DIE SPEZIELLE RELATIVITÄTSTHEORIE

2. Teil: Der Minkowski-Raum – wie er wirklich ist

SIEGFRIED PETRY

04. JANUAR 2013

Inhalt

1 Auf dem Weg zum vierdimensionalen Raum

1.1 Die Substitution *w = c t*

Wenn man die Gleichungen (C) und (D) der Lorentz-Transformationen

$$\text{(A)}\quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(B)}\quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\text{(C)}\quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{(D)}\quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

auf beiden Seiten mit der Lichtgeschwindigkeit *c* multipliziert und anschließend für die Produkte *c t* und *c t′* die Bezeichnung *w* bzw. *w′* einführt (»substituiert«), also

$$c\,t = w \quad\text{und}\quad c\,t' = w'$$

setzt, ergibt sich als Erstes eine formale Vereinfachung dieser beiden Gleichungen. Sie lauten dann:

$$w' = \frac{w - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad\text{und}\quad w = \frac{w' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Führt man diese Substitution auch in den Gleichungen (A) und (B) ein, so gehen sie über in:

$$x' = \frac{x - \beta w}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad\text{und}\quad x = \frac{x' + \beta w'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Es zeigt sich nun eine vollständige formale Symmetrie zwischen den Gleichungen, die übereinander stehen. Das heißt: Wenn man einerseits *w′* und *x′* vertauscht und andererseits *x* und *w*, geht die obere Gleichung in die darunter stehende über und umgekehrt. Anders gesagt: Die Variablen *w* und *w′* spielen in den Gleichungen formal dieselbe Rolle wie *x* bzw. *x′*.

Zwischen den vier Größen *x, x′, w* und *w′* besteht ein wichtiger Zusammenhang: Wie man durch Einsetzen und eine anschließende einfache algebraische Operation bestätigen kann, gilt zwischen ihnen die Beziehung:

$$w^2 - x^2 = w'^2 - x'^2.$$

Diese Gleichung sieht ganz harmlos aus, hat es aber in sich. Bevor ich näher darauf eingehen kann, muss ich jedoch noch etwas nachtragen:

Die Bezugssysteme, die wir bisher betrachteten, waren der Einfachheit halber eindimensional: sie bestanden nur aus einer *X*-Achse. Ein reales Bezugssystem aber ist im Allgemeinen dreidimensional und besitzt neben der Längenausdehnung in *X*-Richtung auch eine Breite (*Y*-Richtung) und eine Höhe (*Z*-Richtung) mit den entsprechenden Achsen. Die Koordinaten in diesen beiden Richtungen bleiben aber von der Relativbewegung der Bezugssysteme in *X*-Richtung unberührt, das heißt, es gilt:

$$y' = y \quad \text{und} \quad z' = z.$$

Die Lorentz-Transformationen müssen um diese beiden Gleichungen ergänzt werden. Wenn man dies berücksichtigt, kann auch die zuletzt betrachtete Gleichung entsprechend ergänzt werden. Sie lautet dann:

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = w'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 .$$

1.2 Exkurse: Vierdimensionale Räume

E 1 Gedankliche Annäherung an vierdimensionale Räume

Der Umgang mit zwei- und dreidimensionalen euklidischen Räumen ist allgemein geläufig. Bei der mathematischen Behandlung werden sie meist durch zwei- bzw. dreidimensionale kartesische Koordinatensysteme repräsentiert. Das sind Koordinatensysteme, deren Achsen aufeinander senkrecht stehen und gleich lange Einheitsstrecken haben.

Ein vierdimensionaler Raum ist zwar nicht vorstellbar, aber sehr wohl denkbar, und seine Gesetze und Eigenheiten können mathematisch erforscht werden. Wir können uns ihm gedanklich annähern, indem wir uns mit den Eigenschaften eines vierdimensionalen euklidischen Koordinatensystems befassen. Es entsteht, indem den drei Achsen (*X*-, *Y*- und *Z*-Achse) eines dreidimensionalen Koordinatensystems eine vierte Achse (*W*-Achse) hinzugefügt wird, die auf den anderen drei Achsen senkrecht stehen soll.

Die vier Koordinatenachsen bestimmen genau 6 Koordinatenebenen, nämlich die *XY*-Ebene, die *XZ*-Ebene, die *XW*-Ebene, die *YZ*-Ebene, die *YW*-Ebene und die *ZW*-Ebene. Ferner bestimmen die Koordinatenachsen (oder, wenn man will, die Koordinatenebenen) vier dreidimensionale Koordinatenräume, nämlich den *XYZ*-Raum, den *XYW*-Raum, den *XZW*-Raum und den *YZW*-Raum. So wie aus einem dreidimensionalen Raum (z. B. dem *XYZ*-Koordinatenraum) drei Koordinatenebenen (und beliebig viele andere – zu den Achsen »schiefe« – Ebenen) »herausgeschnitten« werden können, so können aus dem vierdimensionalen Koordinatenraum vier dreidimensionale Koordinatenräume (und beliebig viele andere dreidimensionale Räume) herausgeschnitten werden. Jeder der vier dreidimensionalen Koordinatenräume ist für sich darstellbar (und vorstellbar), nicht dagegen ihre Zusammensetzung zum vierdimensionalen Raum. Die Ursache dafür liegt in der neurologischen Struktur des Menschen: Er ist ein Wesen, das nicht mehr als drei Dimensionen wahrnehmen und sich vorstellen kann. Es gibt für ihn neben »rechts und links, vorn und hinten, oben und unten« keine vierte räumliche Richtung für eine vierte Dimension. Sollte es in der Realität eine vierte Dimension geben und sollten darin Gegenstände sein – vierdimensionale Körper – dann könnten wir davon nur wahrnehmen, was innerhalb unseres dreidimensionalen Raumes liegt. Dies soll an einem Vergleich anschaulich gemacht werden, der um eine Dimension vermindert ist: Stellen wir uns im Raum eine Kugel vor, sowie eine horizontale Ebene, die sich von unten nach oben durch die Kugel hindurchbewegt.

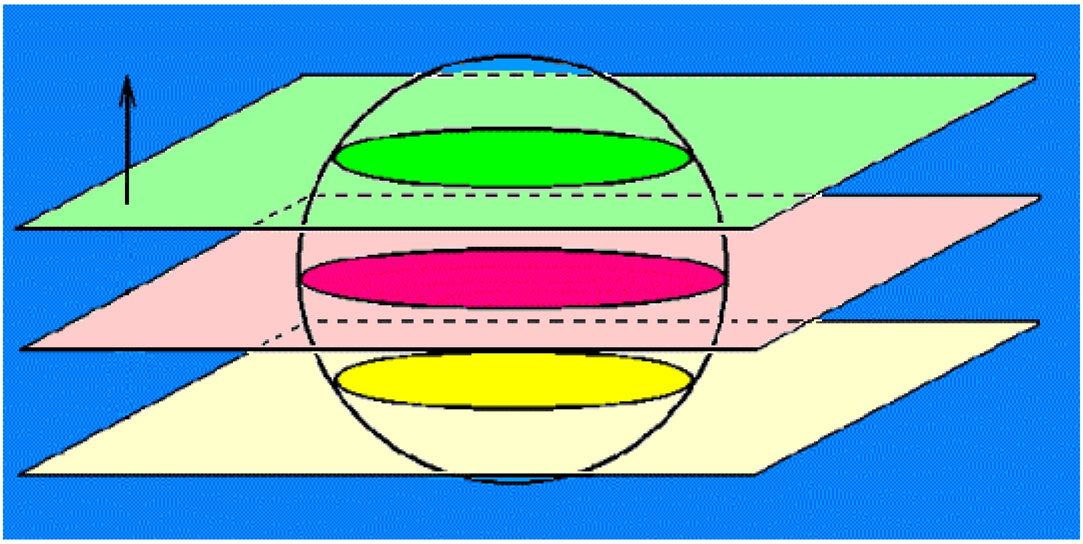

Abb. 1: Schnitte einer Ebene mit einer Kugel

Nehmen wir an, in dieser Ebene lebten zweidimensionale, flache Lebewesen, deren Wahrnehmung auf zwei Dimensionen beschränkt ist, so wie die unsere auf drei beschränkt ist. Diese Lebewesen nehmen von der Kugel nur eine Linie wahr, denn als solche erscheint ihnen der Kreis, in dem ihre Ebene die Kugel schneidet. (Bedenken Sie, dass die Kreise als solche nur zu erkennen sind, wenn man aus der Ebene in die dritte Dimension hinaustritt.) Bei der Bewegung ihrer Ebene von unten nach oben bemerken sie plötzlich das Auftreten eines Punktes, der gleich darauf zu einer Strecke wird. Diese wird zunächst länger, dann wieder kürzer und ist schließlich wieder verschwunden. Sie beobachten dabei eine Bewegung der Strecke – ihr Wachsen und anschließend ihr Schrumpfen –, eine Bewegung, die es in der dreidimensionalen Realität gar nicht gibt. Dafür entgeht ihnen die Bewegung ihrer eigenen Ebene (ihres Erfahrungsraumes oder ihrer Welt) völlig.

Analog dazu ist es denkbar, dass unser dreidimensionaler Erfahrungsraum nur ein Ausschnitt aus einem vierdimensionalen Raum wäre und dass die dreidimensionalen Körper in unserem Erfahrungsraum – einschließlich unserer eigenen Körper – dreidimensionale Ausschnitte aus vierdimensionalen Körpern wären, deren vierdimensionale Realität für uns nicht wahrnehmbar wäre.

E 2 Der Abstand eines Punktes vom Ursprung des Koordinatensystems

In einem zweidimensionalen Koordinatensystem ist der Abstand *OP* eines Punktes *P* vom Ursprung *O* des Koordinatensystems

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

und das Quadrat davon ist

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{(Satz des Pythagoras)}$$

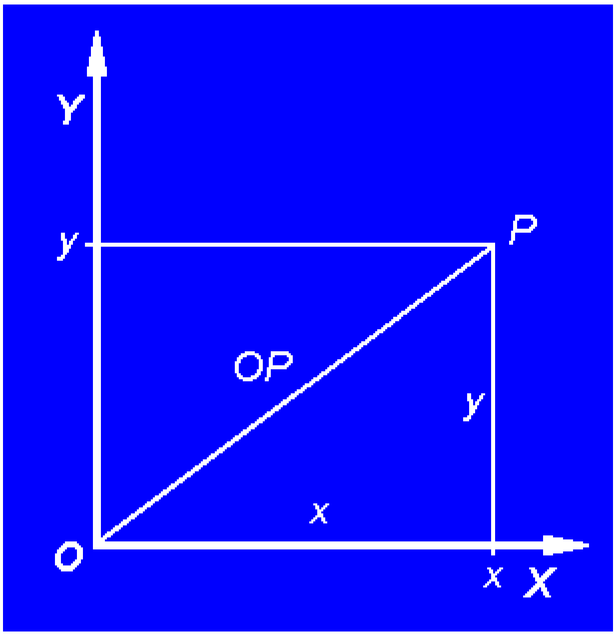

Abb. 2: Abstand eines Punktes P vom Ursprung O des Koordinatensystems

Der Satz des Pythagoras gilt in dieser Form übrigens nur in einer der uns geläufigen ebenen Flächen, oder genauer gesagt, in einer *euklidischen Ebene*. Er gilt zum Beispiel nicht auf der Oberfläche einer Kugel. Die Gültigkeit des »Pythagoras« ist ein wesentliches Merkmal einer euklidischen Ebene, ebenso wie die Tatsache, dass die Winkelsumme eines Dreiecks 180° beträgt.

Seit geraumer Zeit beschäftigen sich die Mathematiker auch mit anderen, nichteuklidischen Ebenen und Räumen. Ihnen ist auch eine Ebene – zwar nicht vorstellbar – aber denkbar, in der gilt

$$\overline{OP}^2 = x^2 - y^2 \quad \text{oder aber} \quad \overline{OP}^2 = y^2 - x^2.$$

Solche Ebenen werden als *pseudoeuklidisch* bezeichnet, weil sie immerhin eine gewisse Verwandtschaft mit einer euklidischen Ebene haben.

Dreht man das Koordinatensystem um einen beliebigen Winkel um seinen Ursprung oder führt ein neues, gedrehtes Koordinatensystem ein, so ändert sich dabei der Abstand OP nicht, obwohl die Koordinaten des Punktes P im neuen System andere sind. Es gilt also auch für die neuen Koordinaten x' und y' des Punktes P

$$\overline{OP}^2 = x'^2 + y'^2 .$$

Folglich ist

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 .$$

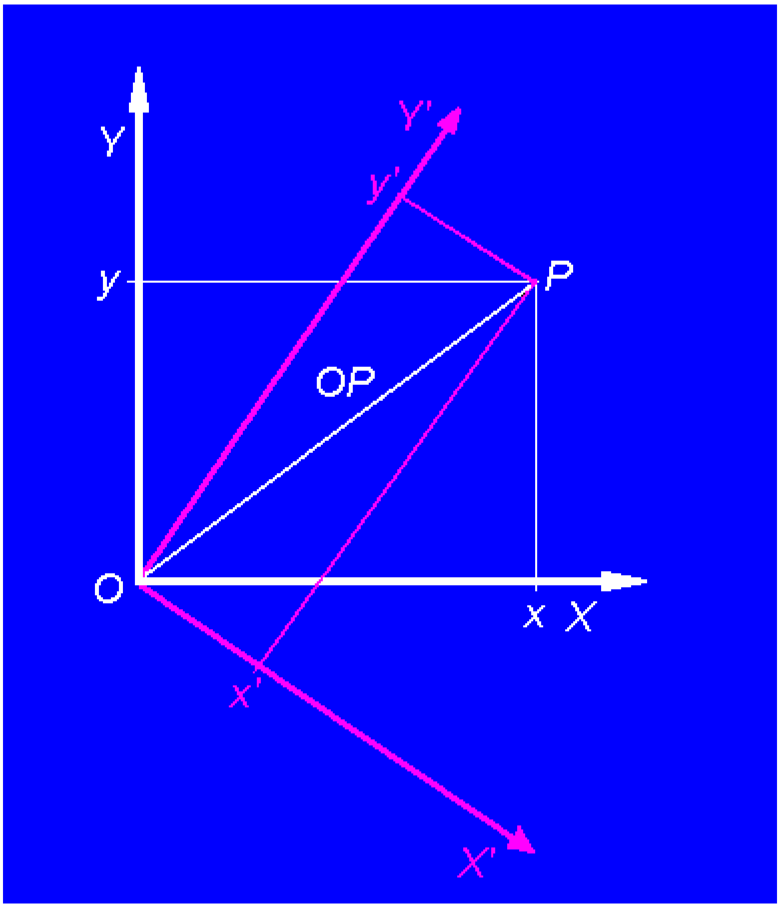

Abb. 3: Der Abstand *OP* im ursprünglichen und im gedrehten Koordinatensystem

In den erwähnten pseudoeuklidischen Ebenen gilt analog

$$\overline{OP}^2 = x'^2 - y'^2 \quad \text{bzw.} \quad \overline{OP}^2 = y'^2 - x'^2$$

und somit

$$x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2 \quad \text{bzw.} \quad y^2 - x^2 = y'^2 - x'^2 .$$

Entsprechend gilt in einem *euklidischen* drei- bzw. vierdimensionalen Raum:

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{bzw.} \quad \overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$

und bei Einführung eines gedrehten Koordinatensystems, in dem der Punkt *P* die Koordinaten (x', y', z') bzw. (x', y', z', w') hat:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2 .$$

Man kann sich nun auch pseudoeuklidische Räume denken, in denen zum Beispiel gilt:

$$\overline{OP}^2 = x^2 + y^2 - z^2 \quad \text{bzw.} \quad \overline{OP}^2 \, x^2 + y^2 + z^2 - w^2$$

oder aber

$$\overline{OP}^2 = -x^2 - y^2 + z^2 \quad \text{bzw.} \quad \overline{OP}^2 = -x^2 - y^2 - z^2 + w^2 .$$

(Es sind natürlich noch andere pseudoeuklidische Räume denkbar, die sich voneinander darin unterscheiden, wie der Abstand *OP* – und allgemein der Abstand zweier Punkte – berechnet wird. Man spricht in diesem Zusammenhang von der »Metrik« des Raumes.)

In allen diesen Räumen ändert sich der Abstand *OP* und damit auch $(OP)^2$ bei Drehung des Koordinatensystems um seinen Ursprung oder beim Übergang zu einem gedrehten Koordinatensystem (X', Y', Z') nicht, und es gilt daher:

$$x^2 + y^2 - z^2 = x'^2 + y'^2 - z'^2 \quad \text{usw.}$$

Damit haben wir alles bereitgestellt, was für die nun folgenden Überlegungen nötig ist, und können den Exkurs beenden.

1.3 Der Minkowski-Raum

Die Einführung der Substitutionen $w = c\,t$ und $w' = c\,t'$ in den Lorentz-Transformationen hat eine wichtige Konsequenz: An die Stelle der Zeiten t und t' treten die Strecken w und w', also die Strecken, die ein Lichtstrahl in den Zeitspannen von 0 bis t bzw. t' zurücklegt (Weg = Geschwindigkeit mal Zeit). Welche Folgen hat das?

1. Die formale Gleichberechtigung der Größen x und w sowie x' und w' in der neuen Form der Lorentz-Transformationen

$$x' = \frac{x - \beta w}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x = \frac{x' + \beta w'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$w' = \frac{w - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad w = \frac{w' + \beta x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

legt den Gedanken nahe, die Größen w und w' – zumal sie ja *Strecken* darstellen – ebenfalls als Koordinaten zu interpretieren. Neben den drei Koordinaten x, y und z ist w dann die vierte Koordinate eines Punktes in einem vierdimensionalen Koordinatensystem K_4 (X, Y, Z, W), und analog ist w' neben x', y' und z' die vierte Koordinate dieses Punktes in einem anderen vierdimensionalen Koordinatensystem K'_4 (X', Y', Z', W'). Beide Koordinatensysteme liegen in einem vierdimensionalen Raum und sind Erweiterungen der beiden dreidimensionalen Koordinatensysteme, die zu den Bezugssystemen S und S' gehören, die relativ zueinander bewegt sind. Dabei sind (x, y, z) die Koordinaten eines Punktes in S, und (x', y', z') die Koordinaten desselben Punktes in S'.

Der vierdimensionale Raum, in dem K_4 und K'_4 liegen, wird Minkowski-Raum oder auch Minkowski-Welt genannt. Diese ist jedoch entgegen der üblichen Interpretation keine *Raum-Zeit,* sondern ein vierdimensionaler Raum mit vier wesensgleichen Dimensionen von der Art LÄNGE.

Es fragt sich nun, welche Bedeutung die vierte Koordinate w bzw. w' hat.

Sie ersetzt die Zeitangabe *t* bzw. *t'*, die im Bezugssystem *S* bzw. *S'* (dem betreffenden Erfahrungsraum) nötig war, um den Zeitpunkt eines Ereignisses, zum Beispiel das Einschlagen eines Blitzes oder das Eintreffen eines Lichtimpulses an einem bestimmten Ort, zu kennzeichnen. An die Stelle einer Zeitangabe tritt im Minkowski-Raum nun die Angabe einer Längenkoordinate *w* bzw. *w'* in der vierten Dimension. Das bedeutet: Ein Ereignis tritt hier nicht zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort des dreidimensionalen Erfahrungsraumes ein, sondern an einem bestimmten Ort des vierdimensionalen Minkowski-Raumes, wobei sich eine Zeitangabe erübrigt. (Der Zeitpunkt des Ereignisses im dreidimensionalen Raum kann bei Bedarf aus der vierten Längenkoordinate *w* berechnet werden: $t = w\mathbin{:}c$).

Dies soll am Beispiel der beiden Blitze (Zweites Gedankenexperiment im Kap. 2.2 von Teil 1) dargestellt werden, die im System *S* gleichzeitig einschlagen. Dabei tritt eine uns schon bekannte Schwierigkeit auf: Es ist uns nicht möglich, ein vierdimensionales Koordinatensystem abzubilden. Wir können uns aber behelfen, indem wir auf die Wiedergabe einer der drei Achsen des Systems *S* – im Allgemeinen der *Z*-Achse – verzichten. Da sich die betrachteten Vorgänge ohnehin nur auf der *X*-Achse abspielen, werden wir zur weiteren Vereinfachung meist auch auf die *Y*-Achse verzichten. (Wer will, kann sich diese auf der Zeichenebene senkrecht stehend und von vorn nach hinten verlaufend denken.)

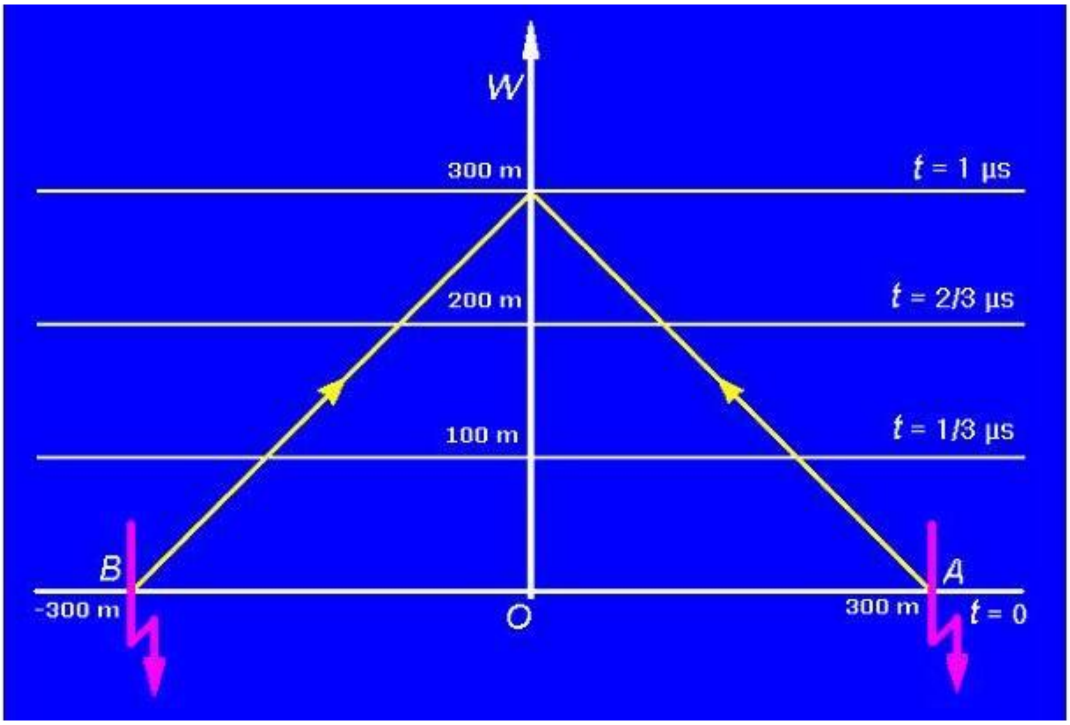

Abb. 4: Weg zweier Lichtimpulse im Minkowski-Raum

Die beiden Blitze schlagen zur Zeit $t_1 = 0$ (ihr entspricht die Koordinate $w_1 = 0$) 300 m links und rechts von *O* ein. Von ihnen gehen zwei Lichtimpulse aus, die sich auf der *X*-Achse mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung *O* bewegen. Sie begegnen einander in *O* zur Zeit $t_2 = 1$ µs. Dieser Zeit t_2 entspricht die *W*-Koordinate $w_2 = 300$ m. Das Zusammentreffen der beiden Lichtimpulse findet also im Minkowski-Raum 300 m *über* dem Ausgangspunkt statt. Da sich aber die beiden Lichtimpulse die ganze Zeit über auf der *X*-Achse bewegt haben, muss sich diese mit entsprechender Geschwindigkeit – nämlich ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit – gleichmäßig nach oben bewegt haben und sich im Moment des Zusammentreffens in 300 m Höhe befinden. Die Wege der Lichtimpulse auf der *X*-Achse stellen sich im Minkowski-Raum daher als zwei um 45° geneigte gerade Linien dar, die vom Einschlagpunkt der Blitze zu dem verschobenen Punkt *O* laufen. Unterwegs befinden sie sich in jedem Moment auf der entsprechend nach oben bewegten *X*-Achse.

In einer wirklichkeitsgetreuen, aber leider unmöglichen vierdimensionalen Darstellung würde sich analog der ganze *XYZ*-Erfahrungsraum mit Lichtgeschwindigkeit längs der *W*-Achse nach oben bewegen.

2. Wir kehren nun zur der letzten Gleichung des Kapitels 1.1 zurück:

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = w'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung kann man so interpretieren:

a) Der vierdimensionale Minkowski-Raum besitzt eine bestimmte pseudoeuklidische Metrik der Art, dass $w^2 - x^2 - y^2 - z^2$ und $w'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$ den Abstand eines Punktes mit den entsprechenden Koordinaten vom Ursprung des jeweiligen Koordinatensystems bedeuten.

b) Das zweite Koordinatensystem ist gegenüber dem ersten um den gemeinsamen Ursprung *O* gedreht.

Leider sind wir jetzt noch nicht in der Lage, das gedrehte Koordinatensystem K'_4 (und sei es auch auf nur zwei Dimensionen reduziert) darzustellen. Das wird später nachgeholt.

3. Unter diesen Annahmen sind die Lorentz-Transformationen die Gleichungen für die Koordinatentransformation beim Übergang von dem einen vierdimensionalen Koordinatensystem zum anderen.

Wie wir an obigem Beispiel gesehen haben, können Ort und Zeit eines Ereignisses eindeutig durch seinen Ort im Minkowski-Raum beschrieben werden. Dabei wird die Zeit des Ereignisses durch die vierte räumliche Koordinate *w* repräsentiert. Das könnte so verstanden werden, als wäre die *W*-Koordinate nur ein Ersatz für die Zeit. Dabei ist es gerade umgekehrt: Da wir uns die Bewegung unseres dreidimensionalen Erfahrungsraumes durch den vierdimensionalen Raum nicht vorstellen können, haben wir zur Erklärung der dabei in unserem Erfahrungsraum auftretenden Veränderungen die Zeit »erfunden«. Dabei ist wichtig, dass unsere Zeitwahrnehmung – der Eindruck, dass kontinuierlich Zeit vergeht – wesentlich mit Veränderungen in unserer Umgebung und in unserem Körper zusammenhängt. In unserem Körper finden ständig Veränderungen statt: der Pulsschlag, die Bewegung von elektrischen Impulsen in Nervenbahnen und viele andere. Gäbe es keine Veränderungen, würden wir wohl auch keine Zeit wahrnehmen. Wir verknüpfen also Veränderungen mit dem Ablauf oder Verrinnen von *Zeit*, wenngleich die Zeit nicht die *Ursache* der Veränderungen ist. Wenn Sie sich dagegen das Beispiel der Ebene vergegenwärtigen, die sich durch eine Kugel bewegt (Abb. 1), dann werden Sie erkennen, dass man sehr wohl eine Veränderung auch mit einer

Bewegung verknüpfen kann. Dann ist die Bewegung sogar die Ursache der Veränderung. Der Einwand, dass Bewegung ohne Zeit nicht denkbar ist, und dass sogar zur Definition der Geschwindigkeit die Zeit benötigt wird (Geschwindigkeit = Weg **:** Zeit), ist nicht unbedingt stichhaltig. Wir sind es lediglich so gewöhnt, und es könnte sehr wohl umgekehrt sein, indem man zum Beispiel die Zeit mit Hilfe der (Licht-)Geschwindigkeit definiert:

Zeit(spanne) = Lichtweg **:** Lichtgeschwindigkeit.

Der Erfahrungsraum (in unserer Abbildung allein durch die *X*-Achse vertreten) ist also ein dreidimensionaler Ausschnitt aus dem vierdimensionalen Minkowski-Raum (mathematisch ausgedrückt: ein dreidimensionaler Schnitt des vierdimensionalen Minkowski-Raumes) und bewegt sich in ihm mit Lichtgeschwindigkeit »aufwärts«. Auf diese Bewegung werde ich später noch genauer eingehen. – Ein Ereignis wird also im Erfahrungsraum genau dann gegenwärtig und erfahrbar, wenn es in den Erfahrungsraum zu liegen kommt, wenn es – in unseren vereinfachten Abbildungen – die *X*-Achse oder die *XY*-Ebene (siehe Abb. 5) durch den entsprechenden »Ereignispunkt« geht. Solange ein Ereignispunkt oberhalb der *XY*-Ebene liegt, ist das Ereignis für einen Beobachter im Erfahrungsraum noch zukünftig; liegt ein Ereignispunkt unterhalb der *XY*-Ebene, dann ist das entsprechende Ereignis für ihn bereits vergangen.

In Wirklichkeit ist der Erfahrungsraum natürlich dreidimensional, aber die Ereignispunkte künftiger Ereignisse liegen auch hier in Richtung der *W*-Achse gesehen »oberhalb« des Erfahrungsraumes, und die Ereignispunkte vergangener Ereignisse liegen in Richtung der *W*-Achse »unterhalb« des Erfahrungsraumes, nur sind »oberhalb« und »unterhalb« für uns nicht vorstellbar.

Anstelle dieser nicht vorstellbaren und nicht wahrnehmbaren Bewegung empfinden wir etwas, das wir den Ablauf der Zeit nennen. Für unsere Wahrnehmung existiert nichts außerhalb des dreidimensionalen Erfahrungsraumes oder »Gegenwartsraumes«, das heißt, es existiert nichts, was nicht im betrachteten (gegenwärtigen) Moment in unserem Erfahrungsraum gegenwärtig ist. Anders ausgedrückt: Von den Inhalten des vierdimensionalen Minkowski-Raumes sind in der Gegenwart für uns nur diejenigen Körper und Ereignisse existent und wahrnehmbar, die momentan dieselbe *W*-Koordinate haben wie unser Erfahrungsraum.

Wenn in unserem Erfahrungsraum sich zwei Bezugssysteme relativ zueinander bewegen, dann sind die ihnen entsprechenden vierdimensionalen Koordinatensysteme gegeneinander gedreht. Die Beschleunigung eines Bezugssystems führt also zu einer Drehung des entsprechenden vierdimensionalen Koordinatensystems. Auch darauf werde ich noch genauer eingehen. Dann wird sich auch zeigen, dass die pseudoeuklidische Metrik dieses Raumes und die relative Drehung der Koordinatensysteme die Ursachen aller relativistischen Effekte sind.

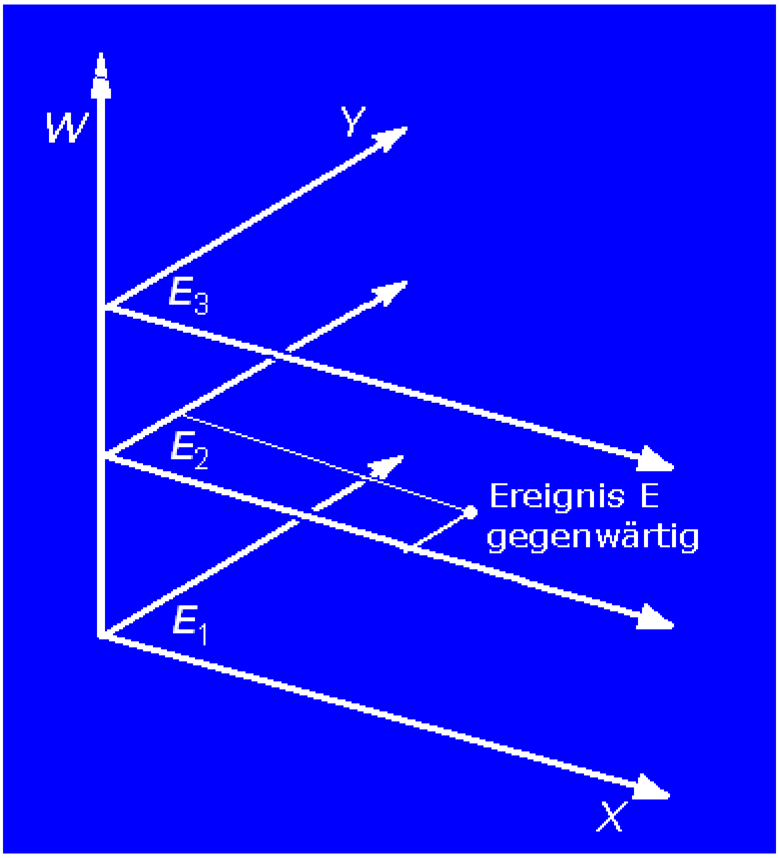

Abb. 5: Bewegung der *XY*-Ebene durch den Minkowski-Raum. Das in der Ebene E_2 gelegene Ereignis E ist für einen Beobachter in der Ebene E_1 noch zukünftig, für einen Beobachter in der Ebene E_3 bereits vergangen und nur für einen Beobachter in der Ebene E_2 gegenwärtig.

2 Grundsätzliche Schwierigkeiten mit dem vierdimensionalen pseudoeuklidischen Raum

Wenn wir unsere Untersuchungen weiterführen und die Ergebnisse anschaulich machen wollen, stoßen wir auf zwei grundsätzliche Schwierigkeiten:

1. Ein vierdimensionaler Raum ist – wie schon dargelegt wurde – für uns zwar denkbar, aber nicht vorstellbar und daher auch nicht zeichnerisch oder sonst wie (etwa durch ein räumliches Modell) darstellbar.

Zwar ist es durch Projektion (z. B. Parallel- oder Zentralprojektion) möglich, dreidimensionale (also räumliche) Gebilde in einer zweidimensionalen Ebene (Zeichenblatt, Leinwand, Fotopapier usw.) darzustellen, und dabei mit einer Dimension weniger auszukommen. In unserer Vorstellung können wir aus der ebenen Abbildung dann wieder ein räumliches Gebilde entstehen lassen. Eine analoge Darstellung eines vierdimensionalen Gebildes mit Hilfe räumlicher, also dreidimensionaler Modelle ist zwar denkbar, aber die Rekonstruktion des vierdimensionalen Gebildes in unserer Vorstellung scheitert, weil wir uns vierdimensionale Körper nicht vorstellen können. So wie räumliches Vorstellungsvermögen und räumliche Erfahrung unerlässlich sind, wenn man im Geiste aus einer zweidimensionalen

Abbildung das dreidimensionale Original rekonstruieren will, so sind vierdimensionale Vorstellungskraft und vierdimensionale Erfahrung nötig, wollte man in der Vorstellung aus einem dreidimensionalen Abbild ein vierdimensionales Gebilde erstehen lassen.

Es bleibt uns daher im Folgenden nur ein Ausweg: Wir müssen bei der Darstellung auf eine der drei räumlichen Dimensionen unseres Erfahrungsraumes verzichten und die dritte Dimension (zum Beispiele die Höhe) zur Abbildung der vierten Dimension benutzen. Häufig werden wir zur Vereinfachung sogar auf zwei unserer gewohnten Dimensionen (nämlich auf Höhe und Breite) verzichten, ohne dass uns dadurch Wichtiges entginge. (Wir haben diese Vereinfachung oben bereits wiederholt benutzt.)

2. Doch selbst wenn wir uns mit der Darstellung von nur zwei Dimensionen (X und W) begnügen, gibt es eine weitere grundsätzliche Schwierigkeit. Die XW-Ebene, die wir abbilden wollen, hat eine bestimmte *pseudoeuklidische* Metrik, während jede Ebene unseres Erfahrungsraumes, die wir zur Abbildung benutzen könnten, *euklidisch* ist. Daher wird auch jedes geometrische Gebilde, das wir in irgendeiner uns verfügbaren Ebene darstellen, diese euklidische Metrik besitzen und widerspiegeln. So wird zum Beispiel in einer euklidischen Ebene die Winkelsumme eines Dreiecks immer 180° sein, und in einem rechtwinkligen Dreieck wird immer diejenige Seite die größte sein, die dem rechten Winkel gegenüber liegt. In einer pseudoeuklidischen Ebene aber kann diese Seite sehr wohl die kleinste sein.

Wie also sollten wir auf unserem »euklidischen« Zeichenpapier jemals Figuren oder Koordinatensysteme darstellen können, deren Eigenschaften einer pseudoeuklidischen Metrik entsprechen? Die Sache scheint aussichtslos zu sein. Jedoch zeigt sich bei genauem Hinsehen, dass die Lorentz-Transformationen eine gewisse formale Ähnlichkeit mit den Transformationsformeln der Analytischen Geometrie für den Übergang von einem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen Koordinatensystem in einer euklidischen Ebene haben. Diese *Ähnlichkeit* der Gleichungen kann zu einer *Identität* gemacht werden, indem man die Einheitsstrecken auf den Achsen des schiefwinkligen Systems in einem ganz bestimmten, von der Relativgeschwindigkeit der Bezugssysteme abhängigen Verhältnis verlängert. Dann werden bei der Abbildung alle im System S' gelegenen Strecken entsprechend verlängert. Unter dieser Bedingung kann dann ein in einer pseudoeuklidischen Ebene gelegenes, um den Winkel α gedrehtes rechtwinkliges Koordinatensystem in einer euklidischen Ebene durch ein schiefwinkliges Koordinatensystem dargestellt werden. (Die mathematischen Details dazu finden Sie im Anhang.) Mit diesem Trick können die relativistischen Effekte, welche die Länge und die Zeit betreffen, in einem gewissen Umfang anschaulich und plausibel gemacht werden. Man sollte sich beim Umgang mit diesen Darstellungen jedoch immer bewusst bleiben, dass es sich hier um einen Behelf handelt, um einen Trick, der zwar nützlich ist, unserer Vorstellungskraft, die auf die euklidische Metrik fixiert und begrenzt ist, physikalische Vorgänge in einem pseudoeuklidischen Raum plausibel zu machen, wenn auch um den Preis starker Verzerrungen. Denken Sie also bitte stets daran, dass die schiefwinkligen Koordinatensysteme, die Sie fortan zu sehen bekommen, in Wirklichkeit rechtwinklig sind, dass die X'-Achse in Wirklichkeit in die entgegengesetzte Richtung gedreht ist und dass die

Veränderung der Einheitsstrecken auf den Achsen des schiefwinklig abgebildeten Koordinatensystems in Wirklichkeit nicht existiert. Nach dieser Warnung stelle ich Ihnen die beiden Koordinatensysteme vor:

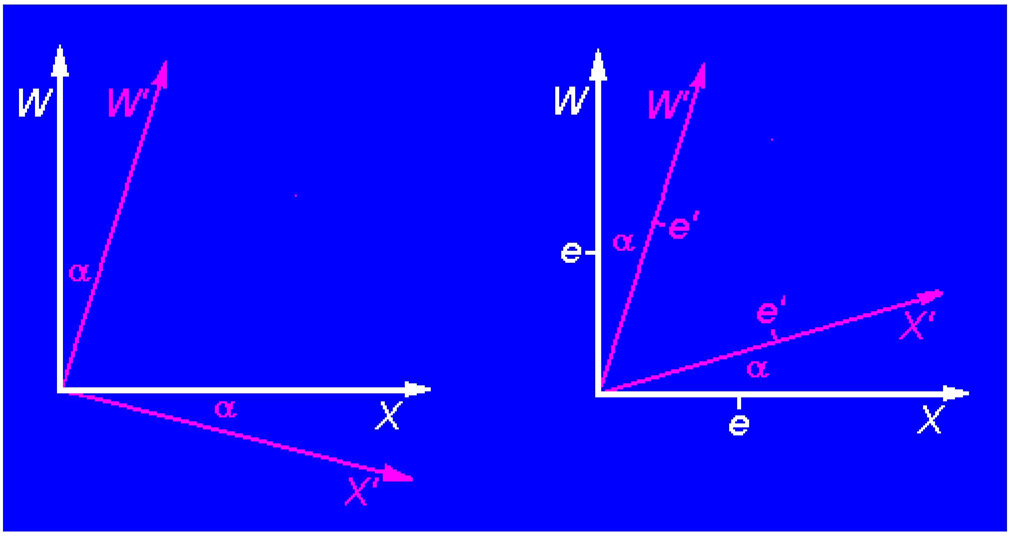

Abb. 6: Abbildung eines (in der pseudoeuklidischen Ebene gelegenen) gedrehten rechtwinkligen Koordinatensystems in eine euklidische Ebene

Die *X'*- und die *W'*-Achse sind um den gleichen Winkel α gedreht, allerdings in entgegengesetzten Richtungen. Der Winkel α hängt von der Relativgeschwindigkeit der beiden Bezugssysteme wie folgt ab:

$$\tan \alpha = v / c = ß$$

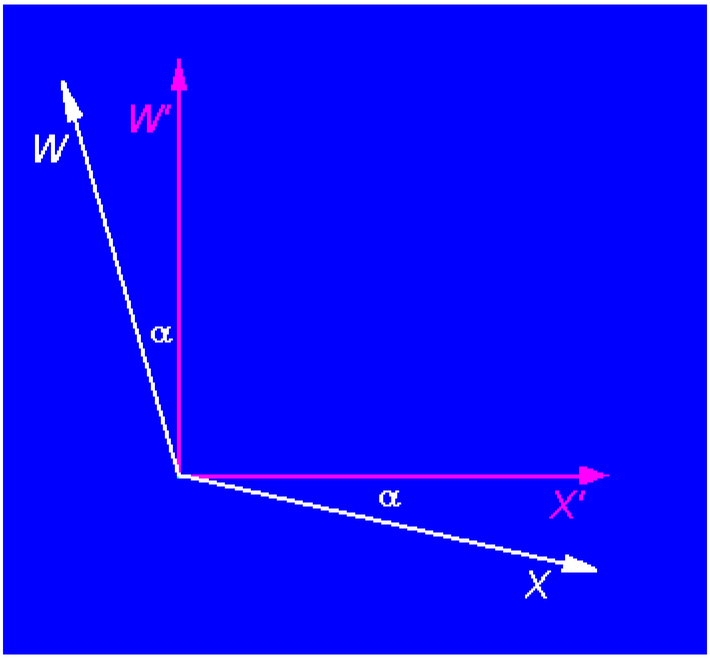

Abb. 7: Das System *S'* wird rechtwinklig dargestellt

Wegen der Gleichberechtigung der Bezugssysteme kann man genauso gut das *X'W'*-System rechtwinklig darstellen und das *XW*-System als entsprechend verzerrt – allerdings mit entgegengesetzt gedrehten Achsen:

Ferner ist zu bedenken, dass die Darstellungen der Abbildungen 6 und 7 nur für die Zeit $t = 0$ gelten. Wie oben beschrieben wurde, bewegen sich die *X*- und die *X'*-Achse an der *W*- bzw. *W'*-Achse mit Lichtgeschwindigkeit nach oben. Wohlgemerkt: Nur die *X*- und die *X'*-Achse (allgemein: die dreidimensionalen Erfahrungsräume) bewegen sich, während der (gemeinsame) Nullpunkt der *W*- und der *W'*-Achse sich nicht bewegt. Das hat zur Folge, dass die Lorentz-Transformationen, die ja den Übergang von einem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen Koordinatensystem mit demselben Ursprung repräsentieren, dieses auch dann noch tun, wenn die Nullpunkte der *X*- und der *X'*-Achse infolge ihrer Bewegung nicht mehr zusammenfallen.

Schließlich möchte ich nochmals daran erinnern, dass die *X*- und die *X'*-Achse lediglich die eindimensionalen Stellvertreter für dreidimensionale Erfahrungsräume sind, nämlich für den *XYZ*-Raum und den relativ dazu bewegten *X'Y'Z'*-Raum. Diese dreidimensionalen Räume können nicht zusammen mit der *W*- und der *W'*-Achse dargestellt werden. Man muss sich also vorstellen, dass sich der *XYZ*-Raum (in dem das Bezugssystem *S* liegt) mit Lichtgeschwindigkeit längs der *W*-Achse nach oben bewegt, während sich der *X'Y'Z'*-Raum (in dem das Bezugssystem *S'* liegt) sich mit derselben Geschwindigkeit längs der *W'*-Achse bewegt. Dabei bewegen sich die Nullpunkte der beiden Räume und Bezugssysteme wie vorausgesetzt mit der Geschwindigkeit v gegeneinander in Richtung der *X*- bzw. *X'*-Achse. (Dies hängt damit zusammen, dass $\tan \alpha = v/c$ ist.) Wenn ich mich fortan in den Abbildungen mit eindimensionalen Erfahrungsräumen begnüge, bitte ich Sie doch, sich immer wieder einmal bewusst zu machen, dass diese nur Stellvertreter für dreidimensionale Erfahrungsräume sind.

3 Erprobung und Anwendung des Minkowski-Raumes

3.1 Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Da die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit für alle Beobachter die Voraussetzung unserer Untersuchungen und Herleitungen war, können wir sie nicht mit Hilfe des Minkowski-Raumes beweisen – das wäre ein Zirkelschluss. Aber wir können die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Minkowski-Raum »verifizieren«, das heißt, wir können zeigen, dass in allen Bezugssystemen im Minkowski-Raum die Lichtgeschwindigkeit tatsächlich dieselbe ist:

Ein Lichtblitz, der zur Zeit $t = 0$ im Ursprung startet und sich nach rechts in Richtung der *X*-Achse ausbreitet, bewegt sich im Minkowski-Raum auf der Winkelhalbierenden der *X*- und *W*-Achse in der Ausgangslage, weil sich die *X*-Achse genauso schnell nach oben bewegt, wie sich der Lichtblitz auf der *X*-Achse nach rechts bewegt.

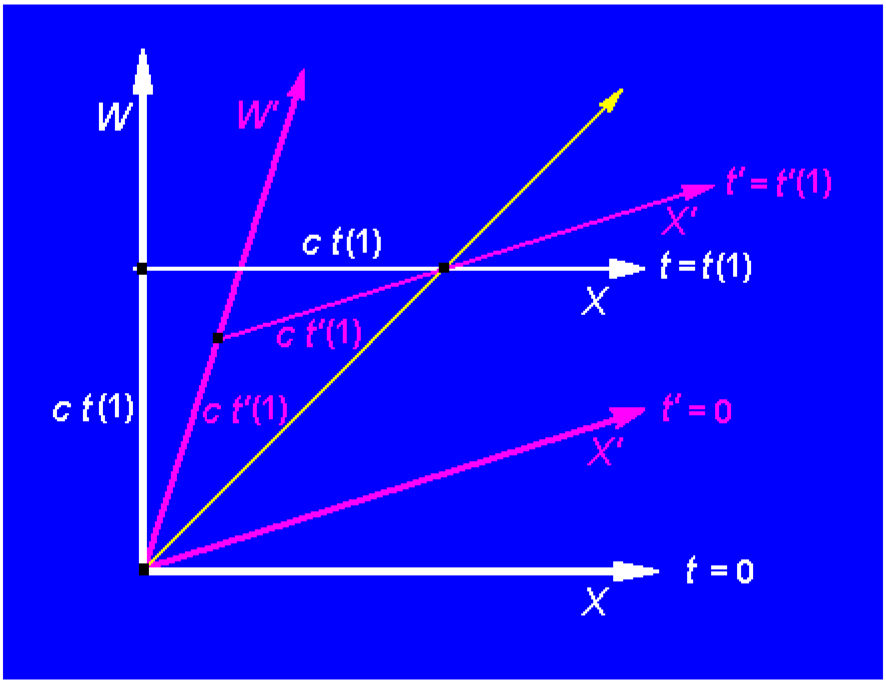

Abb. 8: Bewegung eines Lichtblitzes, der sich auf der *X*-Achse ausbreitet, im Minkowski-Raum

Die Winkelhalbierende der *X*- und *W*-Achse in der Ausgangslage ist aber zugleich auch die Winkelhalbierende der *X'*- und *W'*-Achse. Daher bewegt sich der Lichtblitz auch im System *S'* genauso schnell nach rechts, wie dieses sich nach oben bewegt, also mit Lichtgeschwindigkeit.

3.2 Vergangenheit und Zukunft - Die Relativität der Gleichzeitigkeit

Die Erfahrungsräume bewegen sich im Minkowski-Raum mit Lichtgeschwindigkeit »nach oben«, das heißt in Richtung der vierten Dimension oder in Richtung der *W*- bzw. *W'*-Achse. Was in unserer Vorstellung der Zeit die Zukunft bzw. die Vergangenheit ist, liegt im Minkowski-Raum räumlich über bzw. unter dem Erfahrungsraum. Die momentane Lage des Erfahrungsraumes entspricht für die Beobachter in diesem Raum der Gegenwart. Da die *W'*-Achse gegenüber der *W*-Achse gedreht ist, bewegt sich die *X'*-Achse in einer anderen Richtung durch den Minkowski-Raum als die *X*-Achse. Für das System *S'* liegen Zukunft und Vergangenheit also in einer anderen Richtung des Raumes als für das System *S*. Mathematisch ausgedrückt hat die Richtung der Zukunft im System *S'* eine Komponente in Richtung der *X*-Achse des Systems *S*, das heißt, sie liegt zum Teil in Richtung der *X*-Achse des Systems *S*, also in Richtung des euklidischen Erfahrungsraums des Systems *S*. Dies weist auf eine enge Verbindung und Verwandtschaft dessen, was wir Zeit nennen, mit dem Raum hin.

Entsprechendes gilt für die Drehung der *X'*-Achse, wodurch auch der entsprechende Erfahrungsraum gedreht wird. Diese Drehung erfolgt in Richtung Zukunft (nach oben) oder Vergangenheit (nach unten) des Systems *S*. Je weiter ein Punkt der *X'*-Achse vom Ursprung *O'* entfernt ist, umso weiter befindet er sich gegenüber diesem Punkt in der Zukunft oder der Vergangenheit eines Beobachters in *S*. Für einen Beobachter in *S'* aber bestimmt die Lage seiner X'-Achse, was für ihn gegenwärtig und gleichzeitig ist. Für ihn sind die Punkte der X'-Achse – und nur sie – gegenwärtig (und wahrnehmbar), und alle Uhren der X'-Achse zeigen dieselbe Zeit an.

Umgekehrt befinden sich die Beobachter im System S um so weiter in der Vergangenheit oder Zukunft des Systems S', je weiter sie von O entfernt sind.

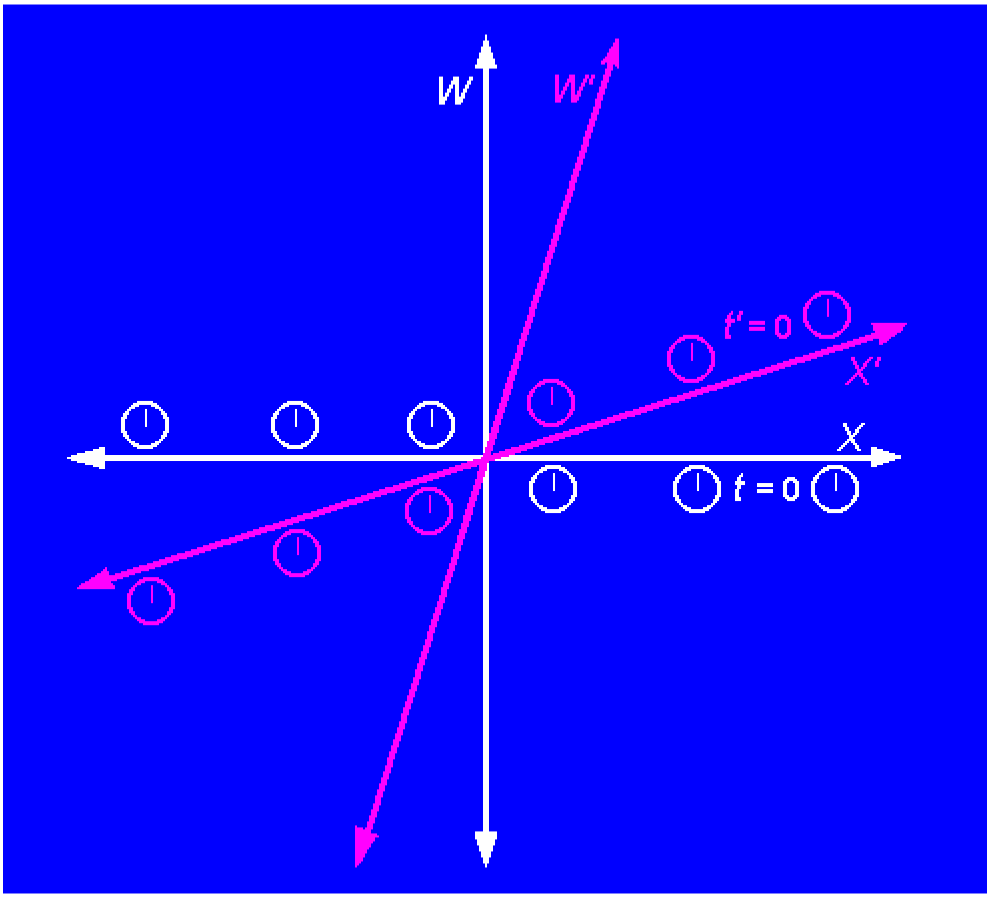

Abb. 9: Die Beobachter in einem System befinden sich in der Gegenwart ihres Systems, aber in der Vergangenheit oder Zukunft des anderen Systems.

Die Drehung der X'-Achse veranschaulicht auch die Relativität der Gleichzeitigkeit. Im System S' sind andere Punkte des Minkowski-Raumes gleichzeitig gegenwärtig als im System S. Anders ausgedrückt: Ereignisse, die im System S gleichzeitig sind, sind es im System S' nicht, und ein Ereignis, das im System S gerade gegenwärtig ist (gerade eintrifft oder geschieht), kann im System S' noch in der Zukunft oder bereits in der Vergangenheit liegen. Dies soll am Gedankenexperiment mit den zwei Blitzen gezeigt werden, die im System S gleichzeitig – und zwar zur Zeit t = 0 – an verschiedenen Punkten der X-Achse einschlagen.

In dem Moment, da der Blitz in A' einschlägt, ist $t' < 0$, und die X'-Achse liegt links von A' in der Vergangenheit des Systems S Im Punkt B' dagegen ist $t' > 0$, und die X'-Achse liegt rechts von B' in der Zukunft des Systems S.

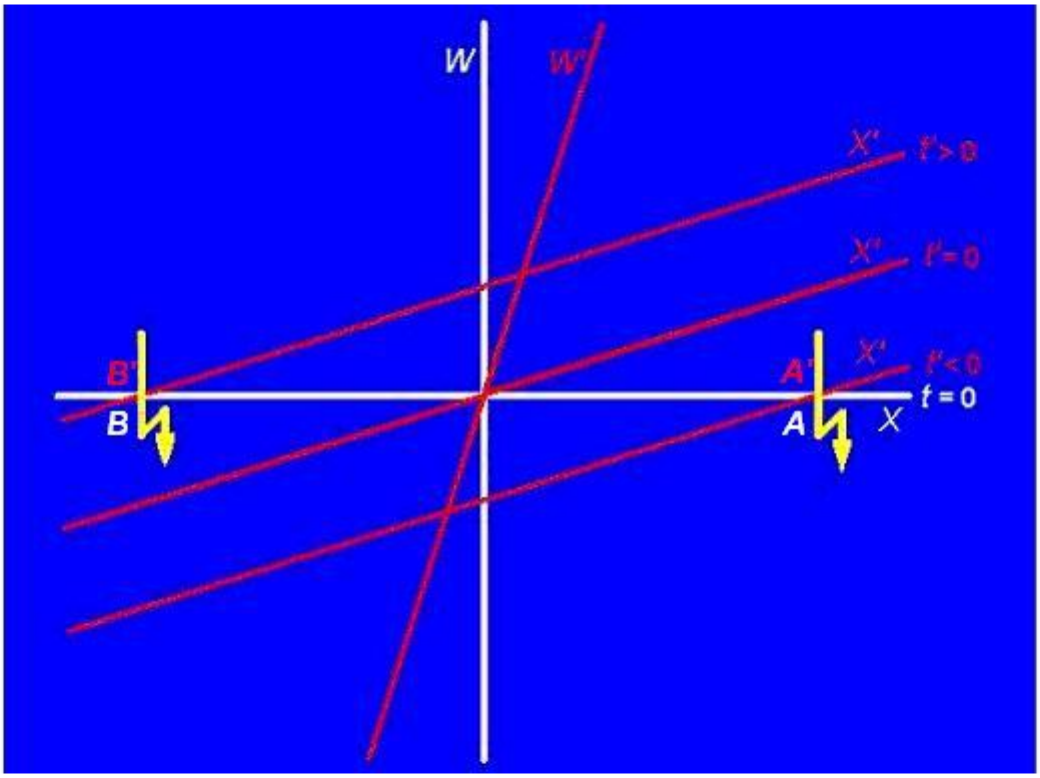

Abb. 10: Zwei Blitzeinschläge, die im System S gleichzeitig erfolgen

3.3 Uhren und Ortskoordinaten in beiden Systemen

Es sollen nun mit Hilfe des Minkowski-Raumes die im Kapitel 4.4 des 1. Teils dargestellten Ergebnisse untersucht werden. Insbesondere fragen wir: Wie können die dort berechneten und dargestellten unterschiedlichen Anzeigen der Uhren und die Veränderungen der Ortskoordinaten »erklärt« werden?

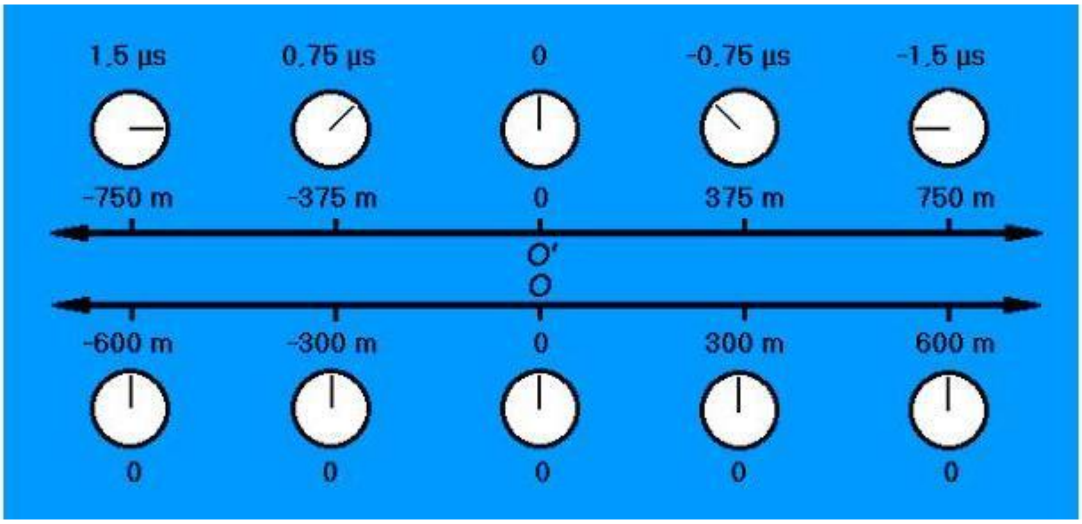

Abb. 11: Identisch mit der Abb. 16 aus Kap.4.4 des 1. Teils

Dazu müssen wir etwas ausholen. Ich muss zunächst daran erinnern, dass für einen Beobachter im System *S* nur gegenwärtig und wahrnehmbar ist, was in den Punkten seiner *X*-Achse (allgemeiner: seines Erfahrungsraumes, also des *XYZ*-Raumes) anwesend ist. Alles, was »darüber« liegt oder geschieht, ist für ihn noch zukünftig, alles, was »darunter« liegt oder geschieht, ist für ihn bereits vergangen.

Wenn nun die *X'*-Achse gegenüber der *X*-Achse um den Nullpunkt gedreht wird, so hat das zur Folge, dass alle Punkte der *X'*-Achse (außer *O'*) aus dem Erfahrungsraum des Beobachters in *S* verschwinden. (Übrigens: Dieses Problem scheint es für Minkowski und seine Nachfolger gar nicht gegeben zu haben: Sie interpretieren die Drehung der *X'*-Achse ja lediglich als eine »Drehung in der Zeit«.) Die tatsächlich erfolgende Drehung im Raum allerdings scheint der Erfahrung völlig zu widersprechen: Ein schnell bewegter Zug zum Beispiel verschwindet nicht von den Schienen und aus unserer Wahrnehmung. (Und es wäre auch gar nicht einzusehen, warum gerade der ganz willkürlich gewählte Nullpunkt sichtbar bleiben sollte.) Nein – es bleiben sämtliche Punkte des Zuges (der *X'*-Achse) – auf dem Bahndamm (der *X*-Achse) anwesend, aber die verschiedenen Punkte des Zuges stammen aus verschiedenen Zeiten oder – im Minkowski-Raum gesehen – aus verschiedenen Höhenlagen in der vierten Dimension (der *W'*-Achse). Dies soll hier für die wichtigsten Punkte (*O*, *A*, *B*, *C*, und *D*) dargestellt werden. Man muss sich jedoch vorstellen, dass durch jeden Punkt der *X*-Achse eine *X'*-Achse aus einer anderen Zeit – mit einer anderen *W'*-Koordinate – geht.

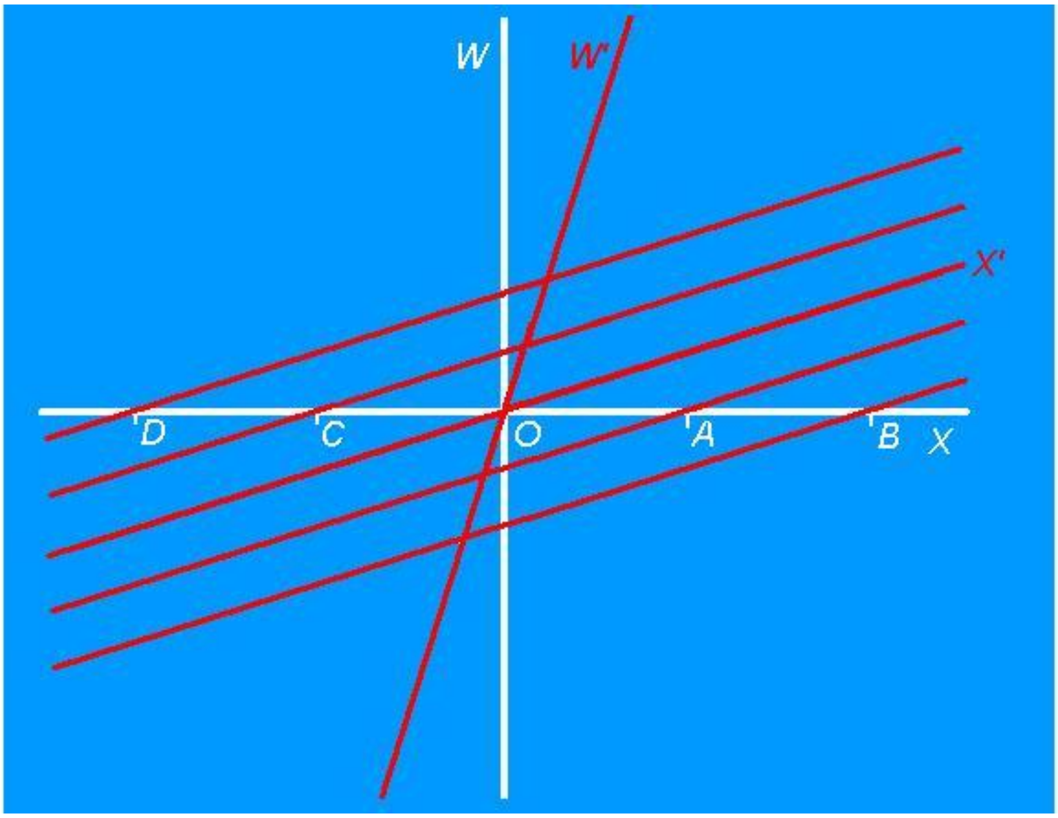

Abb. 12: Durch jeden Punkt der *X*-Achse geht eine *X'*-Achse aus einer anderen Zeit

Das bedeutet aber: Wir müssen uns im Minkowski-Raum eine Ebene vorstellen, die dicht mit *X'*-Achsen ausgefüllt ist, von denen jede aus einer anderen Zeit stammt und die alle gleichzeitig anwesend sind – wenngleich ein Beobachter in *S* von jeder jeweils nur einen einzigen Punkt wahrnimmt.

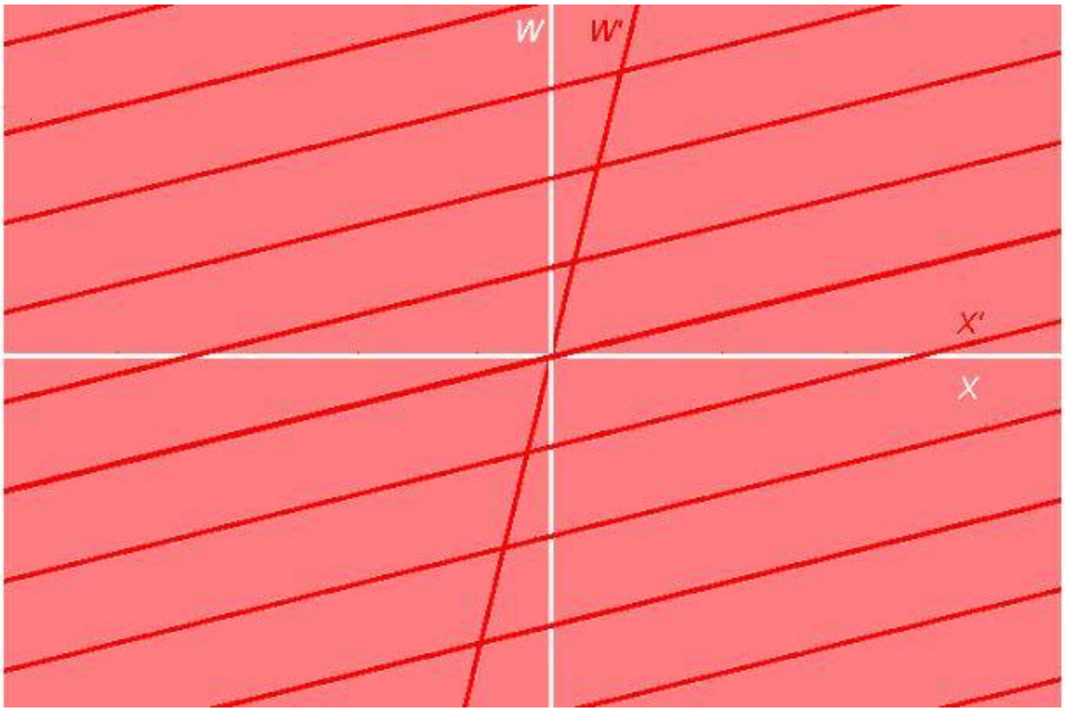

Abb. 13: Eine Ebene von *X'*-Achsen im Minkowski-Raum

Dies ist ein Hinweis darauf, dass unser Erfahrungsraum tatsächlich nur ein dreidimensionaler Ausschnitt aus einer vierdimensionalen Realität ist. Der von uns wahrgenommene und als gegenwärtig empfundene Ausschnitt bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit durch die vierdimensionale Realität. Zwei relativ zueinander bewegte Erfahrungsräume bewegen sich in verschiedenen Richtungen durch die vierdimensionale Realität. Jeder dreidimensionale Erfahrungsraum steht auf seiner Bewegungsrichtung stets senkrecht und wird daher bei Änderung der Bewegungsrichtung – der Richtung seiner *W*-Achse – ebenfalls gedreht. Damit aber ändert sich der Schnitt durch die vierdimensionale Realität. Als Folge davon werden in dem einen Erfahrungsraum andere Gegenstände und Ereignisse als gleichzeitig vorhanden oder gegenwärtig wahrgenommen als im anderen Erfahrungsraum. (Auch dies ist ein Effekt, der von Minkowski nicht erwähnt wird. Die späteren Autoren scheinen dann einer vom anderen abgeschrieben zu haben, ohne selbst allzu viel nachgedacht zu haben.)

Diese Überlegungen führen zu dem Ergebnis, dass alle Ereignisse und alle Körper nicht nur für die Dauer ihrer Anwesenheit in unserem Erfahrungsraum existieren, sondern bereits zuvor und noch danach vorhanden sind. (Dies schließt nicht aus, dass Körper und Ereignisse in einem bestimmten Bereich der Zukunft von unserem jeweils gegenwärtigen Ort aus beeinflusst werden können.) Das bedeutet: Die von uns wahrgenommenen Körper sind dreidimensionale Schnitte von vierdimensionalen Körpern, die im Minkowski-Raum fortwährend anwesend sind. Durch die Bewegung unseres Erfahrungsraumes beobachten wir zeitliche Veränderungen an den dreidimensionalen Schnitten dieser Körper, die (wie die Veränderungen des Kreises in Abbildung 1) nur durch die Bewegung unseres Erfahrungs- oder Wahrnehmungsraumes zustande kommen. Dieser ist identisch mit der Gesamtheit dessen, was wir in einem gegebenen Augenblick wahrnehmen (oder jedenfalls wahrnehmen könnten). Dies führt direkt zu der Annahme, dass sich im Grunde lediglich unser Bewusstsein (genauer: das, was die Psychologie als Gegenwartsbewusstsein bezeichnet) durch den Minkowski-Raum bewegt.

Inzwischen gibt es eine ganze Reihe von wissenschaftlichen Beobachtungen, die diese Überlegungen stützen und die unter striktesten Bedingungen gewonnen wurden. Eine Zusammenfassung dieser Beobachtungen (sowie zahlreiche Quellenangaben dazu) finden sich im Kapitel 9 von Lynne McTaggart, Das Nullpunkt-Feld, München 2007.

Mit der unterschiedlichen Beurteilung der Gleichzeitigkeit hängt auch die unterschiedliche Wahrnehmung der Ausdehnung von Körpern in der Bewegungsrichtung zusammen. Um dies deutlich zu machen, müssen wir überlegen, wie eigentlich die Länge eines Körpers gemessen wird. Wenn der Körper sich relativ zum Beobachter nicht bewegt, ist die Sache kein Problem. Die Lage des Anfangs- und des Endpunkts des Körpers wird auf einem Maßstab (zum Beispiel auf der *X*-Achse) abgelesen und dann der Abstand der beiden Marken berechnet. Er ist dann die Differenz der Koordinaten der beiden Punkte:

$$l = x_2 - x_1 .$$

Was aber, wenn sich der Körper am Beobachter vorbei bewegt? Nun, der Messvorgang bleibt der gleiche, nur muss man jetzt strikt darauf achten, dass die Ablesung der Anfangskoordinate $x(A)$ und die der Endkoordinate $x(E)$ auf dem Maßstab genau zur selben Zeit geschieht. Liest man die Anfangskoordinate früher ab als die Endkoordinate (in der Abbildung rot gezeichnet), erhält man für die Länge einen zu kleinen Wert; liest man die Anfangskoordinate dagegen später ab als die Endkoordinate (grün gezeichnet), erhält man einen zu großen Wert.

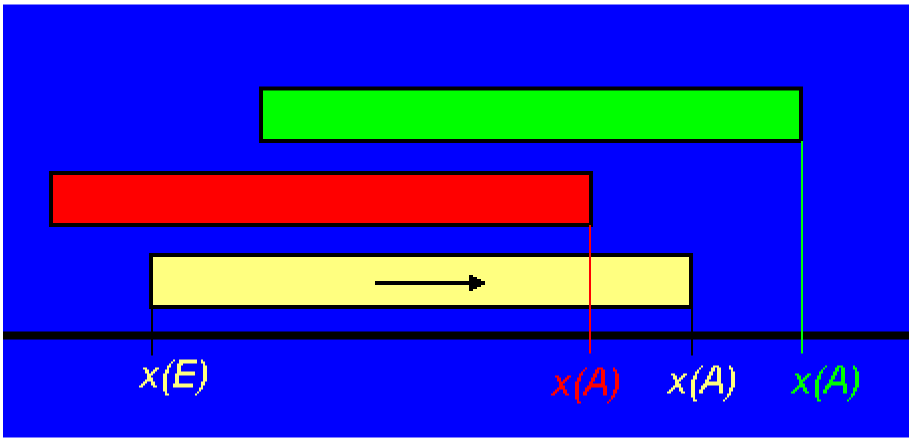

Abb. 14: Messung der Länge eines bewegten Stabes

Was aber, wenn sich die Beobachter in zwei Bezugssystemen nicht darüber einig sind, was für sie »gleichzeitig« ist – und zwar nicht wegen fehlerhafter Uhren, sondern wegen der grundsätzlichen Relativität der Gleichzeitigkeit? Nun, dann hat der Körper für die beiden Beobachter eben unterschiedliche Längen. Man beachte dabei, dass die Längen tatsächlich unterschiedlich *sind* und es nicht nur zu sein *scheinen.*

Auch dies soll im Minkowski-Raum dargestellt werden.

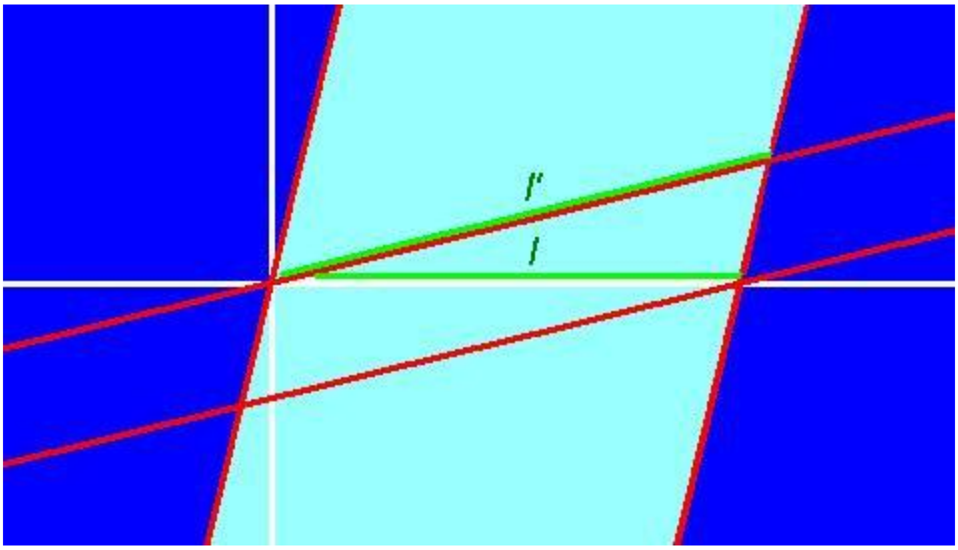

Abb. 15: Die Relativität der Länge als Folge der Relativität der Gleichzeitigkeit

Wie man sieht, liest der Beobachter in *S* – von *S'* aus beurteilt – die Lage des Punktes *A* zu früh ab und erhält daher für die Strecke *OA* einen zu kleinen Wert.

Auch der direkte Vergleich der Strecken in der Zeichnung nach dem Augenschein zeigt, dass die Strecken in *S* kürzer ausfallen als in *S'*, selbst wenn man berücksichtigt, dass auf der *X'*-Achse eine andere Einheitslänge gilt.

Auch hier erkennt man, dass die betrachteten Strecken im Grunde (eindimensionale) Schnitte von (zweidimensionalen) schrägen Streifen im Minkowski-Raum sind, und dass in beiden Systemen diese Streifen anders geschnitten werden und daher die Schnitte unterschiedliche Längen haben.

3.4 Uhrenvergleich

Verfolgen wir nun den Uhrenvergleich (Kap. 4.3 des 1. Teils) im Minkowski-Raum:

1. Die Uhr im Nullpunkt des Systems *S'* werde von *S* aus beobachtet und zur Zeit $t = 0$ und dann zur Zeit $t = 1$ μs mit der ihr gegenüberstehenden Uhr des Systems *S* verglichen. Im Minkowski-Raum stellt sich das so dar:

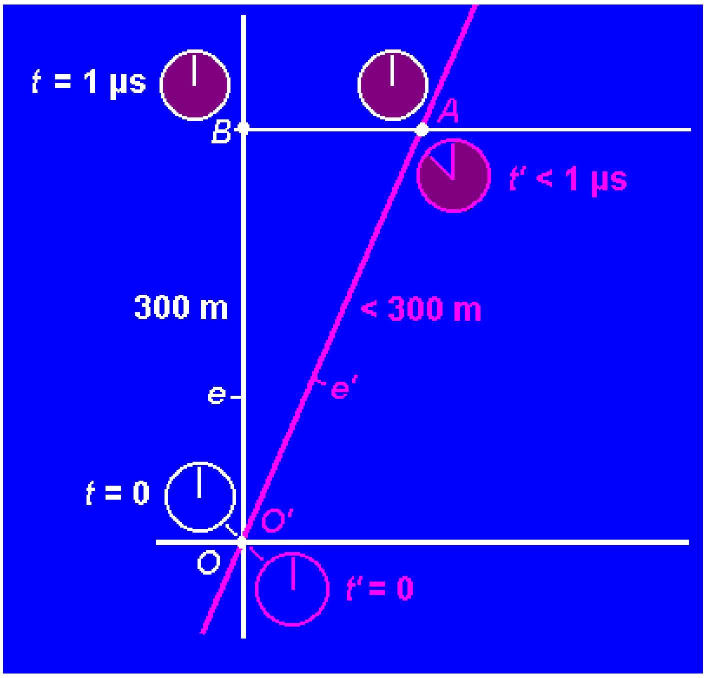

Abb. 16: Uhrenvergleich

Die betrachtete Uhr im System *S′* bewegt sich in einer Sekunde von *O′* nach *A*.

Die Strecke $O'A = w'_1$ ist in der Abbildung größer als die Strecke $OB = w_1$. Tatsächlich ist sie (genauer: ihr Zahlenwert) jedoch kleiner als w_1, weil die Einheitsstrecke e' größer ist als e. Also ist die entsprechende Zeit t'_1 kleiner als 1 µs. (Die Verlängerung von e' gegenüber e ist in der Zeichnung erkennbar; genauere Angaben darüber im Anhang.)

Eine Erklärung der Verlangsamung der Uhren – und das bedeutet letztlich: des gesamten Zeitablaufs im System *S′* – für einen Beobachter im System *S* ist folgende: Beide Bezugssysteme bewegen sich im Minkowski-Raum mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung »ihrer« vierten Dimension, in Richtung »ihrer« Zukunft. Von *S* aus beurteilt hat die Bewegung des Systems *S′* jedoch eine Komponente in Richtung der *X*-Achse, also ist ihre Bewegung in Richtung der *W*-Achse – das heißt, in Richtung Zukunft des Systems *S* – verlangsamt. Anders gesagt: Das System *S′* bewegt sich für einen Beobachter in *S* langsamer in Richtung Zukunft als das System *S*, was zur Folge hat, dass für einen Beobachter in *S* die Zeit in *S′* langsamer abläuft und die Uhren langsamer gehen.

Die »Dilatation« der Zeit lässt sich auch durch eine einfache Rechnung aus der pseudoeuklidischen Struktur des Raumes herleiten: Der Punkt *A* hat in den beiden Koordinatensystemen die Koordinaten

$$x_1 = v \cdot 1\ \mu s; \quad w_1 = c \cdot 1\ \mu s; \quad x'_1 = 0; \quad w'_1 = c \cdot t'_1.$$

Wegen der pseudoeuklidischen Metrik ist

$$w^2 - x^2 = w'^2 - x'^2$$

Mit den entsprechenden Werten und $x'_1 = 0$ ergibt sich:

$$w_1^2 - x_1^2 = w'^2_1$$

woraus folgt, dass $w'_1 < w_1$ ist.

Setzt man die oben stehenden Werte ein, so findet man

$$w'_1 = w_1\sqrt{1-\beta^2}.$$

2. Das Entsprechende gilt natürlich auch, wenn wir den Vorgang vom System S' aus betrachten. Nun kommt das System S in Richtung Zukunft (des Systems S') langsamer voran. Das sieht dann so aus: Wir betrachten vom System S' aus die Uhr, die im Nullpunkt des Systems S ruht, nach 1 Mikrosekunde – gemessen in S'.

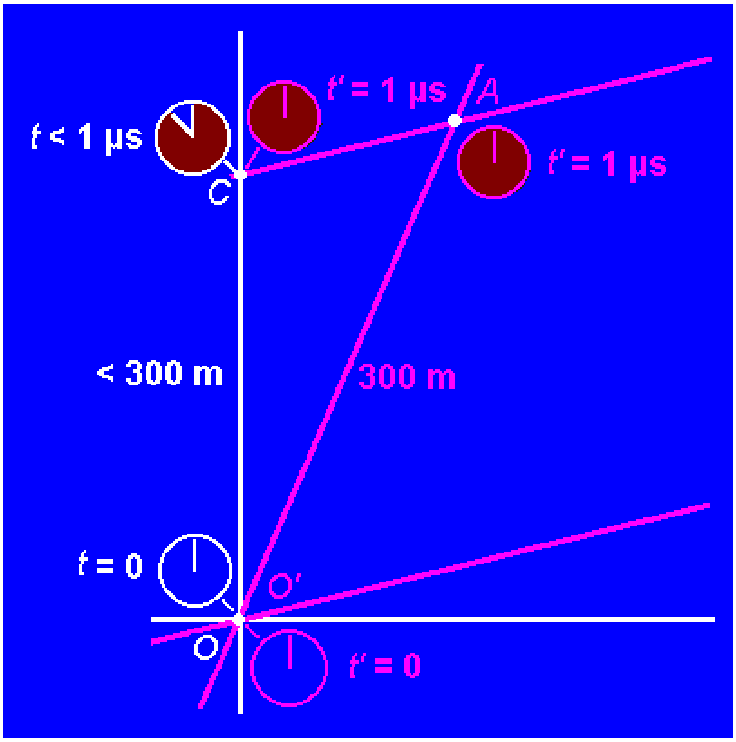

Abb. 17: Uhrenvergleich vom System S' aus

Hier ist die Strecke OC kleiner als die Strecke OA, also geht jetzt die Uhr in S gegenüber der Uhr in S' langsamer, und zwar im gleichen Maß wie vorher bei vertauschten Systemen. Dies ist kein Widerspruch zu dem oben Gesagten, denn einmal wird bei dem Uhrenvergleich der Gleichzeitigkeitsbegriff des Systems S benutzt (Beobachter in A), beim anderen Mal der des Systems S' (Beobachter in C). Zudem gibt es eine systemunabhängige Beschreibung des Effekts, die für beide Fälle zutrifft: Es geht diejenige Uhr langsamer, die sich gegenüber dem Beobachter bewegt. Im ersten Fall bewegt sie sich relativ zur X-Achse, im zweiten Fall relativ zur X'-Achse. Je größer der Weg ist, den die Uhr dabei auf der X-Achse bzw. der X'-Achse zurückgelegt hat, desto langsamer geht die Uhr.

3.5 Das so genannte Zwillingsparadoxon

Unter dem Zwillingsparadoxon versteht man folgende Kuriosität: Einer von zwei Zwillingsbrüdern reist eine längere Zeit mit großer Geschwindigkeit umher. Nach der Rückkehr ist er weniger gealtert als sein Bruder. Bei entsprechender Geschwindigkeit ist es zum Beispiel möglich, dass der eine Bruder zehn Jahre älter geworden ist, der andere aber nur fünf.

Als paradox – als in sich widersprüchlich – wird dieser Vorgang bezeichnet, weil in den frühen Jahren der Relativitätstheorie ihre Kritiker glaubten, die Theorie widerlegen zu können, indem sie auf einen – scheinbaren – Widerspruch hinwiesen. Sie meinten, wegen der von der Relativitätstheorie behaupteten Gleichberechtigung der Bezugssysteme müsse jeder der beiden Brüder jünger geblieben sein als der andere, und das wäre natürlich widersprüchlich.

Schon Einstein hat darauf geantwortet, die Bezugssysteme der beiden Brüder seien nicht in jeder Hinsicht gleichberechtigt. Zwar sei die Lichtgeschwindigkeit nach wie vor in beiden Systemen dieselbe, aber das eine System habe (nämlich bei seiner Umkehr) eine Beschleunigung erfahren, und das andere nicht. Daher sei auch nur einer der beiden Brüder jünger geblieben als der andere. (Was Einstein dabei nicht bedacht hat: Der reisende Bruder hat schon beim Start eine Beschleunigung erfahren, die seine Uhr absolut – und nicht nur relativ – verlangsamt hat. Eine genaue Untersuchung findet sich in: »Das Zwillingsparadoxon – einmal genau betrachtet« auf dieser Website.

Der Vorgang lässt sich (wenn auch vereinfacht) im Minkowski-Raum sehr anschaulich zeigen. Ich stelle dazu zwei Fälle einander gegenüber. Im ersten Fall entfernt sich der eine Bruder – Moritz – zunächst vom Ausgangspunkt, kehrt dann irgendwann um und fährt zurück.

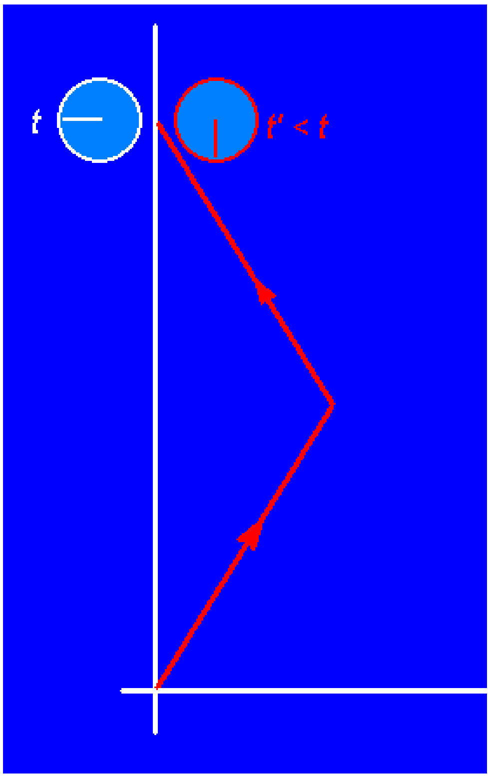

Abb. 18: Moritz kehrt zu Max an den Ausgangspunkt zurück.

Die beiden Brüder könnten aber auch dadurch wieder zusammenkommen, dass der erste Bruder – Max – dem anderen nachreist und ihn schließlich einholt. Das sieht im Minkowski-Raum dann etwa so aus:

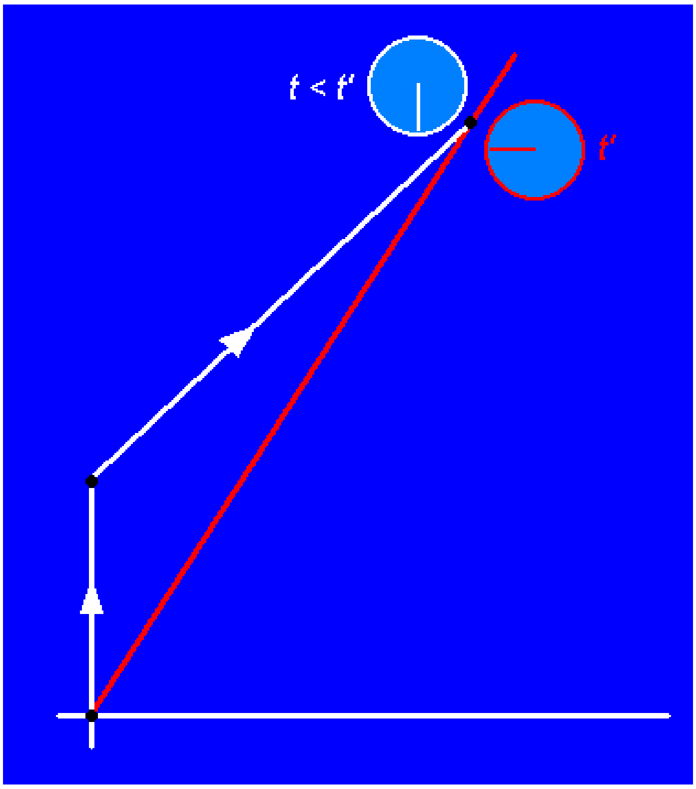

Abb. 19: Max reist Moritz nach und holt ihn ein.

Beide Fälle sind objektiv sehr wohl voneinander zu unterscheiden, nämlich daran, dass die eine Bahn geknickt (oder gekrümmt) ist, die andere dagegen nicht. Anders ausgedrückt: Es ist objektiv entscheidbar, welcher von den beiden Brüdern zum Ausgangspunkt und damit zum anderen *zurückkehrt*. Und (nur) der Rückkehrer ist derjenige, der weniger altert. Im ersten Fall (Abb. 18) ist dies Moritz, im zweiten Fall dagegen Max. Also: Reisen bildet nicht nur, es erhält auch jünger.

Der eigentliche Grund dieses Effektes liegt wiederum in der pseudoeuklidischen Struktur des Raumes: Wer im Minkowski-Raum einen Umweg zwischen zwei Punkten macht, braucht dazu weniger Zeit. Wer sich auf dem geraden Weg bewegt, braucht am längsten.

Dies lässt sich durch eine einfache Rechnung belegen. Wir betrachten dazu erst den unteren Teil der folgenden Abbildung:

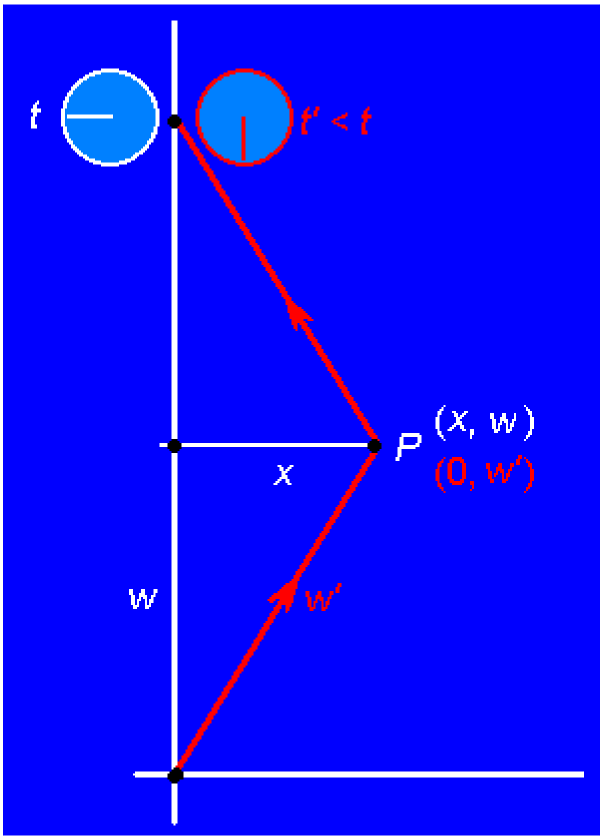

Abb. 20

Der Punkt P habe im System S die Koordinaten (x, w) und im System S' die Koordinaten ($x = 0$, w'). Wegen der Metrik des Raumes gilt:

$$w'^2 - x'^2 = w^2 - x^2$$

und mit $x' = 0$:

$$w'^2 = w^2 - x^2 \quad \text{und somit} \quad w'^2 < w^2$$

Für die obere Hälfte der Abbildung gilt wegen der Kongruenz der beiden Teildreiecke dasselbe. Ein entsprechendes Ergebnis kann auch für unsymmetrische Figuren und – mit etwas mehr Mathematik – auch für beliebig gekrümmte Bahnen gewonnen werden.

4 Zusammenfassung und Schluss

Aus diesen Beispielen geht hervor, dass die relativistischen Effekte direkt oder – im Fall der Relativität der Länge – indirekt

1. auf der pseudoeuklidischen Struktur des Minkowski-Raumes und
2. auf der Bewegung der Erfahrungsräume mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung ihrer *W*-Achse

beruhen und (nur) daraus erklärt werden können.

Der einzige noch nicht daraufhin überprüfte Effekt ist das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten. Im Anhang wird gezeigt, dass auch dieses Additionstheorem auf den eben genannten Voraussetzungen beruht.

Der Wert der Lichtgeschwindigkeit – fast 300 000 km/s – kann aus der Metrik des Raumes allerdings nicht erklärt werden. Er hängt mit der elektrischen Feldkonstanten ε_0 und der magnetischen Feldkonstanten μ_0 zusammen, die bis heute nicht auf elementarere Größen zurückgeführt werden konnten. Nach der Maxwellschen Theorie ist

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Damit bin ich fast am Ende meiner Untersuchung. Am Anfang stand Einsteins Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen und die damit verbundene Gleichberechtigung aller Bezugssysteme. Es zeigte sich, dass aus dieser Annahme der Verzicht auf die Vorstellung eines absoluten Raumes und einer absoluten Bewegung folgt und dass elementare Transformationsgleichungen der klassischen Physik (die Galilei-Transformationen) durch andere (die Lorentz-Transformationen) ersetzt werden müssen.

Die Anwendung der Lorentz-Transformationen statt der Galilei-Transformationen beim Übergang von einem Bezugssystem zu einem relativ dazu bewegten liefert zwar die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen, hat dafür aber schwer verständliche und nahezu unerträgliche Konsequenzen: Die Preisgabe der Absolutheit der Zeit und der Gleichzeitigkeit, die Relativität der Länge und schließlich die so genannte Äquivalenz von Masse und Energie. Damit war eine Revolution der Grundlagen der Physik verbunden. Trotzdem wurde die Spezielle Relativitätstheorie nach einiger Zeit allgemein akzeptiert, nicht nur weil sie etliche, seit geraumer Zeit bestehende Widersprüche auflöste und unerklärliche Beobachtungen verständlich machte, sondern weil auch alle die von ihr behaupteten Effekte durch hochpräzise Messungen vollkommen bestätigt wurden.

Minkowski wies dann durch eine geniale Vision den Weg zur Verknüpfung von Raum und Zeit im vierdimensionalen Minkowski-Raum. Schade, dass er selbst bei den ersten Schritten auf diesem Weg gestolpert ist und die wahre Natur der vierten Dimension nicht erkannt hat. Da dieser Irrtum keine *praktischen* Konsequenzen hat, blieb er lange unbemerkt und wird, wo immer er sich zeigt, durch weitere Fehler kaschiert. Dabei liegt es auf der Hand und ist für jeden erkennbar, dass das Produkt aus der Lichtgeschwindigkeit und einer Zeitspanne nicht wiederum eine Zeitspanne, sondern eine Wegstrecke ist. Und damit ist die vierte Dimension des Minkowski-Raumes ihrer Natur nach keine *Zeit*, sondern eine *Länge*. Somit ist die Drehung des vierdimensionalen Koordinatensystems keine »Drehung in der Zeit«, wie die Schüler Minkowskis noch immer annehmen, sondern eine Drehung im Raum. Dies hat zur Folge, dass die Inhalte des Minkowski-Raumes – Gegenstände wie Ereignisse – bereits vorhanden sein müssen, *bevor* wir sie wahrnehmen, und dass sie noch immer vorhanden sind, *nachdem* wir sie wahrgenommen haben.

Die Aussage: »Der von uns wahrgenommene dreidimensionale Erfahrungsraum bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit durch den vierdimensionalen Minkowski-Raum« bedeutet genau genommen: »Der von uns wahrgenommene Ausschnitt des Minkowski-Raumes bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit durch diesen Raum«, und das bedeutet im Grunde, dass sich unser

Bewusstsein (oder Gegenwartsbewusstsein) durch diesen Raum bewegt und daher fortwährend wechselnde Gegenstände im Minkowski-Raum (dreidimensional) wahrnimmt.

Allerdings könnte man mit Recht einwenden, die ganze Konzeption des Minkowski-Raumes beruhe auf ein paar kühnen Interpretationen (siehe Kap. 1.3), die zwar einleuchtend, aber nicht unbedingt zwingend seien. (Die Konsequenz wäre dann, den Minkowski-Raum aus der Speziellen Relativitätstheorie zu verbannen, was bisher jedoch noch niemand ernsthaft erwogen hat.) Um diesem Einwand zu begegnen und um zugleich die Richtigkeit meiner konsequenten Interpretation der Arbeiten Minkowskis zu bestätigen, habe ich weitere Überlegungen angestellt und bin ich gleichsam den umgekehrten Weg gegangen: Statt die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit vorauszusetzen, die Konsequenzen dieser Annahme zu untersuchen und schließlich mit einigen gewagten Interpretationen zum Minkowski-Raum zu gelangen, bin ich von folgendem Postulat ausgegangen:

Irgendein in unserem Erfahrungsraum liegendes Bezugssystem bewege sich mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung der vierten Dimension (W) eines pseudoeuklidischen Raumes mit der oben beschriebenen Metrik.

Aus dieser einzigen Voraussetzung lässt sich dann ableiten:

1. Alle anderen Bezugssysteme sind nach Maßgabe ihrer Relativgeschwindigkeit gegenüber dem ersten gedreht und bewegen sich ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit im vierdimensionalen Raum, und zwar in Richtung ihrer jeweiligen *W*-Achse.

2. In allen Bezugssystemen hat die Lichtgeschwindigkeit denselben Wert. Die Bezugssysteme sind also gleichberechtigt. (Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und damit die Gleichberechtigung aller Systeme ist – wie sich dabei zeigt – zwingend an die Voraussetzung gebunden, dass das erste System sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt.)

3. Die Transformationsgleichungen für den Übergang von einem System zum anderen sind identisch mit den Lorentz-Transformationen.

4. Daraus ergeben sich alle übrigen Konsequenzen der Speziellen Relativitätstheorie.

Die mathematischen Details hierzu finden Sie im Anhang.

Ich würde mich freuen, wenn Leser sich zu meinen Gedanken äußern und mir schreiben würden. Jeden sachlichen Beitrag werde ich beantworten. Für Verbesserungs- und Ergänzungsvorschläge bin ich sehr dankbar.

Die im Text erwähnten Anlagen sind im Anhang aufgelistet. Sie können beim Verfasser angefordert werden.

Nachwort: 1. Inzwischen gibt es eine ganze Reihe von wissenschaftlichen Beobachtungen, die diese Überlegungen stützen und die unter striktesten Bedingungen gewonnen wurden. Eine Zusammenfassung dieser Beobachtungen (sowie zahlreiche Quellenangaben dazu) finden sich im Kapitel 9 von Lynne McTaggart, Das Nullpunkt-Feld, München 2007, einem Buch, dessen anderen Kapiteln ich nicht durchwegs zustimme.

2. Einstein wusste (wie hätte es auch anders sein können?) von dem hier geschilderten Wesen der Zeit. Allerdings sind nur zwei schriftliche Äußerungen von ihm dazu bekannt, und so kommt es, dass dieses Wissen im Bewusstsein der Physiker niemals angekommen ist und nicht einmal in Vergessenheit geraten konnte, weil es nie bekannt war: Drei Wochen vor seinem Tod schrieb Einstein der Witwe seines gerade verstorbenen Freundes Besso: »Für uns gläubige Physiker hat die Scheidung zwischen Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft nur die Bedeutung einer wenn auch hartnäckigen Illusion.« (Zit. nach Fölsing, Albert Einstein, Suhrkamp TB, 1999, S. 828.) Und: »Die Physik wird aus einem Geschehen im dreidimensionalen Raum gewissermaßen ein Sein in der vierdimensionalen „Welt".« (Einstein, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, 11. Auflage, Braunschweig 1921, S. 83.)

Anhang

Anlage 1: Das Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Anlage 2: Die Relativität der Beschleunigung

Anlage 3: Die Masse eines bewegten Körpers und die Trägheit der Energie

Anlage 4: Die Länge der Einheitsstrecken *e* und *e′* in den Koordinatensystemen des Minkowski-Raumes

Anlage 5: Herleitung der Ergebnisse der Speziellen Relativitätstheorie aus der Annahme, unser Erfahrungsraum bewege sich mit Lichtgeschwindigkeit in einem pseudoeuklidischen Raum bestimmter Metrik.

Anlage 6: Nachweis, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen nur dann gleich ist, wenn sie sich mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung der *W*-Achse bewegen.

Anlage 7: Herleitung des Additionstheorems für Geschwindigkeiten aus der pseudoeuklidischen Struktur des vierdimensionalen Raumes

Anlage 8: Die Lorentz-Transformation als Transformation von einem rechtwinkligen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem