist also die erste Ableitung der Ortsfunktion $\boldsymbol{r}(t)$ nach der Zeit.

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}.$$

Wie man sieht, sind die skalaren Komponenten des Vektors $\boldsymbol{v}(t)$ identisch mit den Bahngeschwindigkeiten parallel zu den Achsen:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Definition: Die Gerade durch P mit der Richtung des Vektors $\boldsymbol{v}_P$ heißt **Tangente der Bahnkurve in *P***.

3.2 Beschleunigung

Analog definieren wir nun den Vektor der Beschleunigung:

$$\boldsymbol{a}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)_t.$$

Die (vektorielle) Funktion $\boldsymbol{a}(t)$ der Beschleunigung ergibt sich aus den skalaren Komponenten der Geschwindigkeitsfunktion und der Ortsfunktion wie folgt:

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_x\boldsymbol{e}_1 + v_y\boldsymbol{e}_2 + v_z\boldsymbol{e}_3\right) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_3 = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_3.$$

(Die Indizes t sind hier – wie meist üblich – zur Platzersparnis und aus Bequemlichkeit weggelassen worden.)

Wie zu erkennen, sind die skalaren Komponenten des Beschleunigungsvektors gleich den jeweiligen Bahnbeschleunigungen in Richtung der Koordinatenachsen.

Umgekehrt können durch Integration die entsprechenden Stammfunktionen gefunden werden.

Beispiel: Freier Fall mit Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ von einem Punkt mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}_0$ aus (senkrechter oder schräger Wurf).

Wenn die +Z-Achse (Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_3$) senkrecht nach oben gerichtet ist, gilt

$$\boldsymbol{a} = -g\,\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{v} = -\int g\,\boldsymbol{e}_3\,\mathrm{d}t = -g\,t\,\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{v}_0,$$

$$\boldsymbol{r} = \int\left(-g\,t\,\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{v}_0\right)\mathrm{d}t = -\frac{g}{2}t^2\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0.$$

Während die Geschwindigkeit gemäß der Definition der Bahntangente immer deren Richtung hat, kann die Beschleunigung beliebig gerichtet sein. Für eine nähere Untersuchung ist es zweckmäßig, die Beschleunigung in zwei Komponenten zu zerlegen, von denen die eine die Richtung der Bahntangente hat (»Tangentialbeschleunigung« $\boldsymbol{a}_t$) und die andere darauf senkrecht steht (»Normalbeschleunigung« $\boldsymbol{a}_n$).

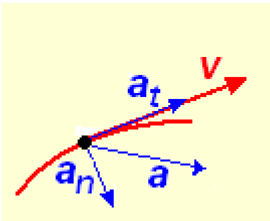

Abb. 4

Die Tangentialbeschleunigung verändert nur den Betrag der Geschwindigkeit (also die Bahngeschwindigkeit), die Normalbeschleunigung verändert nur die Richtung des Geschwindigkeitsvektors.

Für die Zerlegung des Vektors der Beschleunigung führen wir die »Bogenlänge« s ein, das ist die Länge des Weges, den der betrachtete Körper auf der Bahnkurve zurückgelegt hat. Die Bogenlänge zählt von einem beliebig gewählten Nullpunkt aus, der hier ohnehin keine Rolle spielt, da wir nur das Differential ds der Bogenlänge brauchen.

Außerdem führen wir den Tangenteneinheitsvektor $\boldsymbol{t}$ ein und machen einige Anleihen bei der Differentialgeometrie (Siehe dazu: Vektoranalysis I unter: »3 Anwendungen auf die Differentialgeometrie« auf dieser Website) Der Tangenteneinheitsvektor $\boldsymbol{t}$ ist der Vektor

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{v}}{v},$$

das heißt, er ist gleich dem Vektor $\boldsymbol{v}$ dividiert durch dessen Betrag v. Dieser Betrag aber ist gleich der Bahngeschwindigkeit, und diese wiederum ist die Ableitung des Weges, also der Bogenlänge, nach der Zeit. Folglich ist

$$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{t}.$$

Durch Differenzieren nach der Zeit ergibt sich daraus unter Beachtung der Produktregel

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{t} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{t} + v^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}.$$

Da der Betrag des Vektors $\boldsymbol{t}$ konstant (nämlich gleich 1) ist, steht der Ableitungsvektor d$\boldsymbol{t}$/ds – wenn er nicht gleich null ist – auf $\boldsymbol{t}$ senkrecht. (Dieser Satz gilt für jeden Vektor konstanter Länge. Beweis: Es sei

$$\boldsymbol{r}(u) = x(u)\boldsymbol{e}_1 + y(u)\boldsymbol{e}_2 + z(u)\boldsymbol{e}_3 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + z^2 = k.$$

Die Ableitung der Quadratsumme nach u ist dann

$$2\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\right)=0.$$

Nun ist aber der Term in der Klammer gleich dem Skalarprodukt von $\boldsymbol{r}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}u$. Wenn das Skalarprodukt zweier Vektoren null steht, stehen die Vektoren auf einander senkrecht (dies ist die so genannte Orthogonalitätsbedingung).

Der Differentialgeometrie entnehmen wir, dass der Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{t}/\mathrm{d}s$

• die Richtung des Normaleneinheitsvektors $\boldsymbol{n}$ und

• den Betrag $n = k = 1/\rho$ hat.

Dabei ist k die Krümmung der Kurve im betrachteten Punkt und ρ ihr Krümmungsradius. Der Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{n}$ ist auf den (momentanen) Krümmungsmittelpunkt (also »nach innen«) hin gerichtet. Folglich ist

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}=k\boldsymbol{n}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}.$$

Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{t}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}.$$

Der Vektor $\boldsymbol{a}$ liegt also in der durch $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{n}$ aufgespannten Ebene, der so genannten Schmiegungsebene der Kurve im betrachteten Punkt.

Der Betrag der Tangentialbeschleunigung ist – wie zu erwarten war:

$$a_t=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

der Betrag der Normalbeschleunigung ist

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}.$$

Diese beiden Gleichungen sind so zu interpretieren: Die Beschleunigung des Körpers erfolgt durch das Wirken einer Kraft. Die Richtung dieser Kraft bestimmt die Richtung der Beschleunigung. Die Tangentialkomponente der Beschleunigung verursacht eine Veränderung der Bahngeschwindigkeit, die Normalkomponente der Beschleunigung bewirkt eine Krümmung der Bahnkurve. Der Krümmungsradius der Kurve im betrachteten Punkt ergibt sich aus der Normalbeschleunigung und der Geschwindigkeit zu:

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}.$$

4 Rotationsbewegungen

Ein Körper von sehr kleinen Ausmaßen, den wir hier als Punkt P betrachten, bewege sich auf einer Kreisbahn. Wir legen die XY-Ebene in die Bahnebene und den Ursprung O des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Kreises.

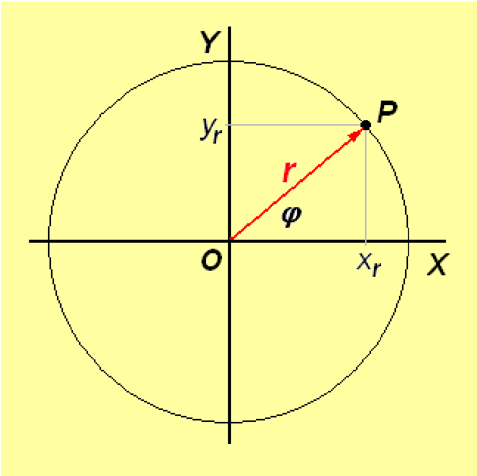

Abb. 5

Neben den oben angegebenen allgemeinen Bewegungsgleichungen gilt dann speziell:

$$\boldsymbol{r} = x_r \boldsymbol{e}_1 + y_r \boldsymbol{e}_2 = (r\cos\varphi)\boldsymbol{e}_1 + (r\sin\varphi)\boldsymbol{e}_2 .$$

Analog zur »Bahngeschwindigkeit« und zur »Bahnbeschleunigung« definieren wir die »Winkelgeschwindigkeit» ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

und die »Winkelbeschleunigung« α

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}.$$

Wenn für $t = 0$ auch $\varphi = 0$ und $\omega = 0$ ist, dann ist

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega\,\mathrm{d}t = \int_0^t \int_0^t \alpha\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t.$$

4.1 Gleichförmige Kreisbewegung

Eine Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit heißt gleichförmig. Dann ist

$$\varphi(t) = \varphi(t=0) + \omega t, \quad \text{und für} \quad \varphi(t=0) = 0: \quad \varphi(t) = \omega t.$$

Die Gleichung des Ortsvektors ist für $\varphi\,(t = 0) = 0$

$$\boldsymbol{r} = r\cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + r\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2 .$$

Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -r\omega\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + r\omega\cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2$$

und

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega\sqrt{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t} = r\omega.$$

Außerdem ist das Skalarprodukt

$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ und daher, wie zu erwarten, $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{r}$.

Für die Beschleunigung ergibt sich

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2 \cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 - r\omega^2 \sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2$$

und daraus

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \boldsymbol{r} \quad \text{und} \quad a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}.$$

Die Beschleunigung ist also auf O hin gerichtet (Zentripetalbeschleunigung), ihr Betrag ist konstant.

4.2 Gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung

Hier ist die Winkelbeschleunigung α konstant und folglich für $\omega(t = 0) = 0$:

$$\omega(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \alpha\, t.$$

Wenn dann auch noch $\varphi(t = 0) = 0$ ist, folgt für den Drehwinkel

$$\varphi(t) = \int_0^t \omega\, \mathrm{d}t = \int_0^t \alpha\, t\, \mathrm{d}t = \frac{\alpha}{2} t^2.$$

Dann folgt aus

$$\boldsymbol{r} = r\cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)\boldsymbol{e}_1 + r\sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = r\alpha\, t\left[-\sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)\boldsymbol{e}_1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)\boldsymbol{e}_2\right] = r\omega\left[-\sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)\boldsymbol{e}_1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)\boldsymbol{e}_2\right]$$

und

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = r\alpha\left[-\sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)\boldsymbol{e}_1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)\boldsymbol{e}_2\right] + r\alpha^2 t^2\left[-\cos\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)\boldsymbol{e}_1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}t^2\right)\boldsymbol{e}_2\right]$$

oder

$$\boldsymbol{a} = \left(-r\alpha\sin\varphi - r\omega^2\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(r\alpha\cos\varphi - r\omega^2\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_2.$$

Daraus ersieht man (indem man $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi/2$ setzt), dass die (nach innen gerichtete) Normalkomponente der Beschleunigung (hier auch Radialkomponente genannt) den Betrag

$$a_n = r\,\omega^2$$

und ihre Tangentialkomponente den Betrag

$$a_t = r\,\alpha$$

hat.

4.3 Exkurs: Die Winkelgeschwindigkeit als Vektor

Manchmal ist es nützlich, die Winkelgeschwindigkeit als gerichtete Größe aufzufassen und durch einen Vektor darzustellen, der in der Drehachse liegt und dessen Betrag gleich der Winkelgeschwindigkeit ω ist. Dazu führt man z. B. einen Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$ von der Richtung der Drehachse ein und bezeichnet dann die Größe $\omega\boldsymbol{e}$ als den »Vektor $\boldsymbol{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit«. Dies ist – wie gesagt – manchmal recht nützlich; aber das darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass die Winkelgeschwindigkeit *kein* Vektor ist. Ihr fehlt nämlich die wesentliche und unabdingbare Eigenschaft eines Vektors: sie kann nicht vektoriell addiert werden. Das heißt: Wenn ein Körper (z. B. die Erde) gleichzeitig zwei Rotationen mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 um zwei verschiedene Drehachsen ausführt (im Beispiel: um die eigene Achse und um eine Achse, die durch die Sonne geht und auf der Ekliptik senkrecht steht), dann kann die resultierende Drehbewegung nicht durch die Vektorsumme der beiden Winkelgeschwindigkeiten beschrieben werden. Nur wenn es um Berechnungen im Zusammenhang mit einer einzigen Drehbewegung oder um die Ermittlung der *Geschwindigkeit* eines Körpers geht, der gleichzeitig zwei Drehbewegungen ausführt (wobei dann die beiden Teilgeschwindigkeiten einzeln ermittelt werden müssen), ist die Einführung eines »Drehvektors« sinnvoll und nützlich.

5 Bewegungsgleichungen in einem Polarkoordinatensystem

5.1 Ortsbeschreibung in ebenen Polarkoordinaten

Der Ort eines Punktes in einer Ebene kann unter anderem beschrieben werden

- durch seine kartesischen Koordinaten x, y und
- durch seine Polarkoordinaten r,

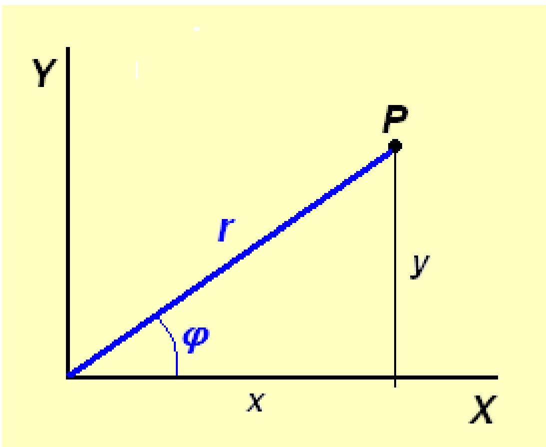

Abb. 6

Dabei gelten folgende Transformationsgleichungen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad \text{(A)}$$

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \qquad \text{(B)}$$

5.2 Die Geschwindigkeit in ebenen Polarkoordinaten

Ein Punkt bewege sich in der Zeit Δt von P_1 nach P_2

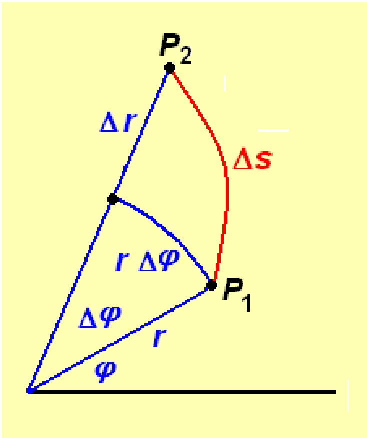

Abb. 7

Wir zerlegen nun die Verschiebung Δs = P_1P_2 in eine radiale und in eine dazu senkrechte »transversale« Komponente

$$\Delta s_r = \Delta r, \qquad \Delta s_\varphi = r\Delta\varphi.$$

Analog zur Definition der mittleren Bahngeschwindigkeit definieren wir nun die mittlere Radialgeschwindigkeit im Zeitintervall Δt

$$\bar{v}_r = \frac{\Delta s_r}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t},$$

und die mittlere Transversalgeschwindigkeit im Zeitintervall Δt

$$\bar{v}_\varphi = \frac{\Delta s_\varphi}{\Delta t} = r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Daraus ergeben sich die Definitionen für die (momentane) Radial- und Transversalgeschwindigkeit im Punkt P_1:

$$v_r = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}, \qquad v_\varphi = \lim_{\Delta t\to 0} r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = r\dot{\varphi}.$$

Die Berechnung der Geschwindigkeiten aus diesen Gleichungen ist natürlich nur möglich, wenn die Funktion $r = r(\varphi)$ – das ist die Gleichung der Bahnkurve – und $\varphi = \varphi(t)$ oder $r = r(t)$ – das ist die Beschreibung des zeitlichen Ablaufs der Bewegung – gegeben sind.

Den Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten in kartesischen Koordinaten einerseits und in Polarkoordinaten andererseits findet man entweder graphisch oder durch Rechnung wie folgt durch Differenzieren der Gleichungen (B):

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Mit

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_r \quad \text{und} \quad r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = v_\varphi$$

folgt daraus

$$v_x = v_r \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi, \qquad v_y = v_r \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi$$

und andererseits

$$v_r = v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi, \qquad v_\varphi = -v_x \sin\varphi + v_y \cos\varphi.$$

Dieselben Ergebnisse gewinnt man mit Hilfe der grau gezeichneten Hilfslinien auch aus der folgenden Abbildung:

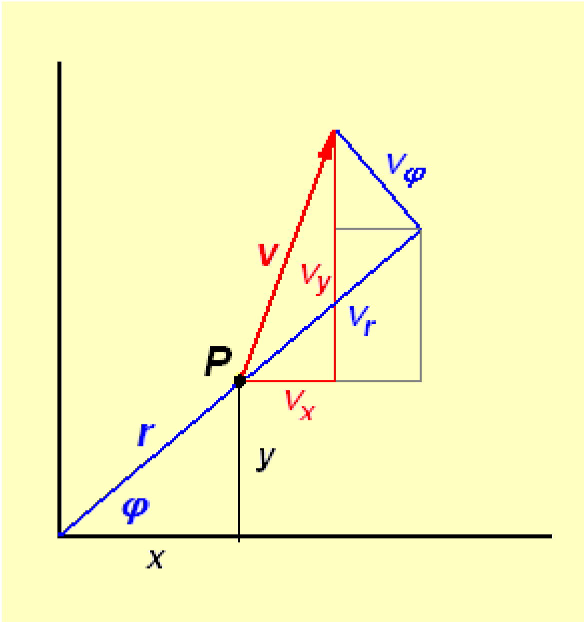

Abb. 8

5.3 Die Beschleunigung in Polarkoordinaten

Die Verwendung eines Polarkoordinatensystems und die Zerlegung der betrachteten Größen (Geschwindigkeit, Beschleunigung) in radiale und transversale Komponenten hat zur Folge, dass diese Komponenten keine feste Richtung bezüglich des Koordinatensystems (hier speziell bezüglich der Polarachse) haben, sondern sich bei Bewegung des Punktes P in der Ebene drehen. Man kann dies auch so ausdrücken: das der Komponentenzerlegung zugrunde liegende Koordinatensystem für einen im kartesischen Koordinatensystem ruhenden Beobachter rotiert. Damit hängt es zusammen, dass man die radiale und transversale Beschleunigung nicht einfach durch die Ableitung der radialen bzw. transversalen Geschwindigkeit nach der Zeit finden kann. Wir müssen vielmehr so vorgehen: Ersetzt man in obiger Abbildung 8 den Vektor $\boldsymbol{v}$ durch den Vektor $\boldsymbol{a}$ der Beschleunigung, so braucht man nur alle Buchstaben v durch a zu ersetzen und findet dann

$$a_x = a_r \cos\varphi - a_\varphi \sin\varphi, \qquad a_y = a_r \sin\varphi + a_\varphi \cos\varphi \qquad \text{(C)}$$

Differenziert man ferner die Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\varphi - r\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\varphi + r\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

nochmals nach der Zeit, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\cos\varphi - \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - r\cos\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 - r\sin\varphi\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\sin\varphi + \frac{r}{\mathrm{d}t}\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} - r\sin\varphi\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r\cos\varphi\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$$

oder

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\cos\varphi - \left[2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\sin\varphi \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\sin\varphi + \left[2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\cos\varphi. \end{aligned}$$

Ein Vergleich dieser beiden Gleichungen mit den Gleichungen (C) – ein so genannter Koeffizientenvergleich – ergibt

$$a_r = \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2, \qquad a_\varphi = 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}.$$

6 Beispiele

1. Die gleichförmige Kreisbewegung (Mittelpunkt M, Radius R, Winkelgeschwindigkeit ω)

Hier gilt mit $\boldsymbol{r}_M$ = Ortsvektor von M:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_M + R\cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + R\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -R\,\omega\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 + R\,\omega\cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2 \quad \Rightarrow \quad v = R\,\omega, \\ \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -R\,\omega^2\cos(\omega t)\,\boldsymbol{e}_1 - R\,\omega^2\sin(\omega t)\,\boldsymbol{e}_2 \quad \Rightarrow \quad a = R\,\omega^2 = \frac{v^2}{R}. \end{aligned}$$

2. Die Planetenbewegung

Johannes Kepler (1571-1630) hatte aus den langjährigen sorgfältigen Planetenbeobachtungen Tycho Brahes (1546-1601) die drei nach ihm benannten Gesetze der Planetenbewegung abgeleitet. Diese lauten:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Der von diesem Brennpunkt aus auf einen Planeten gerichtete Ortsvektor (»Radiusvektor«) überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (»Flächensatz«).

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten verhalten sich wie die 3. Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnen.

Isaac Newton (1643-1727) benutzte bei der Aufstellung seines Gravitationsgesetzes (1666) die Keplerschen Gesetze und zeigte 1687, wie diese umgekehrt mit Hilfe der Differentialrechnung (damals »Fluxionsrechnung«) aus seinem Gravitationsgesetz abgeleitet werden können.

Hier soll als Anwendungsbeispiel gezeigt werden, wie sich das quadratische Abstandsgesetz der Gravitation aus dem ersten und zweiten Keplerschen Gesetz herleiten lässt.

Dazu machen wir zunächst eine Anleihe bei der Analytischen Geometrie: Legt man den Pol eines Polarkoordinatensystems in den linken Brennpunkt der Ellipse und richtet die Polarachse zum rechten Brennpunkt hin, dann lautet die Polargleichung der Ellipse:

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \qquad \text{(D)}$$

wobei p und e zwei hier uninteressante Ellipsenparameter sind.

So anschaulich und einleuchtend das 2. Keplersche Gesetz formuliert ist, so ist es doch in dieser Form mathematisch nicht auszudrücken. Eine »moderne« und umsetzbare, dabei gleichwertige Form lautet:

Die vom Ortsvektor des Planeten überstrichene Fläche ΔA ist der Zeit Δt proportional:

$$\Delta A = k\,\Delta t.$$

Für hinreichend kleine Werte $\Delta\varphi$ ist:

$$\Delta A \approx \tfrac{1}{2} r^2\,\Delta\varphi.$$

Nach dem 2. Keplerschen Gesetz ist also

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = k \approx \tfrac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Für Δt gegen null folgt daraus:

$$r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = C. \qquad \text{(E)}$$

Dies ist die mathematische Form des 2. Keplerschen Gesetzes. Durch Differenzieren folgt daraus:

$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Der Term auf der linken Seite der zweiten Gleichung ist aber (siehe oben) nichts anderes als der Betrag a_φ der transversalen Komponente der Beschleunigung.

Also: Bei der Planetenbewegung ist die Transversalbeschleunigung null; es gibt offenbar nur eine Radialbeschleunigung. Für die (skalare) Radialkomponente der Beschleunigung gilt (siehe wiederum oben):

$$a_r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Die Radialbeschleunigung der Planetenbewegung muss nun aus den Gleichungen (D) und (E) berechnet werden. Da in (D) r als Funktion von φ und nicht von t auftritt, werden wir mit Hilfe der Gleichung (E) die Ableitung nach t durch eine solche nach φ ausdrücken:

Aus

$$r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = C \quad \Rightarrow \quad r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = C,$$

und daraus

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \quad \text{und} \quad \mathrm{d}t = \frac{r^2}{C}\mathrm{d}\varphi \qquad \text{(F) und (G)}$$

Nochmaliges Differenzieren der Gleichung (F) ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2C}{r^3}\frac{r}{\mathrm{d}t} + \frac{C}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)$$

und zusammen mit den Gleichungen (F) und (G):

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2C}{r^3}\frac{C}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \frac{C}{r^2}\frac{C}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right) = \frac{C^2}{r^4}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\varphi^2} - \frac{2C^2}{r^5}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2.$$

Dem Flächensatz entnehmen wir, dass

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4}.$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$a_r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{C^2}{r^3}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\varphi^2} - \frac{2}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 - 1\right].$$

Durch Differenzieren der Ellipsengleichung nach φ findet man $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}^2\mathrm{r}/d\varphi^2$ und nach einer etwas mühsamen Rechnung schließlich:

$$a_r = \frac{C^2}{pr^3}(-re\cos\varphi - p),$$

wobei der Term in der Klammer gemäß Gleichung (D) den Wert $-r$ hat. Damit ergibt sich schließlich für die skalare Radialkomponente der Beschleunigung:

$$a_r = -\frac{C^2}{p}\frac{1}{r^2}.$$

Die Radialbeschleunigung ist also dem Ortsvektor entgegengesetzt, also auf die Sonne hin gerichtet und dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional.

Der Faktor C^2/p hängt von den Parametern der Bahn des jeweiligen Planeten ab. Es ist zu erwarten, dass er bei jedem Planeten einen anderen Wert hat. Hier greifen wir nun auf das 3. Keplersche Gesetz zurück, das wir bisher noch nicht benutzt haben. Seine ursprüngliche

Formulierung („Die Quadrate der Umlaufszeiten T verhalten sich wie die 3. Potenzen der großen Halbachsen a“) lässt sich mathematisch als fortlaufende Proportion ausdrücken:

$$T_1^2 : T_2^2 : T_3^2 : \ldots = a_1^3 : a_2^3 : a_3^3 : \ldots$$

Stattdessen kann man auch schreiben:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{a_i^3}{T_i^2} = \text{ konst.} = K,$$

wobei K für alle Planeten des Systems denselben Wert hat, also eine für das ganze Sonnensystem gültige Konstante ist.

Wir beeinträchtigen die Allgemeingültigkeit des Ergebnisses nicht, vereinfachen aber die Rechnung beträchtlich, wenn wir nun einen Planeten betrachten, der sich auf einer Kreisbahn bewegt (selbst wenn dieser hypothetisch ist). Dann würde auch für ihn das obige Gesetz gelten und die große Halbachse a seiner Bahn wäre durch den Bahnradius R zu ersetzen.

Dann lautet das 3. Keplersche Gesetz für diesen Planeten:

$$\frac{R^3}{T^2} = K.$$

Mit $T = (2\pi R)/v$ erhalten wir daraus $R\, v^2 = K$. Bei einer Kreisbewegung ist ferner $v^2 = a_r\, R$, womit sich schließlich ergibt

$$a_r = \frac{K}{r^2}.$$

Das bedeutet verallgemeinert, dass die Radialbeschleunigung umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung von der Sonne ist. Später wird sich zeigen, dass die Konstante K nur von der Gravitationskonstanten und der Sonnenmasse abhängt.