Das »Zwillingsparadoxon«

Einmal genau betrachtet

Siegfried Petry

14. Juni 2016

Das »Zwillingsparadoxon« – einmal genau betrachtet

Bei der mathematischen Behandlung des so genannten Zwillingsparadoxons – das in Wirklichkeit keines ist – werden im Allgemeinen die Beschleunigungs- und Bremsphasen zu Beginn, bei der Umkehr und am Ende der Reise vernachlässigt. Dabei sind – wie sich zeigen wird – gerade sie die Ursachen des gesamten Phänomens. Und nur dadurch, dass sie berücksichtigt und genauer untersucht werden, lässt sich der Vorgang befriedigend erklären und das Paradoxon auflösen.

1 Allgemeine Überlegungen

Gegeben seien zwei zunächst relativ zueinander ruhende Bezugssysteme S und S', welche hier durch eine X-Achse bzw. eine X'-Achse repräsentiert werden. Die beiden Achsen liegen aufeinander, ihre Ursprünge (Nullpunkte) O und O' koinzidieren und die Uhren in beiden Systemen sind synchronisiert. In jedem der beiden Systeme befinde sich einer der beiden Zwillinge. Dann wird S' beschleunigt und der darin befindliche Bruder geht auf die Reise. Nach seiner Rückkehr ist in seinem System weniger Zeit vergangen als im System S, und er ist weniger gealtert als sein daheim gebliebener Bruder. Das Ausmaß dieser „Zeitdilatation“ hängt von der Reisegeschwindigkeit und von der Dauer der Reise ab. Der Effekt unterscheidet sich grundsätzlich von den bekannten „relativistischen“ Effekten (Relativität der Länge, der Dauer, der Gleichzeitigkeit und der Masse), welche sämtlich „relativ“ sind, nämlich symmetrisch: Jeder Beobachter nimmt im anderen System die gleichen Effekte wahr. Dagegen ist am Ende der Reise des Bruders in seinem System S' „absolut“ weniger Zeit vergangen und er ist tatsächlich weniger gealtert. Als Ursachen dafür kommt nur das Einzige in Frage, was die beiden Systeme unterscheidet, nämlich die Beschleunigung, die S' erfahren hat. Diese Beschleunigung hat die Uhren und allgemein den Ablauf der Zeit in S' verlangsamt. Beim Abbremsen am Ende der Hinreise (negative Beschleunigung) wird der Effekt rückgängig gemacht: Die Uhren laufen wieder mit der ursprünglichen Geschwindigkeit, aber sie laufen negativ zeitversetzt.

Betrachten wir nun den Vorgang im Detail. Dabei genügt es, die Hinreise bis zur Umkehr zu verfolgen; die Rückreise kann als deren Spiegelbild angesehen werden.

Von der Zeit $t = 0$ bis zur Zeit $t = t_1$ (Phase 1) erfahre das System S' eine konstante Beschleunigung vom Größenwert a auf die Geschwindigkeit v_1. Von t_1 bis t_2 (Phase 2) sei die Geschwindigkeit von S' konstant gleich v_1; von t_2 an (Phase 3) erfahre S' eine negative Beschleunigung vom Größenwert $-a$ bis es zur Zeit t_3 relativ zu S wieder in Ruhe ist. In diesem Moment gehen die Uhren in beiden Systemen wieder gleich schnell, und ein Uhrenvergleich würde zeigen, dass in S' weniger Zeit vergangen ist als in S.

Abbildung 1 zeigt die Hinreise im vierdimensionalen Minkowski-Raum. (hier auf zwei Dimensionen reduziert). Die rote Kurve ist die »Weltlinie« des Punktes O'. Die momentane W'-Achse des Systems S' ist die Tangente im jeweils betrachteten Punkt der Weltlinie. Die W-Achse ist zugleich die Weltlinie des Punktes O.

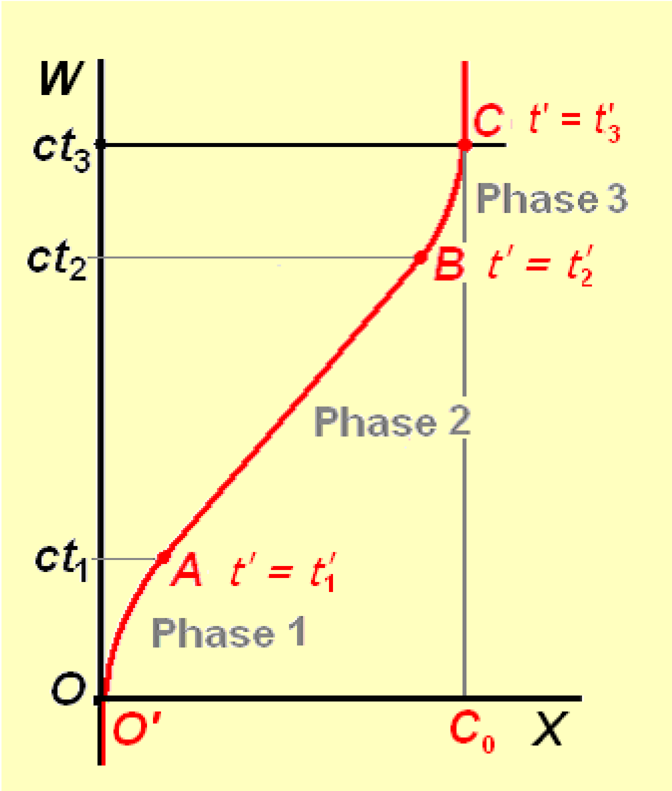

Abb. 1: Weltlinie von O'

Betrachten wir ein kleines Stück der Weltlinie des Punktes O'. Für die Länge der Sekante zwischen zwei Kurvenpunkten gilt wegen der pseudoeuklidischen Metrik

$$(\Delta w')^2 = (\Delta w)^2 - (\Delta x)^2,$$

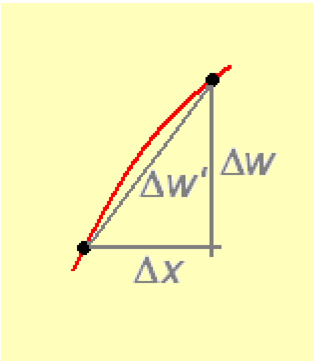

Abb. 2: Sekante der Weltlinie

und für ihr Differential

$$(\mathrm{d}w')^2 = (\mathrm{d}w)^2 - (\mathrm{d}x)^2,$$

woraus mit $w' = c\,t'$ und $w = c\,t$ folgt

$$c^2(\mathrm{d}t')^2 = c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2$$

und schließlich

$$\mathrm{d}t' = \sqrt{(\mathrm{d}t)^2 - \frac{(\mathrm{d}x)^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\,\mathrm{d}t. \qquad \textbf{(1)}$$

Für die Dauer der einzelnen Phasen im System *S'* ergibt sich daraus:

Phase 1 (*O-A*):

O' befindet sich zu den Zeiten t_1 bzw. t'_1 in *A*. Für diese gilt:

$$t'_1 = \int_0^{t_1} \mathrm{d}t' = \int_0^{t_1} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_1} \sqrt{1 - \frac{a^2 t^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$t'_1 = \frac{t_1}{2}\sqrt{1 - \frac{a^2 t_1^2}{c^2}} + \frac{c}{2a}\arcsin\frac{a t_1}{c} \quad \text{und mit } a t_1 = v_1 \text{ und } a = \frac{v_1}{t_1}$$

$$t'_1 = \frac{t_1}{2}\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{c}{2v_1} t_1 \arcsin\frac{v_1}{c} = \frac{t_1}{2}\left(\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{c}{v_1}\arcsin\frac{v_1}{c}\right).$$

Plausibilitätsprüfung:

Da Missverständnisse ausgeschlossen sind, werden im Folgenden die Indices 1 weggelassen.

1. Für $v \longrightarrow 0$ ist arcsin *v/c* $\approx$ *v/c* = (*at*)/*c*. Daraus folgt $t' \rightarrow \frac{t}{2} + \frac{c}{2a}\frac{a}{c}t = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t.$

2. Für $v \longrightarrow c$ geht $t' \rightarrow \frac{c}{2a}\arcsin 1 = \frac{ct}{2v}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}t.$

3. Wir vergleichen nun die Ganggeschwindigkeiten der Uhren in *S'* und *S* zur Zeit t_1. Aus Gleichung (1) folgt für $v = v_1$

$$\mathrm{d}t' = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{1 - \beta^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \textbf{(2)}$$

wobei $\beta = v_1/c$ ist.

Phase 2 (*A-B*):

O' befindet sich zu den Zeiten t_2 bzw. t'_2 in *B*.

Da die Strecke *AB* geradlinig ist, können die Differentiale in Gleichung (2) durch die entsprechenden Differenzen ersetzt werden. Es gilt daher

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - \beta^2}.$$

Für t'_2 ergibt sich daraus

$$t'_2 = \left(t_2 - \frac{t_1}{2}\right)\sqrt{1 - \beta^2} + \frac{t_1}{2\beta}\arcsin\beta.$$

Phase 3:

Wegen der Symmetrie der Phasen 1 und 3 ist

$$t'_3 - t'_2 = t'_1 = \frac{t_1}{2}\left(\sqrt{1-\beta^2} + \frac{1}{\beta}\arcsin\beta\right).$$

Aus

$$t'_3 = t'_1 + t'_2$$

folgt

$$\begin{aligned} t'_3 &= \frac{t_1}{2}\left(\sqrt{1-\beta^2} + \frac{1}{\beta}\arcsin\beta\right) + \left(t_2 - \frac{t_1}{2}\right)\sqrt{1-\beta^2} + \frac{t_1}{2\beta}\arcsin\beta \\ t'_3 &= t_2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{t_1}{\beta}\arcsin\beta. \end{aligned} \qquad \textbf{(3)}$$

Am Ende der Phase 3 ruht das System *S'* relativ zum System *S* und die *X'*-Achse fällt wieder mit der *X*-Achse zusammen. Es ist ein direkter Uhrenvergleich möglich und das Ergebnis ist für die Beobachter in beiden Systemen dasselbe.

Diskussion der Ergebnisse:

1. Für $v_1 << c$ ist $\beta \approx 0$, $\arcsin\beta \approx \beta$ und $\sqrt{1-\beta^2} \approx 1$,
und daher $t'_3 \approx t_2 + t_1 = t_3$. Der Unterschied im Gang der Uhren ist verschwindend klein.

2. Auch für mittlere Werte von v_1 können die Beschleunigungsphasen 1 und 3 gegenüber der Phase 2 vernachlässigt werden, wenn $t_2 >> t_1$ ist. Dies ist genau das, was bei der üblichen Behandlung des so genannten Zwillingsparadoxons geschieht, wenn die tatsächliche Weltlinie des reisenden Bruders durch eine geknickte Gerade ersetzt wird. Dieses Vorgehen wird also durch das Ergebnis der exakten Rechnung als brauchbare Näherung gerechtfertigt.

Übrigens stellen die Phasen 1 und 2 zusammen eine vollständigere (und daher auch exaktere) Beschreibung des (hier als bekannt vorausgesetzten) Phänomens der »Langlebigkeit« der Myonen der sekundären Ultrastrahlung dar als die allgemein übliche. Während ihrer Entstehung werden die Myonen auf nahezu Lichtgeschwindigkeit beschleunigt. Dann gehen die Uhren im System der Myonen erheblich langsamer als die Uhren auf der Erde.

Zahlenbeispiel:

Für die Abb. 3 wurde angenommen α = arctan (v/c) = 40°, woraus folgt $v/c \approx 0{,}84$.[1] Daraus ergeben sich dann die Dauer der einzelnen Phasen im System S':

Phase 1: $t'_1 = 0{,}86\ t_1$,

Phase 2: $t'_2 - t'_1 = 0{,}54\ (t_2 - t_1)$,

Phase 3: $t'_3 - t'_2 = t'_1 = 0{,}86\ t_1$

Durch Addition der drei Gleichungen ergibt sich

$$t'_3 = 0{,}54\ t_2 + 1{,}18\ t_1$$

[1] Hinsichtlich tan $\alpha = v/c$ siehe: Spezielle Relativitätstheorie, 2. Teil, S. 13 auf dieser Website.

und daraus

$$\frac{t'_3}{t_3} = \frac{0,54\,t_2 + 1,18\,t_1}{t_2 + t_1} = \frac{0,54\frac{t_2}{t_1} + 1,18}{\frac{t_2}{t_1} + 1} = \frac{0,54 + 1,18\frac{t_1}{t_2}}{1 + \frac{t_1}{t_2}}.$$

Für $t_2 = t_1$ (d. h. zwischen Beschleunigung und Bremsen keine Reise mit konstanter Geschwindigkeit) folgt daraus für den Quotienten $Q = 0,86$; für $t_2 >> t_1$ wird $Q = 0,54$.

3 Der Vorgang aus der Sicht eines Beobachters in *S'*

Zunächst ist hervorzuheben, dass es nicht zulässig – weil falsch – wäre, das System *S'* als ruhend und das System *S* als in entgegengesetzter Richtung beschleunigt zu betrachten. Denn die Beschleunigung ist eine „absolute" Größe, das heißt, sie ist im System *S'* beobachtbar und messbar, und ein Beobachter in *S'* wäre in der Lage, die Weltlinie des Ursprungs *O'* seines Systems aufzuzeichnen. Insofern ist der Vorgang in der Abbildung 1 objektiv richtig und für beide Systeme verbindlich dargestellt. So ist es auch objektiv richtig, dass ein Uhrenvergleich am Ende der Phase 3 für beide Beobachter zum selben Ergebnis führt: Im System *S'* ist weniger Zeit vergangen als in *S*. Es bleibt also nur die Aufgabe, zu beschreiben, wie sich der Vorgang für einen Beobachter in *S'* darstellt, und wie sich für ihn eine Uhr verhält, die sich im System *S* im Ursprung *O* befindet. Dazu betrachten wir diese Uhr am Ende der einzelnen Phasen. Ihre jeweilige Lage und der dazu gehörige *ct*-Wert sind durch einen Asterix (*) markiert. Die Lage der *X'*-Achse zu diesen Zeitpunkten ist in der Abbildung 3 rot dargestellt, die der *X*-Achse grau.

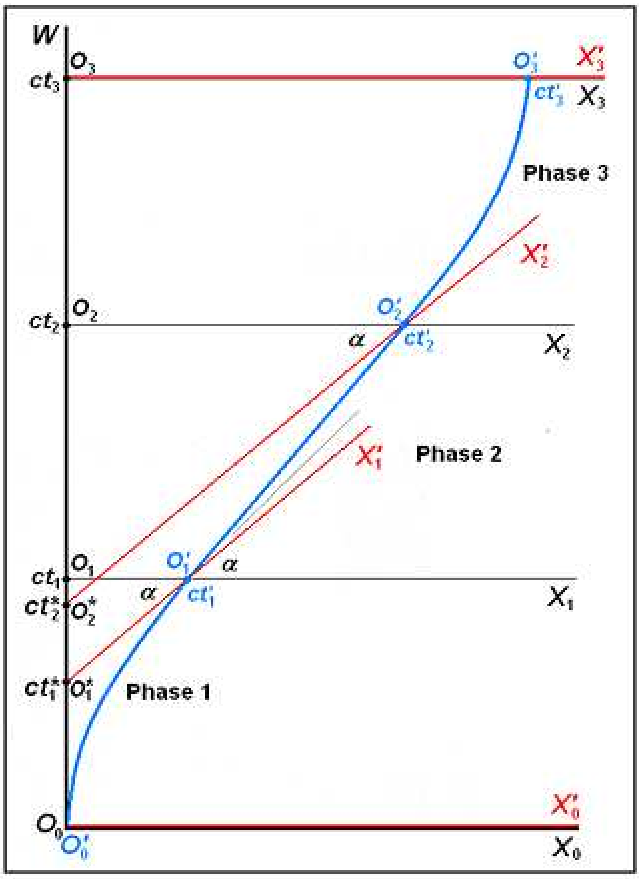

Abb. 3

Anmerkung: Es ist $ct^*_3 = ct_3$.

Abbildung 4 zeigt einen Ausschnitt aus Abbildung 3. Für den Steigungswinkel α der X'-Achse gilt wieder

$$\tan\alpha = \frac{v_1}{c} = \beta$$

(Siehe dazu „Spezielle Relativitätstheorie", 2. Teil, S. 13 auf dieser Website)

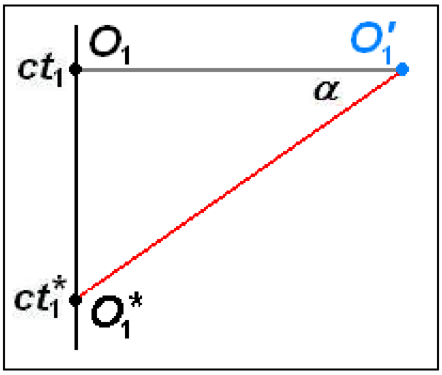

Abb. 4

Die Verschiebung von O' auf der X-Achse in der Zeit t_1 ist

$$\overline{O_1 O_1'} = \frac{a}{2} t_1^2 = \frac{v_1}{2} t_1,$$

und daher

$$c t_1 - c t_1^* = c(t_1 - t_1^*) = \frac{v_1}{2} t_1 \tan\alpha = t_1 \frac{v_1}{2} \frac{v_1}{c}, \qquad \tan\alpha = \frac{v_1}{c} = \beta$$

$$t_1^* = t_1 \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right).$$

Mit den oben angenommenen Werten ist

$$t_1^* = t_1 (1 - \tfrac{1}{2} 0{,}84^2) = 0{,}65 t_1.$$

Aus der Sicht des Beobachters in S' ist also die Phase 1 in S kürzer als für einen Beobachter in S. Für ihn scheinen also die Uhren in S langsamer zu gehen als die eigenen. Das beruht, wie man aus Abbildung 3 erkennen kann, auf der Drehung der X'-Achse. Allerdings gehen für ihn die Uhren in S in einem anderen Verhältnis langsamer als es die Uhren in S' für einen Beobachter in S tun. Das zeigt am einfachsten ein Zahlenbeispiel mit den oben angenommenen Werten:

Es ist für einen Beobachter in S (siehe Seite 4, Phase 1): $t'_1 = 0{,}86\ t_1$

Dagegen ist für einen Beobachter in S' (siehe oben): $t^*_1 = 0{,}65\ t_1$,

woraus mit $t_1 = t'_1/0{,}86$ folgt $t^*_1 = 0{,}76\ t'_1$.

Für einen Beobachter in S geht die Uhr in S' im Vergleich zu seiner eigenen Uhr zeitversetzt (Faktor 0,86); für einen Beobachter in S' geht die Uhr in S gegenüber seiner eigenen Uhr ebenfalls zeitversetzt (Faktor 0,76). Für jeden Beobachter geht also die Uhr im anderen System langsamer als seine eigene, jedoch in unterschiedlichem Maß. Der Effekt ist also nicht mehr symmetrisch. Wie zu erwarten sind die beiden Systeme wegen der Beschleunigung des einen von ihnen nicht mehr gleichberechtigt.

Analog ergibt sich aus Abbildung 5:

$$\overline{O_2O'_2} = \overline{O_1O'_1} + v_1\left(t_2 - t_1\right) = \frac{v_1}{2}t_1 + v_1\left(t_2 - t_1\right) = v_1\left(t_2 - \tfrac{1}{2}t_1\right),$$

$$c(t_2 - t_2^*) = v_1\left(t_2 - \tfrac{1}{2}t_1\right)\tan\alpha = \frac{v_1^2}{c}\left(t_2 - \tfrac{1}{2}t_1\right),$$

$$t_2^* = t_2\left(1-\beta^2\right) + \frac{t_1}{2}\beta^2,$$

$$t_2^* - t_1^* = t_2\left(1-\beta^2\right) - t_1\left(1-\beta^2\right) = (t_2 - t_1)\left(1-\beta^2\right) = (t'_2 - t'_1)\sqrt{1-\beta^2}.$$

In Phase 2, in der sich *S'* mit konstanter Geschwindigkeit v_1 bewegt, tritt also der bekannte *symmetrische* Effekt der relativistischen Zeitdilatation auf. Für jeden Beobachter gehen die Uhren des anderen Systems in gleichem Maß langsamer als die des eigenen. Dazu kommt, dass die Uhren in unterschiedlichem Maß zeitversetzt laufen. Diese aus Phase 1 stammende Zeitversetzung wird in die Phasen 2 und 3 übernommen.

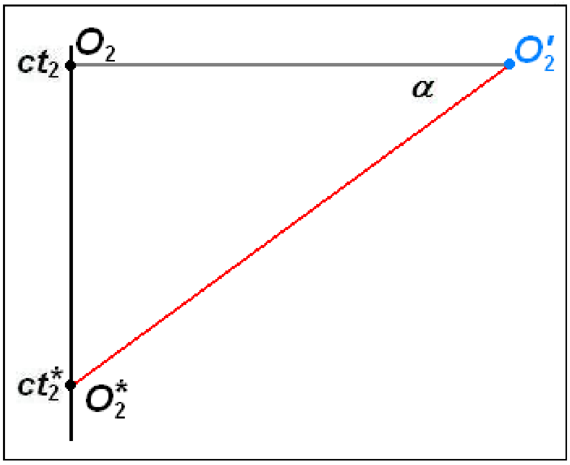

Abb. 5

In Phase 3 vergeht in *S'* die Zeit $t'_3 - t'_2 = t'_1$, während in *S* – immer aus der Sicht eines Beobachters in *S'* – die sehr viel größere Zeitspanne $t_3 - t^*_2$ vergeht. Diese beträgt

$$\begin{aligned} t_3 - t_2^* &= t_3 - t_2\left(1-\beta^2\right) - t_1\frac{\beta^2}{2} \\ &= \underbrace{t_3 - t_2}_{t_1} + t_2\beta^2 - t_1\frac{\beta^2}{2} \\ &= t_1\left(1-\frac{\beta^2}{2}\right) + t_2\beta^2. \end{aligned}$$

Dafür kann man auch schreiben

$$t_3 - t_2^* = (t_2 - t_1)\beta^2 + t_1\left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right),$$

wodurch der Einfluss der Dauer ($t_2 - t_1$) der Phase 2 deutlich wird. – Dagegen ist (siehe Seite 4)

$$t'_3 - t'_2 = t'_1 = \frac{1}{2}t_1\left(\sqrt{1-\beta^2} + \frac{1}{\beta}\arcsin\beta\right).$$

Beispiel:

Setzt man wieder $v_1/c = 0{,}84$, erhält man

$$t_3 - t_2^* = 0{,}71(t_2 - t_1) + 1{,}35t_1 = 0{,}71t_2 + 0{,}64t_1$$

und $$t'_3 - t'_2 = 0{,}86t_1.$$

Der erste Wert ist (selbst im ungünstigsten Fall, wenn $t_2 = t_1$ ist) beträchtlich größer als der zweite, sodass die Zeitversetzung in der 1. und 2. Phase in der 3. Phase erheblich überkompensiert wird.

Nun wird der Grund dafür deutlich, dass auch für den Beobachter in S' $t'_3 < t_3$ ist: Das Zurückdrehen der *X'*-Achse in Phase 3 erfolgt in größerer Entfernung von der *W*-Achse als das (Hin-)Drehen während Phase 1. Die *X'*-Achse überstreicht dabei in Phase 3 eine der Entfernung von der *W*-Achse proportionale Strecke dieser Achse. Anders gesagt: Die Ursache für das Nachgehen der Uhren in *S'* nach der Rückkehr des Zwillings beruht darauf, dass die Bremsphase 3 (und die darauf folgende Beschleunigungsphase beim Rückflug) sich in größerer Entfernung vom Startpunkt abspielen als die erste Beschleunigung (Phase 1) und die Bremsphase vor Ende der Reise.

Wie man sieht, verläuft der Vorgang für einen Beobachter in *S'* völlig anders als für einen Beobachter in *S*. Der Unterschied erklärt sich aus der pseudoeuklidischen Metrik des Minkowski-Raumes und daraus, dass *S'* darin beschleunigt wurde.

4 Konsequenzen für die Grundlegung der Speziellen Relativitätstheorie

In seiner grundlegenden Arbeit zur Speziellen Relativitätstheorie »Zur Elektrodynamik bewegter Körper« führt Einstein zwei zunächst relativ zueinander ruhende Bezugssystem ein und beschreibt detailliert, wie die Uhren in den Systemen synchronisiert werden. In § 3, Abs. 2 der genannten Abhandlung (S. 897) schreibt er dann: „Es werde nun dem Anfangspunkte des einen der beiden Systeme (*k*) eine (konstante) Geschwindigkeit *v* in Richtung der wachsenden *x* des anderen, ruhenden Systems (*K*) erteilt ...“ Für das Weitere setzt Einstein als selbstverständlich voraus, dass trotz der Beschleunigung, die das System *k* erfahren hat, die Uhren in den Ursprüngen *O* und *O'* der beiden Systeme noch immer synchron gehen. Wie oben in den Kapiteln 2 und 3 gezeigt wurde, ist dies jedoch nicht der Fall. Damit ist eine wesentliche Voraussetzung für die Herleitung der Transformationsgleichungen (Lorentz-Transformationen) nicht mehr erfüllt. Es wäre allerdings voreilig, daraus zu schließen, die gesamte Theorie wäre falsch. Man muss nur, um die Gleichberechtigung der beiden Systeme zu bewahren, anders als von Einstein beschrieben vorgehen,. Dazu wird folgendes Vorgehen vorgeschlagen:

Die beiden Systeme *S'* und *S''* werden bezüglich eines dritten Systems *S* in entgegengesetzten Richtungen auf die Geschwindigkeit *u* bzw. – *u* beschleunigt. Am Ende der Beschleunigung wird der Schnittpunkt der *X'*-Achse mit der *X''*-Achse als neuer Ursprung *O'* bzw. *O''* definiert und es werden neue *W''/W'*–Achsen eingeführt. Wegen der Symmetrie gehen die Uhren in diesen Punkten synchron. Ebenso gehen die Uhren in *S'* und *S''* jeweils untereinander synchron.

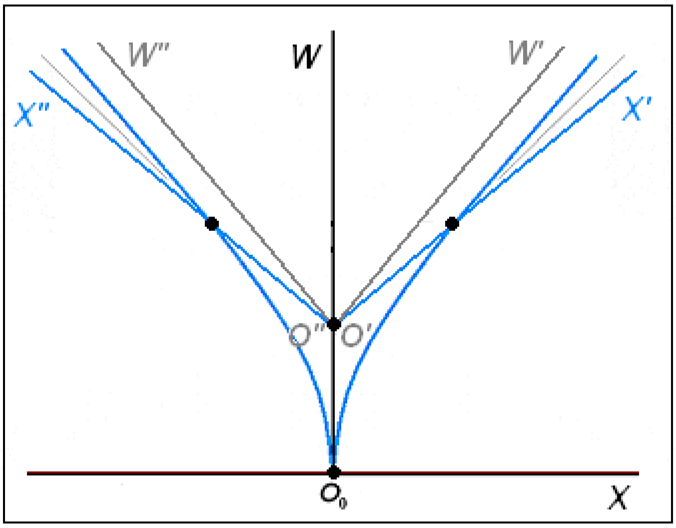

Abb. 7

Damit sind die für die Herleitung der Transformationsgleichungen benötigten Voraussetzungen erfüllt. Allerdings ist nach dem relativistischen Additionstheorem für Geschwindigkeiten die Relativgeschwindigkeit v der beiden Systeme nicht $2u$, sondern lediglich

$$v = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}.$$

Im Minkowski-Diagramm kann das System *S''* anschließend wieder als rechtwinklig dargestellt (und als *S* bezeichnet) werden, während *S'* dann als schiefwinklig abgebildet wird.

Die obige Betrachtung lehrt übrigens, dass der Begriff „Inertialsystem" einer Präzisierung und bei seiner Benutzung einer gewissen Vorsicht bedarf. Als Inertialsystem gilt ein unbeschleunigtes Bezugssystem. Die beiden von Einstein benutzten Bezugssysteme waren in diesem Sinne Inertialsysteme, denn beide waren in der betrachteten Zeitspanne nicht beschleunigt. Trotzdem waren sie keine gleichberechtigten Bezugssysteme, weil eines davon zuvor beschleunigt worden war, mit der Folge, dass darin die Uhren objektiv (oder absolut) langsamer gingen.

5 Die Lichtgeschwindigkeit im beschleunigten System *S'*

Die folgende Abbildung zeigt im Minkowski-Diagramm die Weltlinie des Ursprungs *O'* des beschleunigten Systems *S'* (blau) und die Weltlinie eines Photons (oder kurzen Lichtimpulses) (rot), das zur Zeit $t = t' = 0$ im Ursprung der beiden Systeme gestartet ist und längs der positiven *X / X'*- Achsen verläuft. (Bezeichnungen wie in Abb. 3.)

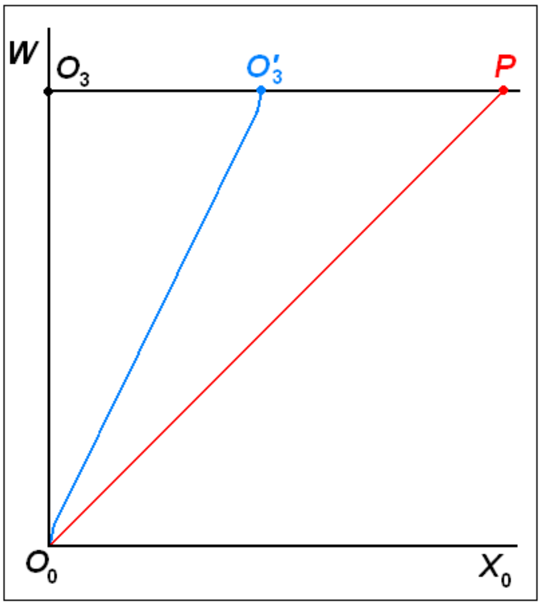

Abb. 6

Es ist zur Zeit $t = t_3$ und $t' = t'_3$

$$\text{Lichtweg in } S: \quad \overline{O_3P} = c\,t_3$$
$$\text{Lichtweg in } S': \quad \overline{O'_3\,P} = \overline{O_3P} - \overline{O_3O'_3},$$

wobei

$$\overline{O_3O'_3} = 2\frac{v_1}{2}t_1 + v_1\left(t_2 - t_1\right) = v_1\,t_2,$$

und daher

$$\overline{O'_3\,P} = c\,t_3 - v_1 t_2.$$

Die mittlere Lichtgeschwindigkeit c' in S' ist somit (für t'_3 siehe Gleichung 3)

$$c' = \frac{\overline{O'_3\,P}}{t'_3} = \frac{c\,t_3 - v_1\,t_2}{t_2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{t_1}{\beta}\arcsin\beta}.$$

Für $t_2 >> t_1$ können – wie aus Abb. 6 erkennbar – die Beschleunigungs- und Bremsphasen vernachlässigt werden, und man erhält dann (zusammen mit $t_2 \approx t_3$)

$$c' \approx \frac{t_2(c-v)}{t_2\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c-v}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Zahlenbeispiel:

Für $ß = 0{,}84$ ergibt sich daraus: $\quad c' \approx 0{,}29\,c.$

Diese Ergebnisse stehen nicht im Widerspruch zur Speziellen Relativitätstheorie, denn diese gilt nur für gleichberechtigte Inertialsysteme. Ohnehin beweist der Versuch von Michelson und Morley, der als experimentum crucis der Speziellen Relativitätstheorie und der von Lorentz hergeleiteten und nach ihm benannten Transformationsgleichungen gilt, lediglich, dass im Inertialsystem „Erde“ trotz dessen Bewegung um die Sonne (mit ca. 30 km/s) die Lichtgeschwindigkeit in jeder Richtung dieselbe ist. Einstein hat dann das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit auf alle Inertialsysteme ausgedehnt und diese (fälschlicherweise) als gleichberechtigt betrachtet (siehe dazu Kapitel 4).