

DIE SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

1. Teil: Eine (fast) allgemein verständliche Einführung

SIEGFRIED PETRY

3. JANUAR 2013

INHALT

1. Einleitung S. 3

1.1 Vorgeschichte S. 3

1.2 Den Teufel mit Beelzebub austreiben? S. 5

2. Einige Konsequenzen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit S. 7

2.1 Erstes Gedankenexperiment S. 7

2.2 Zweites Gedankenexperiment S. 9

3. Die Revolution der Physik beginnt bei einigen Gleichungen S. 11

4. Anwendung der Lorentz-Transformationen S. 14

4.1 Durchrechnung des ersten Gedankenexperiments S. 14

4.2 Durchrechnung des zweiten Gedankenexperiments S.15

4.3 Vergleich von Zeiten und Längen S. 16

4.4 Vergleich der Ortskoordinaten und der Uhren in beiden Systemen S. 19

5. Die Trägheit der Energie S. 21

6. Zusammenfassung S. 21

1 Einleitung

1.1 Vorgeschichte

Etwa von der Mitte des 19. Jahrhunderts an sammelten sich in der Physik einige Beobachtungen an, die für die »klassische Physik« unerklärlich oder sogar widersprüchlich waren. Dabei ging es stets um die Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum oder in bewegten durchsichtigen Medien (z.B. Wasser). Ganz unverständlich war das Ergebnis eines von Michelson und Morley im Jahre 1887 mit hoher Präzision durchgeführten Experiments. Michelson wollte die Geschwindigkeit messen, mit der sich die Erde im »Lichtäther« bewegt. (Der Lichtäther war – nach damaliger Auffassung – das Medium, in dem sich das Licht im Vakuum ausbreitet, also der »Träger« der Lichtwellen.) Man kann auch sagen, die Versuchsanordnung sollte die Geschwindigkeit der Erde im »absoluten Raum« messen. (Als absoluter Raum galt der mit Lichtäther erfüllte, aber sonst absolut leere Urgrund des Weltalls.) Das Prinzip des Versuchs war folgendes:

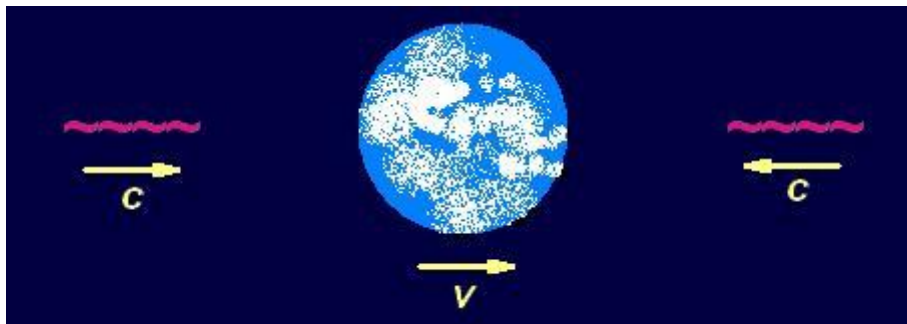


Abb. 1: Prinzip des Michelson-Morley-Experiments

Die Erde bewege sich mit der Geschwindigkeit v im Weltall. Von rechts komme ihr ein Lichtimpuls mit der Lichtgeschwindigkeit c entgegen. Ein anderer Lichtimpuls holt von links kommend die Erde ein. Für einen im Weltall ruhenden Beobachter beträgt die Relativgeschwindigkeit zwischen der Erde und dem rechten Lichtimpuls $c + v$, die Relativgeschwindigkeit zwischen der Erde und dem linken Lichtimpuls dagegen $c - v$. Und so sollte es auch für einen auf der Erde ruhenden Beobachter sein – nach Auffassung der klassischen Physik. Mit einem geeigneten Gerät – Michelsons Interferometer – müsste es dann möglich sein, durch Vergleich der beiden Relativgeschwindigkeiten die Geschwindigkeit v der Erde im Weltall zu bestimmen.

Das Ergebnis des Experiments war negativ, nämlich so, als ob sich die Erde im Raum überhaupt nicht bewegte und die beiden Lichtimpulse die gleiche Relativgeschwindigkeit gegenüber der Erde hätten. Eine mögliche Ursache dafür – die »Mitführung« des Lichtäthers durch die Erde bei ihrer Bewegung – schied aus, weil ein anderes Phänomen, die jährlich periodisch schwankende »Aberration der Fixsterne«, dagegen sprach. Die Physiker standen vor einem Rätsel, vor einem anscheinend ausweglosen Dilemma.

Da entdeckte Albert Einstein, damals gerade 25 Jahre alt, dass sich alle Schwierigkeiten beheben lassen, wenn man annimmt, dass auch für die Elektrodynamik (und damit auch für die Optik) ein Prinzip gilt, das in den übrigen Teilen der Physik schon lange etabliert war: die

Gleichwertigkeit und Gleichberechtigung aller nicht beschleunigten Bezugssysteme, der so genannten Inertialsysteme (siehe die unten stehenden Anmerkungen). Dieses Prinzip besagt, dass in allen Inertialsystemen dieselben physikalischen Gesetze gelten und dass alle physikalischen Vorgänge in ihnen gleichartig ablaufen. Dieses Prinzip sollte nach Einstein nun auch für die Elektrodynamik gelten. Das würde insbesondere bedeuten, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen denselben Wert hätte.

Anmerkungen:

1. Mit »Lichtgeschwindigkeit« ist im Folgenden immer die Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum gemeint. Sie beträgt fast $300\,000\text{ km/s} = 300\text{ m}/\mu\text{s}$. ($1\ \mu\text{s} = 1\text{ Mikrosekunde} = 1\text{ Millionstelsekunde}$.)
2. Unter einem Bezugssystem versteht man eine Basis für physikalische Messungen, hier insbesondere für die Messung der Lichtgeschwindigkeit. Ein Bezugssystem kann zum Beispiel ein Teil der Erdoberfläche oder die Erde als Ganzes sein, aber auch ein Schiff, ein Zug, ein Satellit, ein Labor, ein Raumfahrzeug oder der Mond.
3. Ein Inertialsystem, also ein nicht beschleunigtes Bezugssystem, ist eine sehr nützliche, aber nicht realisierbare Abstraktion. Immerhin aber ist ein auf der Erde ruhendes oder relativ zu ihr mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem eine zumeist brauchbare Annäherung an ein Inertialsystem.

Die von Einstein zur Lösung der Schwierigkeiten vorgeschlagene Annahme, die Lichtgeschwindigkeit wäre in allen Inertialsystemen gleich groß, nannte er das *Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit*. Es ist eine unmittelbare Konsequenz des Prinzips der Gleichberechtigung und Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme.

Dieses Prinzip scheint auf den ersten Blick recht harmlos zu sein – tatsächlich aber hat es tiefgreifende Konsequenzen. Zum einen zeigt schon eine flüchtige Betrachtung der Abbildung 1, dass es offenbar dem gesunden Menschenverstand widerspricht: Wie können die beiden Lichtimpulse – von der Erde aus gesehen – sich gleich schnell auf die Erde zubewegen, wenn die Erde sich dem einen Impuls entgegenbewegt, vor dem anderen aber sich herbewegt? Zum anderen bedeutet die Anerkennung dieses Prinzips den endgültigen Verzicht auf die Hoffnung, jemals die Geschwindigkeit eines Körpers (oder eines Bezugssystems) im »absoluten Raum« – also seine »absolute Geschwindigkeit« – messen zu können. Das aber hat zur Folge, dass man die Idee des absoluten Raumes überhaupt aufgeben muss, weil er prinzipiell nicht nachweisbar ist. Und schließlich wird damit auch die Vorstellung eines Lichtäthers als Träger der elektromagnetischen Wellen hinfällig.

1.2 Den Teufel mit Beelzebub austreiben?

Es sah demnach wirklich so aus, als wollte Einstein den Teufel mit Beelzebub austreiben, denn das Ärgernis, das nun entstand, schien weitaus größer zu sein als das, welches er beheben wollte. Das soll im Folgenden an einigen ausgewählten Beispielen gezeigt werden. Dabei benutze ich immer zwei relativ zueinander bewegte Bezugssysteme, von denen aus die Ausbreitung von einem oder zwei Lichtimpulsen beobachtet werden soll. Dazu brauchen die Beobachter in den beiden Bezugssystemen im Prinzip lediglich hinreichend genaue Längen- und Zeitmessgeräte.

Die Beobachter in den beiden Bezugssystemen sollen aber nicht nur die Lichtgeschwindigkeit in ihrem eigenen Bezugssystem messen, sondern auch von außen die Messungen im jeweils anderen System und die dort benutzten Maßstäbe und Uhren beobachten.

Als Bezugssysteme – wir nennen sie S und S' – denken wir uns zum Beispiel zwei sehr lange, auf parallelen Geraden fliegende Raumschiffe, in denen sich jeweils ein Maßstab in der Längsachse des Raumschiffs und genügend viele Präzisionsuhren befinden. Die beiden Maßstäbe nennen wir die X -Achse bzw. X' -Achse; ihre »Ursprünge« (das sind die Nullpunkte der sich nach beiden Seiten erstreckenden Maßstäbe) nennen wir O (nach origo = Ursprung) und O' . Die beiden Maßstäbe stellen je ein einachsiges, eindimensionales Koordinatensystem dar.

Wir vereinbaren nun das Folgende, das künftig immer dann gelten soll, wenn wir vom »Ausgangszustand« sprechen:

Das System S' bewege sich relativ zum System S mit der Geschwindigkeit v nach rechts (= Richtung der $+X$ -Achse). Genau so gut kann man sagen, das System S bewege sich relativ zu S' mit der Geschwindigkeit v nach links. (Mehr lässt sich über die Bewegung der beiden Systeme nicht sagen. Die Frage, welches sich denn »wirklich« bewege, ist sinnlos, weil es eine »wirkliche« – das soll heißen: absolute – Bewegung ja nicht geben soll.)

Wenn die beiden Ursprünge O und O' sich gerade einander gegenüber befinden, sollen die Beobachter in den beiden Systemen ihre Uhren auf null stellen. Die folgende Abbildung zeigt die beiden Bezugssysteme im Ausgangszustand, und zwar auf das Wesentliche reduziert, nämlich auf die Koordinatenachsen und einige Uhren.

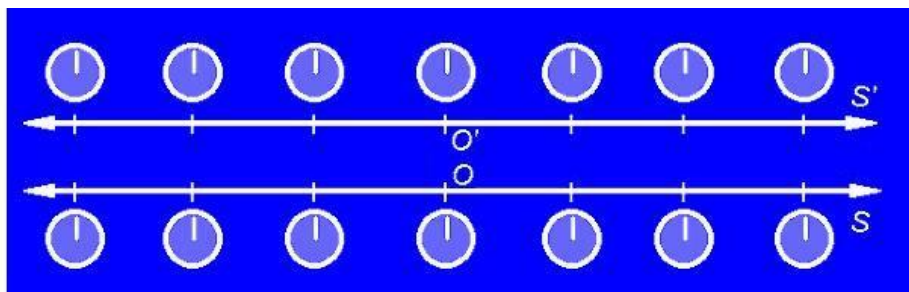


Abb. 2: Zwei Bezugssysteme im Ausgangszustand

Die Anzeige der Uhren ist so dargestellt, wie sie einem Beobachter in seinem eigenen System erscheint. Der obere Teil der Abbildung gilt also für einen Beobachter in S' , der untere Teil für einen Beobachter in S .

(Damit die beiden Bezugssysteme wirklich gleichwertig sind und bleiben, ist es nicht erlaubt, das eine System relativ zum anderen auf die Geschwindigkeit v zu beschleunigen. Damit käme eine – wie ich später zeigen werde – unerlaubte Asymmetrie in die Anordnung. Vielmehr müssen die beiden Systeme zunächst in Richtung ihrer X -Achsen in einen hinreichenden Abstand zueinander gebracht und dann in entgegengesetzten Richtungen auf die Geschwindigkeit $u/2$ beschleunigt werden. Ihre Relativgeschwindigkeit v ist dann – wie sich später als relativistischer Effekt zeigen wird – kleiner als u , aber das stört nicht.)

Wenn wir nun die beiden Bezugssysteme zu einem etwas späteren Zeitpunkt darstellen wollen, ist es einfacher und daher zweckmäßig, eines der beiden Systeme als *auf der Zeichenebene ruhend* und das andere als *relativ dazu bewegt* darzustellen. Die Wahl ist uns freigestellt, jedoch sollten wir daran denken, dass wir damit nicht über die *absolute* Ruhe und die *absolute* Bewegung der Systeme befinden – es soll ja keines von beidem geben.

Von der Relativbewegung der beiden Systeme können wir natürlich nur »Momentaufnahmen« machen, die jeweils eine bestimmte momentane Situation zeigen. Je nach Wahl sieht der Zustand der beiden Bezugssysteme nach einer gewissen Zeit so aus:

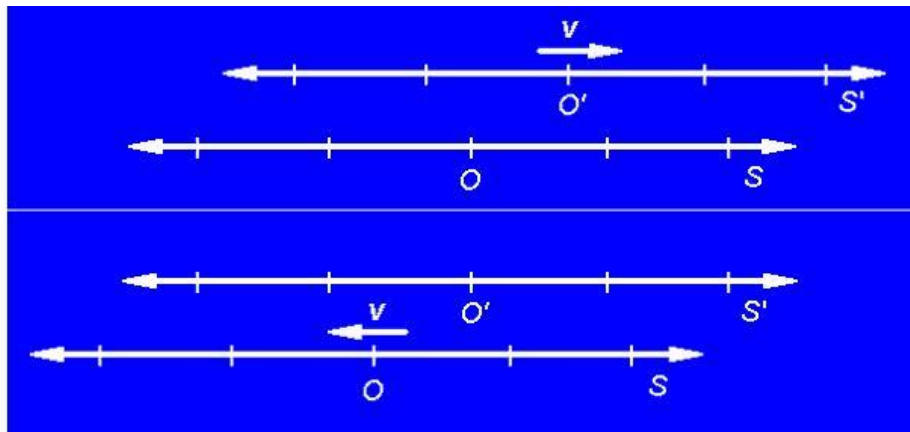


Abb. 3: Die Relativbewegung der beiden Systeme
 Oben: System S in der Zeichenebene ruhend; unten: System S' in der Zeichenebene ruhend

2 Einige Konsequenzen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

2.1 Erstes Gedankenexperiment

Wir stellen uns vor, dass in der oben beschriebenen Ausgangsposition in den Punkten O und O' ein Blitz durch die beiden Bezugssysteme hindurchschlage und dort je ein Brandloch hinterlasse. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme sei $v = 100\,000 \text{ km/s} = 100 \text{ m}/\mu\text{s}$. Wir müssen eine so große Geschwindigkeit ($1/3$ der Lichtgeschwindigkeit) wählen, damit das Problem deutlich wird. (Selbst bei den Geschwindigkeiten, wie sie heute in der Raumfahrt erreicht werden, wären die Effekte zwar messbar, aber nicht grafisch darstellbar.)

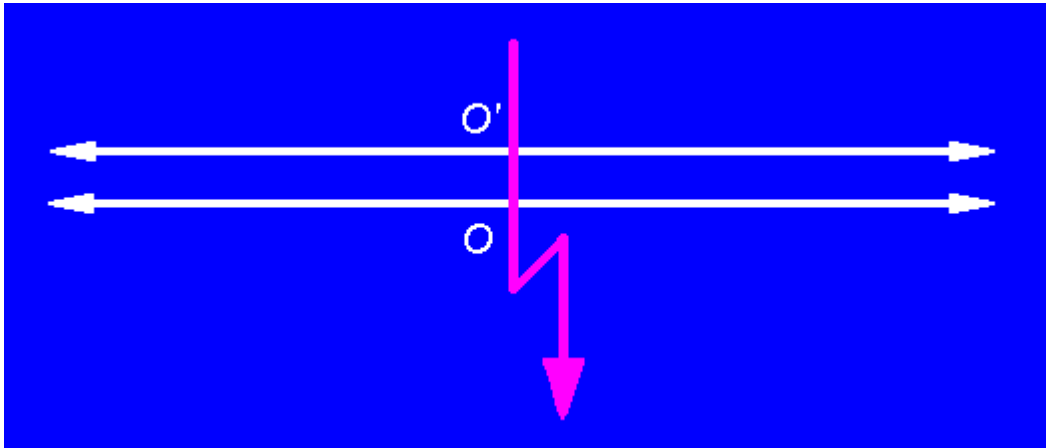


Abb. 4: Ein Blitz schlägt ein

Der Blitzeinschlag werde von weiter rechts stehenden Beobachtern registriert, die aus ihrem Abstand von O bzw. O' und aus der Laufzeit des Lichtimpulses, der von dem Blitz ausgegangen ist, die Lichtgeschwindigkeit berechnen. Wenn wir annehmen, dass für einen Beobachter im System S die Lichtgeschwindigkeit $300\,000\text{ km/s} = 300\text{ m}/\mu\text{s}$ beträgt, dann stellt sich für ihn die Situation nach 1 Mikrosekunde so dar:

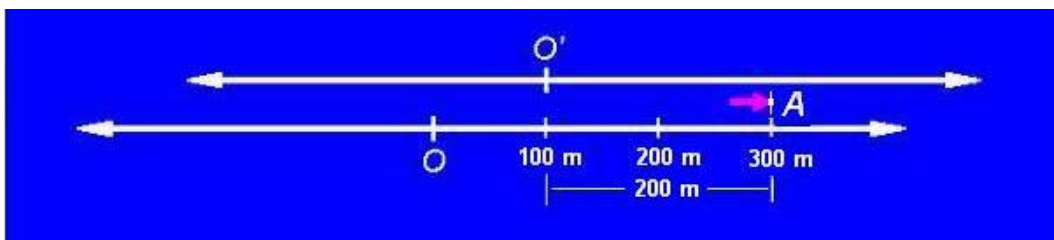


Abb. 5: Beobachter in S , $t = 1\ \mu\text{s}$

Der Lichtimpuls hat einen Punkt A erreicht, der 300 m von O entfernt ist. Der Punkt O' – das ist der Einschlagpunkt im System S' – hat sich inzwischen um 100 m nach rechts bewegt, und daher hat der Lichtimpuls im System S' nur 200 m zurückgelegt. Demnach beträgt die Lichtgeschwindigkeit im System S' nur $200\text{ m}/\mu\text{s}$ – nach Meinung des Beobachters in S .

Und wie stellt sich der Vorgang für einen Beobachter in S' dar, wenn wir gemäß dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit annehmen, dass auch im System S' die Lichtgeschwindigkeit $300\text{ m}/\mu\text{s}$ beträgt?

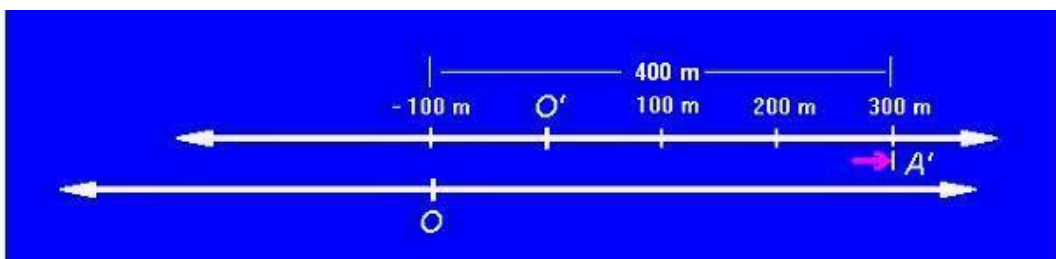


Abb. 6: Beobachter in S' , $t' = 1\ \mu\text{s}$

Nach 1 Mikrosekunde hat der Lichtimpuls den Punkt A' erreicht, der von O' 300 m entfernt ist. Ein Blick ins System S zeigt dem Beobachter, dass sich der Punkt O – das ist der Einschlagpunkt des Blitzes im System S – inzwischen 100 m nach links bewegt hat und die

Entfernung OA' daher 400 m beträgt. Daraus ergibt sich für den Beobachter in S' die Lichtgeschwindigkeit im System S zu 400 000 km/s.

Es scheint also, als wäre das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nicht aufrecht zu erhalten. Wenn aber der Michelson-Versuch keine andere Deutung zulässt, welche Möglichkeiten gibt es, das Prinzip zu retten? Wir könnten dazu annehmen:

1. Die Beobachter irren sich bei der Berechnung der Strecken $O'A$ bzw. OA' , die sich relativ zum Beobachter bewegen.
2. Die Beobachter irren sich hinsichtlich der Laufzeit des Lichtimpulses im jeweils anderen System, indem sie annehmen, sie betrage – genau wie im eigenen System – 1 Mikrosekunde.
3. Die Beobachter irren sich in beidem.

Doch: Ist so etwas vorstellbar? Ist nicht jede dieser Möglichkeiten absurd? Wenn das der Preis sein soll für die Lösung der früher erwähnten Schwierigkeiten in der Physik, ist dann dieser Preis nicht entschieden zu hoch? Sollen wir nicht lieber das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit fallen lassen?

Ich bitte Sie, sich noch etwas zu gedulden und mit mir zunächst ein weiteres Gedankenexperiment zu machen, das die Sache allerdings eher noch verschlimmert – sofern das überhaupt möglich ist.

2.2 Zweites Gedankenexperiment

Wir betrachten wieder die beiden Bezugssysteme in der Ausgangssituation und stellen uns vor, dass in diesem Moment gleichzeitig zwei Blitze einschlagen, und zwar in den Punkten A und B (im System S) bzw. A' und B' (im System S'), die 300 m rechts bzw. links von O und O' liegen. Wir beobachten die Lichtimpulse, die von den beiden Blitzen auf O und O' zulaufen.

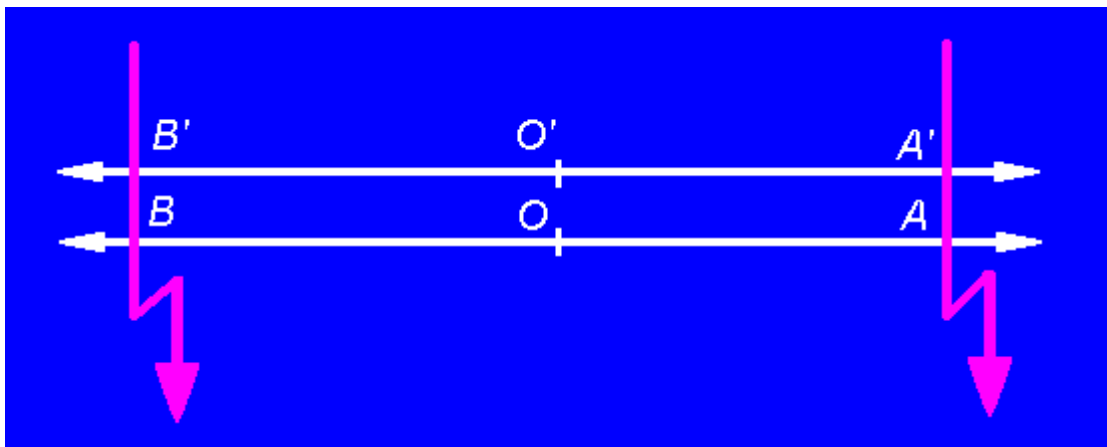


Abb. 7: Zwei Blitze schlagen ein

Die von diesen Blitzen ausgehenden Lichtimpulse treffen nach $1 \mu\text{s}$ in der Mitte zusammen. Aber: In der Mitte von A und B oder in der Mitte von A' und B' ? Je nach Standort des Beobachters hat sich nämlich inzwischen das System S' um 100 m nach rechts bewegt oder

das System S um 100 m nach links – und mit dem System auch die Einschlagpunkte der Blitze. Das sieht dann so aus:

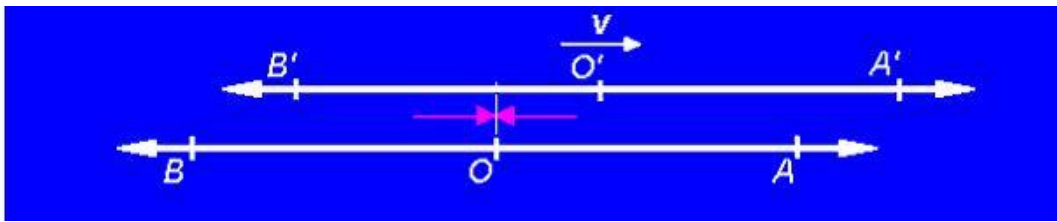


Abb. 8: Die beiden Lichtimpulse treffen sich in der Mitte. Beobachter in S'

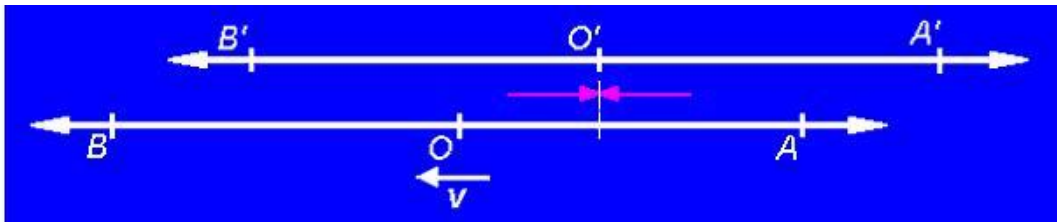


Abb. 9: Die beiden Lichtimpulse treffen sich in der Mitte. Beobachter in S''

Die Lichtimpulse begegnen einander nur für jeweils einen Beobachter in der Mitte, für den anderen Beobachter haben sie unterschiedlich lange Wege zurückgelegt. Wenn wir darauf bestehen, dass die Lichtgeschwindigkeit in beiden Bezugssystemen dieselbe ist, dann bedeuten unterschiedlich lange Wege der Lichtimpulse auch unterschiedlich lange Laufzeiten. Und dies wiederum bedeutet, dass sie – für den betreffenden Beobachter – nicht gleichzeitig gestartet sind. In der Abbildung 8 haben die Blitze für den im System S gleichzeitig eingeschlagen; im System S' dagegen hat der Blitz in A' früher eingeschlagen als der Blitz in B' . In der Abbildung 9 ist es gerade umgekehrt: Hier haben die Blitze im System S' gleichzeitig eingeschlagen; im System S dagegen hat der Blitz in B früher eingeschlagen als der in A .

Daraus folgt, dass die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse keine absolut gültige Eigenschaft ist. Wenn zwei Ereignisse für einen Beobachter gleichzeitig sind, kann für einen anderen Beobachter das eine der beiden Ereignisse früher oder später als das andere stattgefunden haben, je nach der Richtung der Bewegung des zweiten Beobachters relativ zum ersten. Diese Tatsache wird als die »Relativität der Gleichzeitigkeit« bezeichnet. Sie steht in schroffem Gegensatz zur Auffassung der klassischen Physik, wonach die Zeit ein von äußeren Einflüssen unabhängiges Phänomen ist. Isaac Newton hatte diese Auffassung 1687 so ausgedrückt: »Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand.« Das würde bedeuten, dass die Zeit in allen Bezugssystemen und für alle Beobachter – unabhängig von deren Relativbewegung – gleich schnell abliefe und dass zwei Ereignisse, die für irgendeinen Beobachter gleichzeitig stattfinden, auch für jeden anderen gleichzeitig wären.

Das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist also nicht so unproblematisch, wie es zunächst aussah. Wenn wir daran festhalten wollen, müssen wir ungeheure Konsequenzen in Kauf nehmen. Zwar beseitigt es einerseits unerträgliche Widersprüche, beschert uns aber

andererseits gewaltige Umwälzungen in den Grundlagen der Physik, in unseren Vorstellungen von Raum und Zeit.

Was ist in einem solchen Fall zu tun? Nun, man wird die neue Hypothese sehr sorgfältig auf alle ihre Konsequenzen hin überprüfen und dann untersuchen, ob sich diese Konsequenzen in der Realität nachweisen lassen. Das ist inzwischen längst geschehen, und seit langem ist die Spezielle Relativitätstheorie unter allen Theorien der Physik diejenige, deren Aussagen mit dem größten Aufwand und der größten Präzision überprüft wurden. Und alle diese Überprüfungen haben sämtliche Aussagen und Konsequenzen der Theorie aufs Genaueste bestätigt. Es gab folglich keine andere Möglichkeit, als sich an den Umbau der Grundlagen der Physik, an die Umgestaltung ihrer Auffassungen von Raum und Zeit zu machen. Wir wollen versuchen, dies nachzuvollziehen. Das geht allerdings nicht ganz ohne Mathematik. Doch keine Angst! Bei den Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie kommt man mit erstaunlich wenig Mathematik aus – ein bisschen ganz elementare Algebra tut's schon.

3 Die Revolution der Physik beginnt bei einigen Gleichungen

Betrachten wir wieder unsere beiden Bezugssysteme S und S' . Die Ausgangsbedingungen seien wie oben: Das System S' bewege sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v nach rechts oder – was dasselbe ist – das System S relativ zu S' mit der Geschwindigkeit v nach links. Zur Zeit $t = 0$ sollen die Nullpunkte O und O' der Achsen gerade einander gegenüberstehen

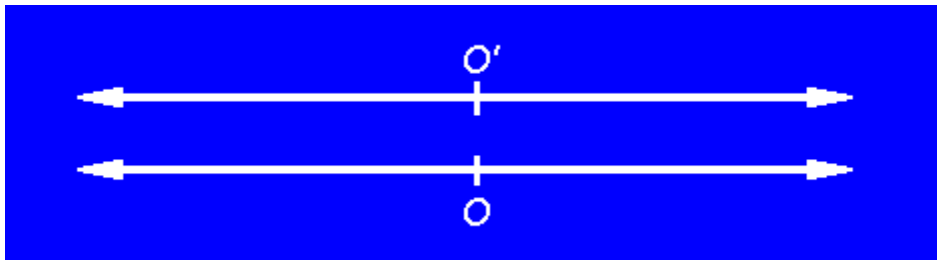


Abb. 10: Zwei relativ zueinander bewegte Bezugssysteme

Zu irgendeiner Zeit t hat sich das System S' relativ zu S um die Strecke $s = v t$ nach rechts verschoben (oder das System S relativ zu S' um die gleiche Strecke nach links).

Betrachten wir nun die relativ zueinander verschobenen Systeme:

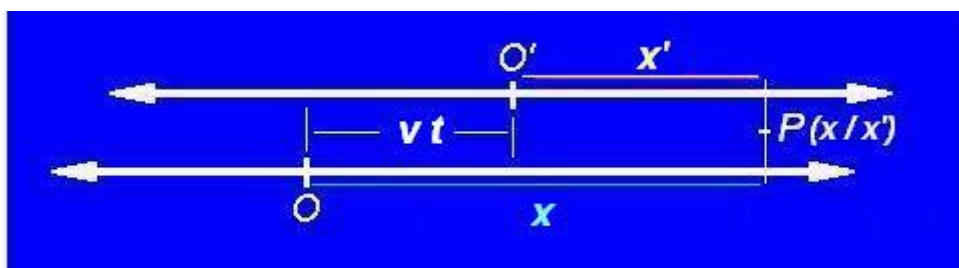


Abb. 11: Die beiden Bezugssysteme zur Zeit t

Irgendein Punkt P habe im System S die Koordinate x und im System S' die Koordinate x' . Wie man sehen kann, ist dann:

$$x' = x - v t \quad \text{und umgekehrt} \quad x = x' + v t$$

Diese simplen Gleichungen heißen Galilei-Transformationen. Sie dienen dazu, Ortskoordinaten aus dem einen System in das andere zu »transformieren«. In schlichtem Deutsch: Man kann damit aus der Koordinate x , die der Punkt P im System S hat, die Koordinate x' berechnen, die derselbe Punkt im System S' hat, und umgekehrt.

Für die klassische Physik gilt in beiden Systemen selbstverständlich dieselbe Zeit, daher steht in beiden Gleichungen ganz rechts dieselbe Größe t .

Dass diese Gleichungen nicht länger gelten können, wenn wir das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit einführen, versteht sich nach den früher angestellten Gedankenexperimenten fast von selbst. Aber probieren wir es doch einmal aus:

Ein Lichtstrahl, der zur Zeit $t = 0$ im Nullpunkt der beiden Systeme mit der Geschwindigkeit c nach rechts startet, hat zur Zeit t einen Punkt P erreicht, der

im System S die Koordinate $x = c t$ und

im System S' die Koordinate $x' = c t$ hat,

wenn wir daran festhalten, dass der Lichtstrahl in beiden Systemen dieselbe Geschwindigkeit c hat. Er legt dann in einer bestimmten Zeit t in beiden Systemen gleiche Strecken zurück.

Da die Terme auf der rechten Seite der beiden Gleichungen identisch sind, müsste

$$x = x'$$

sein, was offensichtlich falsch ist.

Was ist zu tun? Sicher müssen wir die Galilei-Transformationen durch andere ersetzen. Doch woher bekommen wir diese? (Die folgende Herleitung kann ohne Schaden für das Verständnis des Späteren übergangen werden.)

Um komplizierte Rechnungen zu vermeiden, benutzen wir ein Verfahren, das in der höheren Mathematik häufig angewendet wird: Wir bringen die Intuition – das durch Fantasie, Kenntnisse und Erfahrungen geleitete Raten – ins Spiel. Vornehmer ausgedrückt: Wir »machen einen Ansatz« und probieren dann aus, ob und unter welchen Bedingungen wir damit durchkommen. Wenn es beim ersten Mal nicht klappt, müssen wir uns etwas anderes einfallen lassen und dann dieses testen.

Versuchen wir es einmal mit dem denkbar einfachsten Ansatz: Vielleicht genügt es schon, wenn wir auf der rechten Seite der Galilei-Transformationen irgendeinen Faktor k einführen. Wenn wir dabei nicht auf einen Widerspruch stoßen, werden wir versuchen auszurechnen, welchen Wert dieser Faktor haben muss. Eines jedenfalls ist dabei sicher: Wegen der von uns geforderten Gleichberechtigung der beiden Systeme muss der Faktor in beiden Gleichungen derselbe sein. Und noch etwas: Natürlich dürfen wir nicht mehr naiverweise annehmen, dass in beiden Systemen dieselbe Zeit gilt. Vielmehr müssen wir damit rechnen, dass im System S' eine andere Zeit gilt, die wir t' nennen wollen. Dann lautet unser Ansatz:

$$(1) \quad x' = k(x - vt); \quad (2) \quad x = k(x' + vt')$$

(Anmerkung: Für Kenner gibt es gute, ja zwingende Gründe, einen so einfachen »linearen« Ansatz zu wählen.)

Nun soll das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gelten. Dann muss – ähnlich wie oben, jedoch nun mit der Zeit t' in der zweiten Gleichung – gelten:

$$x = ct \quad \text{und} \quad x' = ct'$$

Diese Werte für x und x' in Gleichung (1) eingesetzt ergibt:

$$ct' = k(ct - vt),$$

woraus folgt:

$$t' = kt(1 - v/c)$$

und schließlich:

$$(3) \quad t'/t = k(1 - v/c)$$

Aus Gleichung (2) erhält man auf die gleiche Weise

$$(4) \quad t/t' = k(1 + v/c)$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (3) und (4) erhält man:

$$\frac{t'}{t} \cdot \frac{t}{t'} = k^2 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right) \Rightarrow 1 = k^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right),$$

und schließlich

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

mit der Abkürzung $\beta = v/c$.

Unser Ansatz hat also nicht zu einem Widerspruch geführt und hat zudem einen brauchbaren Wert für k geliefert. Allerdings erkennen wir bei genauem Hinsehen eine gewisse Einschränkung: Die Größe $\beta = v/c$ muss kleiner als 1 sein. Für $\beta = 1$ oder $v = c$ würde der Nenner des Bruches null, was nicht zulässig ist. Dies ist ein erster Hinweis darauf, dass die Relativgeschwindigkeit zweier Bezugssysteme stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein muss. Darüber später mehr.

Durch Einsetzen von k in die Gleichungen (1) und (2) erhalten wir:

$$(A) \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (B) \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Nun fehlen uns noch die Umrechnungsbeziehungen (die »Transformationsgleichungen«) für t und t' . Wir erhalten sie, indem wir zunächst aus Gleichung (B) x' ausrechnen:

$$x' = x\sqrt{1 - \beta^2} - vt'.$$

Dies setzen wir in die linke Seite der Gleichung (A) ein und erhalten:

$$x\sqrt{1-\beta^2} - vt' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach t' ergibt sich:

$$(C) \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Durch eine ähnliche Prozedur – nämlich indem wir aus Gleichung (A) x ausrechnen und in Gleichung (B) einsetzen – oder einfach durch Analogieschluss – erhalten wir

$$(D) \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Diese vier Gleichungen nochmals im Zusammenhang:

$$(A) \quad x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (B) \quad x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$(C) \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (D) \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Diese Gleichungen heißen *Lorentz-Transformationen*; die gesamte Gruppe wird *Lorentz-Transformation* genannt. Sie war übrigens schon einige Jahre bekannt, als Einstein die Relativitätstheorie schuf. Ihr Entdecker, der niederländische Physiker und Nobelpreisträger Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), hatte jedoch ihre volle Bedeutung nicht erkannt.

Bei dreidimensionalen Bezugssystemen gilt für die anderen Koordinaten

$$y' = y \quad \text{und} \quad z' = z.$$

4 Anwendung der Lorentz-Transformationen

Wir können uns mit den Lorentz-Transformationen vertraut machen und sie erproben, indem wir sie auf die früher ausgeführten Gedankenexperimente anwenden.

4.1 Durchrechnung des ersten Gedankenexperiments

Wir greifen dazu auf die Abb. 5 zurück:

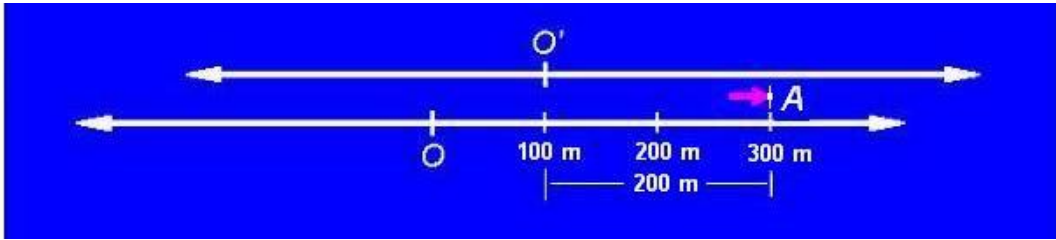


Abb. 12 = Abb. 5: Die beiden Bezugssysteme zur Zeit $t = 1 \mu\text{s}$

Die Zeit im System S ist $t = 1 \mu\text{s}$, das System S' ist um 100 m nach rechts verschoben, und der Punkt A hat die Koordinate $x(A) = 300 \text{ m}$. Welche Koordinate hat dieser Punkt zu dieser Zeit im System S' ?

Aus der Gleichung (A) ergibt sich mit $v = 100 \text{ m}/\mu\text{s}$ und $v/c = 1/3$:

$$x'(A) = \frac{300 \text{ m} - 100 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}} 1 \mu\text{s}}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} = \frac{200 \text{ m}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = 212 \text{ m}.$$

Die Strecke $O'A$ ist also für den Beobachter in S kürzer als für einen Beobachter im System S' .

Wir ermitteln nun die Zeit $t'(A)$, die eine Uhr des Systems S' im Punkt A zur Zeit $t = 1 \mu\text{s}$ anzeigt:

$$t'(A) = \frac{1 \mu\text{s} - \frac{100 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}} 300 \text{ m}}{300^2 \frac{\text{m}^2}{(\mu\text{s})^2}}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \mu\text{s}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = 0,707 \mu\text{s}.$$

Also ist die Laufzeit des Lichtimpulses im System S' kürzer als im System S .

Dividiert man die oben berechnete Strecke $O'A = 212 \text{ m}$ durch diese Zeitspanne, ergibt sich auch für die Lichtgeschwindigkeit im System S' der richtige Wert $300 \text{ m}/\mu\text{s}$.

Entsprechend findet man für die Abbildung 6:

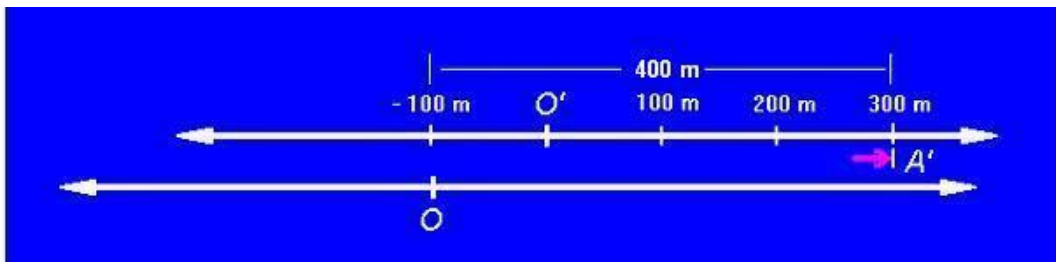


Abb. 13 = Abb. 6: Die beiden Systeme zur Zeit $t' = 1 \mu\text{s}$

$$x(A') = \frac{300 \text{ m} + 100 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}} 1 \mu\text{s}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = 424 \text{ m},$$

$$t(A') = \frac{1 \mu\text{s} + \frac{100}{300^2} 300 \mu\text{s}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = 1,414 \mu\text{s}.$$

Der Quotient $x(A')/t(A')$ ergibt wieder $300 \text{ m}/\mu\text{s}$.

Ergebnis: Die Lichtgeschwindigkeit ist in beiden Systemen die gleiche, aber weder stimmen die Uhren überein, noch die Längen von Strecken. Dies werden wir im nächsten Kapitel noch genauer untersuchen.

4.2 Durchrechnung des zweiten Gedankenexperiments

Wir vergegenwärtigen uns die Situation: In den Punkten A und B , die im System S die Koordinaten 300 m bzw. -300 m haben, schlagen gleichzeitig zur Zeit $t = 0$ zwei Blitze ein. Wir wissen inzwischen, dass »gleichzeitig« keine allgemein gültige Eigenschaft bezeichnet und dass die Blitze im System S' nicht gleichzeitig eingeschlagen haben.

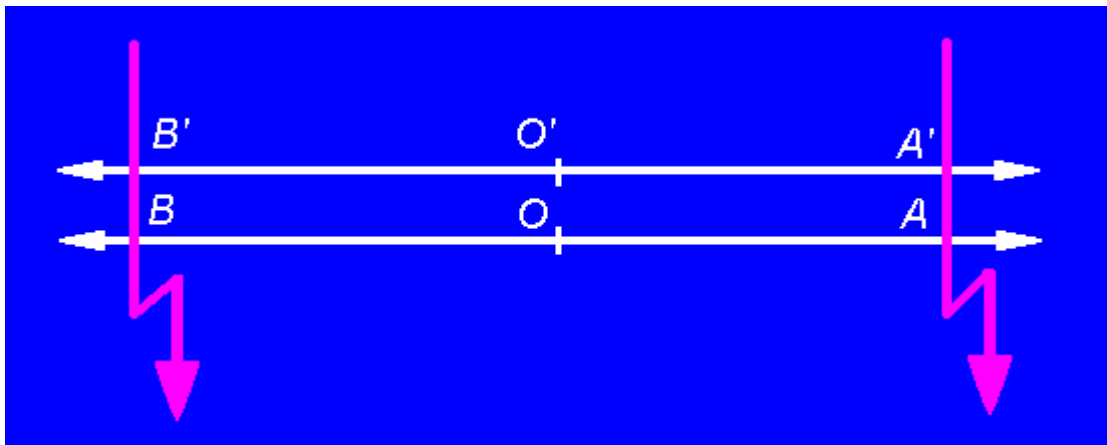


Abb. 14: Zwei Blitzeinschläge, die im System S gleichzeitig sind

Mit Gleichung (C) berechnen wir die Zeiten, zu denen im System S' die Blitze einschlagen. Zunächst für den Blitz in A' : Mit $t = 0$ und $x = 300 \text{ m}$ ergibt sich:

$$t'(A') = \frac{0 - \frac{100}{300^2} 300 \mu\text{s}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = -0,354 \mu\text{s}.$$

Der Einschlag hat also *vor* der Zeit $t' = 0$ stattgefunden.

Analog findet man:

$$t'(B') = 0,354 \mu\text{s}$$

Für den Beobachter in S' hat also der Blitz in B' $0,354 \mu\text{s}$ nach der Zeit $t' = 0$ eingeschlagen und somit $2 \cdot 0,354 \mu\text{s} = 0,708 \mu\text{s}$ später als der Blitz in A' .

4.3 Vergleich von Zeiten und Längen

Wir haben oben bemerkt, dass Zeiten und Längen in den beiden Bezugssystemen nicht übereinstimmen. Das soll an einem einfachen Beispiel genauer untersucht werden.

1. Wir betrachten zur Zeit $t' = 0$ die Uhr, die im Nullpunkt O' des Systems S' steht. Die ihr gegenüberstehende Uhr im Nullpunkt O des Systems S zeigt dann ebenfalls gerade $t = 0$ an. Nach 1 Mikrosekunde (gemessen im System S , also zur Zeit $t = 1 \mu\text{s}$) hat die erste Uhr – von S aus betrachtet – sich um 100 m weiterbewegt und befindet sich an einer Stelle, die im System S die Koordinate $x = 100 \text{ m}$ hat.

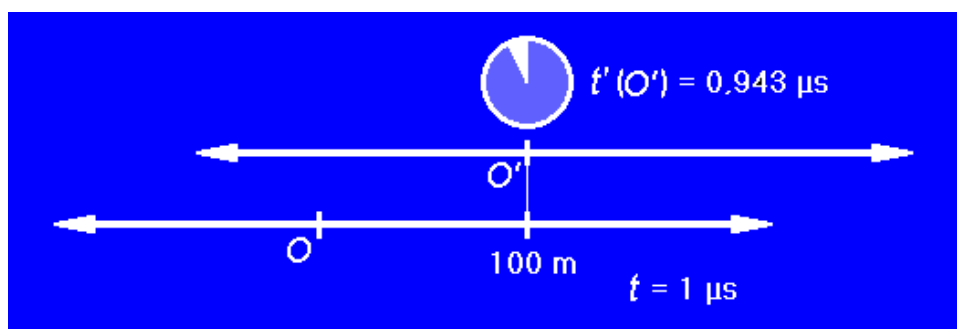


Abb. 15: Eine im System S' ruhende Uhr von S aus betrachtet

Daraus ergibt sich mit Gleichung (C) die Zeit, welche diese Uhr dann anzeigt:

$$t'(O') = \frac{1 \mu\text{s} - \frac{100 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}} \cdot 100 \text{m}}{300^2 \frac{\text{m}^2}{(\mu\text{s})^2}}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = 0,943 \mu\text{s}.$$

Dagegen zeigen alle Uhren in S (für einen in S ruhenden Beobachter) die Zeit $t = 1 \mu\text{s}$ an. Die betrachtete Uhr geht also für einen Beobachter in S im Vergleich mit den Uhren seines Systems langsamer.

Für einen Beobachter in S' dagegen zeigen in diesem Moment alle Uhren in S' die Zeit $t' = 0,943 \mu\text{s}$ an. Wenn sich für diesen Beobachter das System S mit der Geschwindigkeit $100 \text{ m}/\mu\text{s}$ nach links bewegt – wie es wegen der Gleichberechtigung der Systeme sein sollte – dann dürfte sich für diesen Beobachter der Ursprung O des Systems S in diesem Zeitintervall nur um $94,3 \text{ m}$ nach links verschoben haben. Das würde bedeuten: Eine Strecke, die im System S 100 m lang ist, ist für einen Beobachter in S' nur $94,3 \text{ m}$ lang. Dies wird bestätigt durch Anwendung der Gleichung (B) der Lorentz-Transformationen. Aus

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

folgt mit $x = 0$, $v = 100 \text{ m}/\mu\text{s}$ und $t' = 0,943 \text{ s} \rightarrow x' = 94,3 \text{ m}$.

2. Stellen wir uns nun einen analogen Versuch vor, bei dem wir die beiden Systeme vertauschen: Wir beobachten die Uhr im Nullpunkt O des Systems S vom System S' aus.

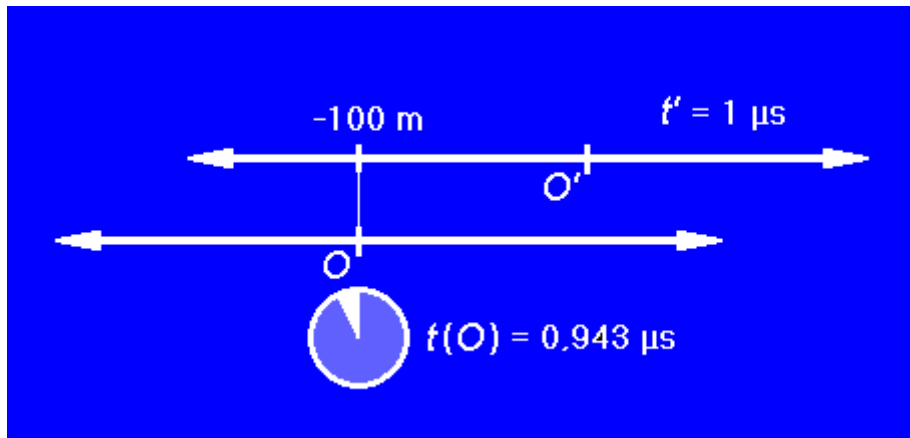


Abb. 16: Eine im System S ruhende Uhr von S' aus betrachtet

Das Ergebnis ist wegen der Gleichberechtigung der Systeme voraussagbar, dennoch soll es berechnet werden.

Zur Zeit $t' = 1 \mu\text{s}$ befindet sich die Uhr am Ort mit der Koordinate $x' = -100 \text{ m}$ und zeigt die Zeit

$$t = \frac{1 \mu\text{s} + \frac{100 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}} (-100\text{m})}{300^2 \frac{\text{m}^2}{(\mu\text{s})^2}}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} = 0,943 \mu\text{s}.$$

an. Also geht diese Uhr für den Beobachter in S' im Vergleich zu seinen Uhren langsamer. Und analog zu oben ist die Strecke OO' im System S nur $94,3 \text{ m}$ lang.

Diese Ergebnisse lassen sich wie folgt verallgemeinern:

1. Es finde in einem und demselben Punkt P des Systems S' zur Zeit t'_1 irgendein Ereignis E_1 statt (z. B. ein Blitzeinschlag) und zur Zeit t'_2 irgendein Ereignis E_2 . Dann beträgt der zeitliche Abstand der Ereignisse im System S'

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

und im System S

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

und es gilt

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq \Delta t'.$$

Umgekehrt gilt für die zeitlichen Abstände zweier Ereignisse, die im System S an derselben Stelle stattfinden

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq \Delta t.$$

In jedem System erscheint der zeitliche Abstand zweier Ereignisse am selben Ort des anderen Systems gedehnt (vergrößert). Dieser Effekt heißt *Zeitdilatation*.

2. Eine im System S' ruhende Strecke der Länge l' (parallel zur X' -Achse) hat im System S die Länge

$$l = l' \sqrt{1-\beta^2}.$$

Umgekehrt hat eine im System S ruhende Strecke der Länge l (parallel zur X -Achse) im System S' die Länge

$$l' = l \sqrt{1-\beta^2}.$$

Eine – etwas voreilige – Formulierung dieser Befunde könnte lauten: Die Uhren im System S' gehen langsamer als die Uhren im System S und gleichzeitig gehen die Uhren im System S langsamer als die Uhren im System S' . Natürlich ist diese Aussage in sich widersprüchlich und daher nicht haltbar. Vielmehr ist die Ganggeschwindigkeit der Uhren in beiden Systemen gleich (dies folgt schon aus der Gleichberechtigung der Systeme), sie gehen lediglich für einen relativ dazu bewegten Beobachter langsamer. Wie sollte sich auch am Gang der Uhren z. B. im System S dadurch etwas verändern, dass ich mir ein zweites (oder drittes ...) bewegtes Bezugssystem hinzu fantasieiere! Es kann nur an der Relativbewegung der Beobachter liegen, dass für diese die Uhren im anderen System nachgehen, und zwar – wegen der Gleichberechtigung der beiden Systeme – in jeweils gleicher Weise. Damit ist der Sachverhalt zwar logisch widerspruchsfrei beschrieben, aber es ist bei weitem noch nicht erklärt, wie es dazu kommt und wie man diesen höchst merkwürdigen und beunruhigenden Vorgang verstehen kann. Was ist da in den Systemen oder zwischen ihnen vorgegangen, dass es keine objektive Gleichzeitigkeit mehr gibt, dass die Strecken (und überhaupt die Körper) im jeweils anderen System kürzer sind und die Uhren langsamer gehen, und beides in völlig symmetrischer Weise? Sicher, logisch ist das zulässig, und wenn überhaupt Veränderungen eintreten, dann müssen sie wegen der Gleichberechtigung der Systeme sogar symmetrisch sein, aber wie kommt es dazu?

Analoges gilt für die Längenveränderung eines Körpers für einen relativ dazu bewegten Beobachter. Auch hier ist der Befund logisch widerspruchsfrei, aber er ist damit noch nicht erklärt. Raum und Zeit scheinen ins Wanken zu geraten, wenn man sich mit großer Geschwindigkeit bewegt. Und an den überkommenen Vorstellungen von Raum und Zeit stimmt etwas Entscheidendes nicht. Aber was?

Stellen wir diese drängenden Fragen nochmals zurück und betrachten wir die Veränderungen einmal systematisch. Schauen wir uns die Uhren und die Koordinatensysteme in den beiden Systemen einmal genauer an.

4.4 Vergleich der Ortskoordinaten und der Uhren in beiden Systemen

Um das Beispiel etwas drastischer zu machen, wähle ich diesmal eine noch höhere Relativgeschwindigkeit, nämlich $v = 180 \text{ m}/\mu\text{s}$. Dann ist:

$$\beta = \frac{v}{c} = 0,6 \quad 1 - \beta^2 = 0,64 \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1,25.$$

Wir berechnen nun mit Hilfe der Gleichungen (A) und (C) für $t = 0$ eine kleine Tabelle.

Tabelle 1: $t = 0$		
x	x'	t'
0	0	0
300 m	375 m	-0,75 μs
600 m	750 m	-1,50 μs
-300 m	-375 m	0,75 μs
-600 m	-750 m	1,50 μs

Es ist leicht zu erkennen, wie die Tabelle weitergehen würde.

Die Werte der Tabelle sollen nun in den beiden Bezugssystemen dargestellt werden. Bei den vereinfacht dargestellten Uhren soll eine Zeigerumdrehung 6 μs entsprechen.

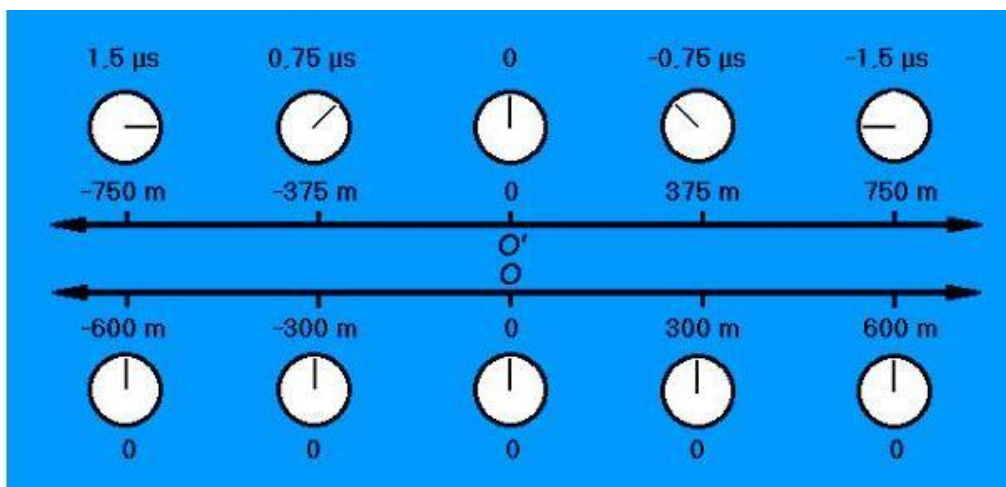


Abb. 17: Längenkoordinaten und Zeiten in zwei Bezugssystemen vom System S aus gesehen

Nun soll das Ganze unter sonst gleichen Bedingungen vom System S' aus betrachtet werden. Mit Hilfe der Gleichungen (B) und (D) ergibt sich für die Zeit $t' = 0$ folgende Tabelle:

x'	x	t
0	0	0
300 m	375 m	0,75 μ s
600 m	750 m	1,50 μ s
-300 m	-375 m	-0,75 μ s
-600 m	-750 m	-1,50 μ s

Wie zu erwarten war, entspricht die Tabelle weitgehend der oberen. Die veränderten Vorzeichen bei den Zeitangaben beruhen darauf, dass die Relativgeschwindigkeiten der beiden Systeme entgegengesetzt sind: Von S aus gesehen bewegt sich S' nach rechts (oder vorwärts), von S' aus gesehen aber bewegt sich S nach links (oder rückwärts). Auch diese Ergebnisse sollen in den beiden Bezugssystemen schematisch dargestellt werden:

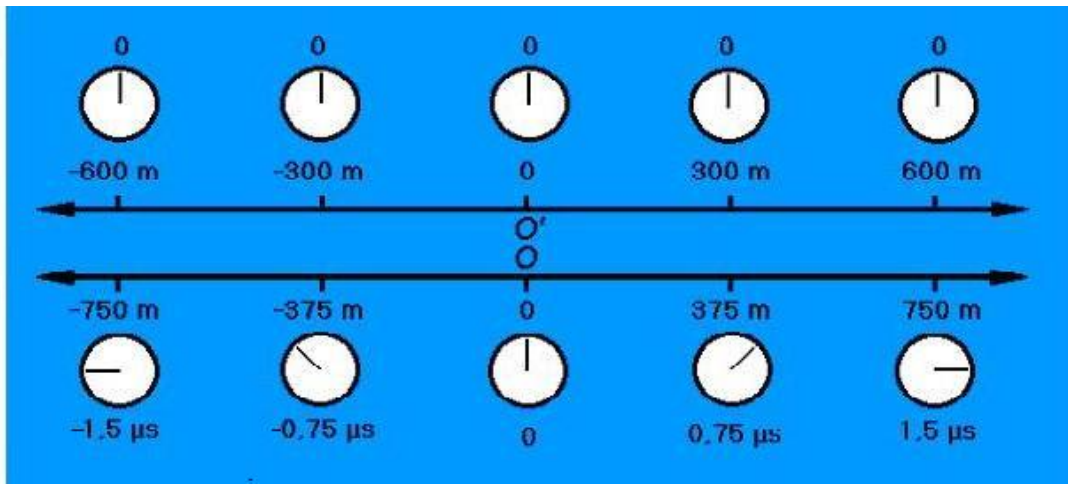


Abb. 18: Längenkoordinaten und Zeiten vom System S' aus betrachtet

In diesen Abbildungen werden die Verkürzung der Strecken und der Asynchronlauf der Uhren besonders deutlich.

Trotz dieser höchst merkwürdigen und beunruhigenden, ja ungeheuren Konsequenzen des Prinzips der Konstanz der Geschwindigkeit waren Einstein – und im Laufe der Zeit auch immer mehr seiner Fachkollegen – bereit, an dem Prinzip festzuhalten, eben weil nur so frühere Beobachtungen gedeutet werden konnten. Aber Einstein zog aus seiner Theorie noch eine weitere Folgerung, die das Weltbild der Physik revolutionierte.

5 Die Trägheit der Energie

Wenige Monate nach seiner ersten Arbeit zur Speziellen Relativitätstheorie veröffentlichte Einstein einen nur drei Seiten langen Aufsatz (»Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?«) in dem er nachwies, dass Energie träge ist, also die gleiche Eigenschaft wie eine Masse besitzt. Dabei gilt für die ihrer Trägheit entsprechende Masse m_E

$$m_E = \frac{E}{c^2},$$

wobei c wieder die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist.

Dies hat zur Folge, dass ein Körper bei hoher Geschwindigkeit eine messbar höhere Trägheit besitzt als in Ruhe. Diese Tatsache war aus Messungen an schnell bewegten Elektronen schon Jahre vor der Relativitätstheorie bekannt und stellte die erste experimentelle Bestätigung der Theorie dar. Nach H. A. Lorentz unterschied man seinerzeit zwischen der Ruhemasse, der transversalen Masse und der longitudinalen Masse der Elektronen (je nach Richtung der Beschleunigung). Die transversale und die longitudinale Masse waren verschieden und von der Geschwindigkeit der Elektronen abhängig. Durch die Relativitätstheorie wurde deutlich, dass nicht die Masse der Elektronen mit ihrer Geschwindigkeit zunimmt, sondern dass die Zunahme der Trägheit von der Trägheit der kinetischen Energie hervorgerufen wird. (Einzelheiten dazu finden sich im Anhang.)

6 Zusammenfassung

Damit haben wir die wichtigsten Ergebnisse der Speziellen Relativitätstheorie zusammengetragen. Sie sind das, was Einstein bis zum Jahr 1905 erarbeitet hatte und schließlich in zwei Aufsätzen in den »Annalen der Physik« veröffentlichte. (Im selben Jahr publizierte Einstein übrigens zwei weitere Arbeiten, insgesamt »vier Publikationen über verschiedene Themen, deren jede, wie man heute sagt, nobelpreiswürdig ist.« [C. F. v. Weizsäcker])

Die Frage, wie wohl eine Welt beschaffen sein müsste, in der so beunruhigende Phänomene, wie sie die Spezielle Relativitätstheorie beschreibt, gleichsam das Normale sind, beschäftigte in der folgenden Zeit den genialen deutschen Mathematiker Hermann Minkowski (1864-1909). Er legte seine Erkenntnisse in der Sitzung der »Königlichen Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen« am 21. Dezember 1907 dar. Leider ist Minkowski dabei ein Fehler unterlaufen, der letztlich darauf beruht, dass man es seinerzeit noch nicht so strikt und ausschließlich mit »Größengleichungen« arbeitete, wie das heute der Fall ist. Stattdessen benutzte man häufig »Zahlenwertgleichungen« ohne Maßeinheiten. So finden sich in seinen Arbeiten Passagen, mit denen heute kein Abiturient im Leistungskurs Physik durchkäme. Diese Mängel wurden von seinen Nachfolgern bedenkenlos übernommen und haben sich so in der Literatur unerkant erhalten. Die dadurch notwendigerweise immer wieder entstehenden Schwierigkeiten versucht man zu überwinden, indem man »für einen Augenblick die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 setzt« (eine physikalische Größe also wie eine mathematische Zahl behandelt) oder auf Grimms Märchen vom Rotkäppchen und dem Wolf verweist, in dem auch die *Wegstrecke* zur Großmutter durch eine *Zeitspanne* (z. B. eine Stunde) gemessen wird – als wissenschaftliches Argument immerhin beachtlich.

Doch zurück zu Minkowski: Unbestritten bleibt die Tatsache, dass er als Erster darüber nachgedachte, wie denn die Grundstrukturen einer Welt – nämlich Raum und Zeit – beschaffen sein müssten, in der die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie gelten, oder – anders gesagt – statt der Galilei-Transformationen die Lorentz-Transformationen. Es war ihm nicht genug, den absoluten euklidischen Raum Newtons und dessen absolute Zeit zu

verabschieden, ohne zu fragen, was denn nun an ihre Stelle treten würde. Und so ist es sein Verdienst, als erster Mensch den Raum und die Zeit lediglich als Teile eines größeren Ganzen erkannt zu haben: »Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.« (Aus der Einleitung seines Vortrags bei der Naturforscherversammlung im September 1908.) Allerdings stand damals hinter diesem Satz eher eine kühne Vision als eine ausgereifte Konzeption. Diese schufen erst seine Nachfolger, und von ihnen auch stammt der Name *Minkowski-Raum* (sowie der unsinnige Begriff *Raum-Zeit*) für jene visionäre Union von Raum und Zeit. Wie widersprüchlich der Begriff *Raum-Zeit* in sich bereits ist und welcher Trugschluss dahinter steckt, zeige ich im zweiten Teil dieser Abhandlung.