

Vektoranalysis

Teil III

Siegfried Petry

Fassung vom 25. Januar 2013

Inhalt

Die Divergenz eines Feldvektors

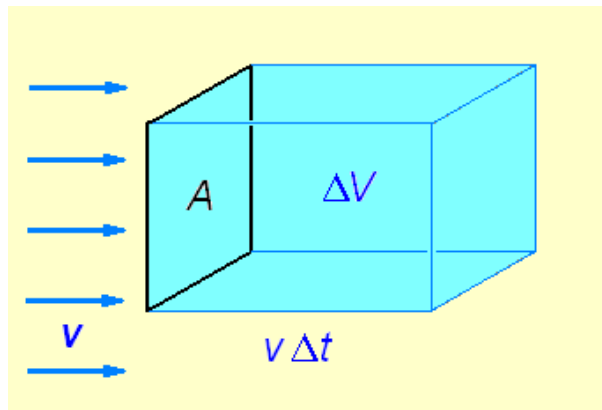
1	Vorbereitende Betrachtungen: Fluss, Schüttung, Quelldichte	2
2	Die Divergenz eines Feldvektors	4
3	Rechengesetze für Divergenzen	6
4	Beispiele	6
5	Die Divergenz im Feld einer elektrischen Kugelladung	8

Die Divergenz eines Feldvektors

1 Vorbereitende Betrachtungen: Fluss, Schüttung, Quelldichte

Gegeben sei ein »Strömungsfeld« mit dem Feldvektor $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, wobei \mathbf{v} die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit ist.

Stellen wir uns ein von einem Drahtrahmen umgrenztes ebenes Flächenstück vom Größenwert A vor, das so in die Flüssigkeit eintaucht, dass es auf der zunächst als homogen angenommenen Strömung senkrecht steht.



Dann strömt in der Zeitspanne Δt das Flüssigkeitsvolumen $\Delta V = v \cdot \Delta t$ durch den Rahmen. Der Quotient aus diesem Volumen und der Zeitspanne Δt heißt der Fluss Φ der Strömung (oder auch – nicht ganz exakt, aber gebräuchlich – der Fluss Φ des Feldvektors \mathbf{v}) durch das Flächenstück:

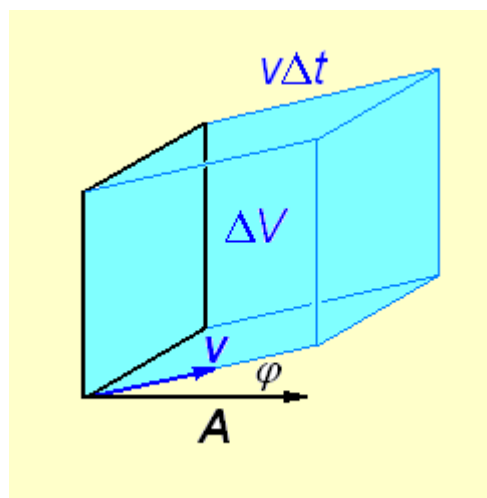
$$\text{Fluss } \Phi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{v \Delta t A}{\Delta t} = v A. \quad (1)$$

Der Fluss hat demnach die Dimension Volumen/Zeit = Länge³/Zeit.

Steht das Flächenstück auf der Strömungsrichtung nicht senkrecht, dann ist

$$\Delta V = v \Delta t A \cos \varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} und dem auf der Fläche senkrecht stehenden Flächenvektor \mathbf{A} ist.



Dann ist der Fluss durch das Flächenstück

$$\Phi = v A \cos \varphi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad (2)$$

wobei $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$ das Skalarprodukt der Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{A} ist.

Für $\mathbf{v} \uparrow \mathbf{A}$ ist $\Phi = vA$, für $\mathbf{v} \downarrow \mathbf{A}$ ist $\Phi = -vA$. Im ersten Fall gilt

$$v = \frac{\Phi}{A},$$

und in einem inhomogenen Strömungsfeld im Punkt P

$$v_P = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \Phi}{\Delta A} \right)_P = \left(\frac{d\Phi}{dA} \right)_P. \quad (3)$$

Ist schließlich das betrachtete Flächenstück nicht eben, oder ist das Strömungsfeld nicht homogen, dann denken wir uns die Fläche in hinreichend kleine Teilstücke vom Größenwert ΔA zerlegt und den Flächenvektor $\Delta \mathbf{A}$ in der Mitte eines jeden Teilstücks errichtet. Jeder dieser Flächenvektoren wird dann skalar mit dem Geschwindigkeitsvektor multipliziert, der dem Fußpunkt des Flächenvektors zugeordnet ist. Für den Fluss Φ durch die gesamte Fläche A gilt dann:

$$\Phi \approx \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i.$$

Denkt man sich nun die Anzahl der Teilflächen unbegrenzt wachsend, wobei alle ΔA_i gegen null gehen, dann strebt diese Summe einem Grenzwert zu, welcher der Fluss der Strömung (oder, wie man etwas nachlässig sagt, der Fluss des Vektors \mathbf{v}) durch die Fläche A ist und durch ein Flächenintegral dargestellt wird:

$$\Phi = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (4)$$

Dieser Begriff des Flusses wird in der Physik auch auf andere Vektorfelder übertragen, vor allem auf elektrische und magnetische Felder. Dies mag zunächst etwas befremden, aber man kann ja – als Hilfe für die Vorstellung – jeden beliebigen Feldvektor als den Geschwindigkeitsvektor einer Flüssigkeitsströmung interpretieren. Man muss dann lediglich, immer wenn vom Fluss eines Feldvektors die Rede ist, sich vergegenwärtigen, dass damit eigentlich der Fluss einer »virtuellen Flüssigkeit« gemeint ist, deren Geschwindigkeitsvektor der betrachtete Feldvektor ist. Dazu das folgende Beispiel.

Der »Fluss des Feldvektors«

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}$$

des kugelsymmetrischen Feldes einer Punkt- oder Kugelladung mit dem Mittelpunkt in O durch eine konzentrische Kugelfläche mit dem Radius R ist

$$\Phi = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_A E \, dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_A dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

(Hinweis: Der Feldvektor steht überall auf der Kugelfläche senkrecht.)

Also: Wenn \mathbf{E} der Geschwindigkeitsvektor eines Strömungsfeldes wäre, betrüge der Fluss der Flüssigkeit durch jede zur Ladung Q konzentrische Kugelfläche Q/ϵ_0 . Der Fluss ist der Ladung also proportional, und für $Q = 0$ wäre auch $\Phi = 0$. Demnach kann man die Ladung Q als die »Quelle« des Feldes der virtuellen Flüssigkeit betrachten. Für $Q < 0$ wäre auch $\Phi < 0$. Dies wäre so zu interpretieren: Der Geschwindigkeitsvektor ist – wie die Feldlinien des Feldes – nach innen gerichtet, die »Strömung« fließt auf die Ladung zu und verschwindet dort. Die negative Ladung ist die »Senke« (= Gegenteil einer Quelle) des Feldes. Der Geschwindigkeitsvektor bildet mit den Flächennormalen der Kugel überall den Winkel 180° , weshalb das Skalarprodukt $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -E \, dA$ ist.

Das Ergebnis $\Phi = Q/\epsilon_0$ gilt übrigens, wie sich zeigen lässt und was auch durchaus plausibel ist, für jede beliebige, die Ladung Q umhüllende Fläche.

Zur Vereinfachung betrachten wir im Folgenden wieder einen »echten« Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} eines Strömungsfeldes, jedoch gelten die Betrachtungen und ihre Ergebnisse für jedes beliebige Vektorfeld und sein »virtuelles« Strömungsfeld.

Integriert man das Skalarprodukt $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ über eine geschlossene Fläche (»Hülle«), so ist der Größenwert des »Hüllenintegrals« gleich dem Fluss (Volumen/Zeit), der durch die Hülle nach außen tritt. Dieser muss gleich der **Schüttung** S (= Ergiebigkeit) aller innerhalb der Hülle liegenden Quellen sein, wobei die Senken einen negativen Beitrag zur Schüttung liefern:

$$\oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = S = \sum_i S_i.$$

Betrachten wir nun ein Raumgebiet vom Volumen ΔV . Die Schüttung aller Quellen in diesem Raumgebiet sei ΔS . Der Quotient $\Delta S/\Delta V$ ist dann die »mittlere Quelldichte« in diesem Gebiet:

$$\text{Mittlere Quelldichte } \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$

2 Die Divergenz eines Feldvektors

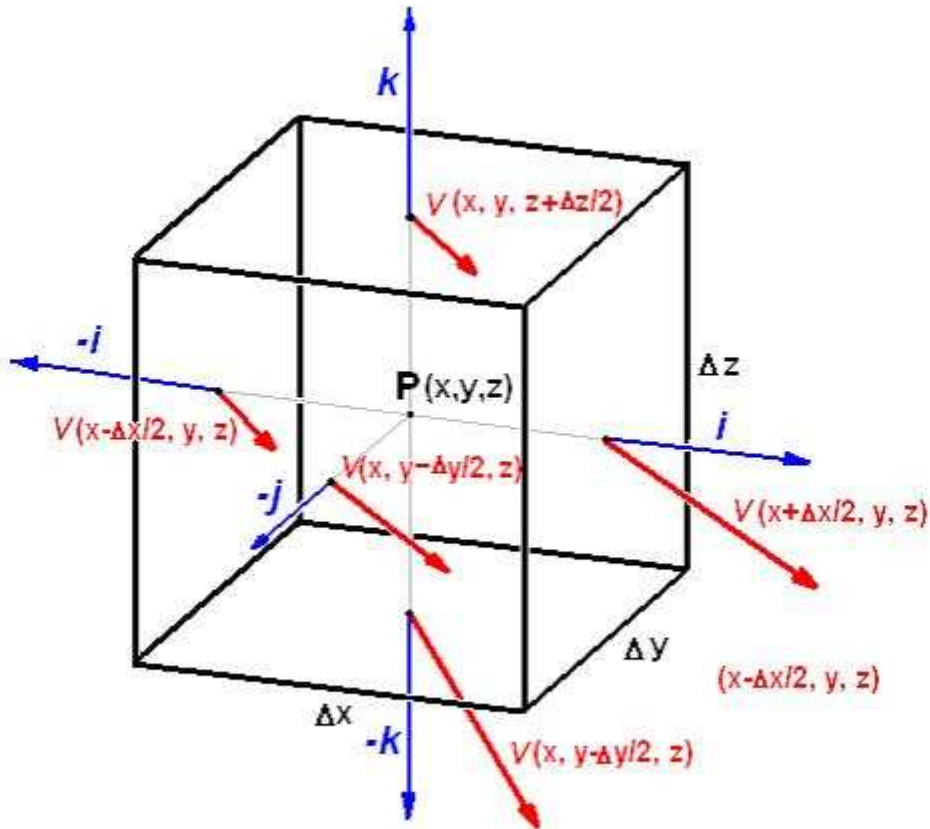
Lässt man nun die Hüllfläche auf einen Punkt P schrumpfen und somit ΔV gegen null gehen, so ist der Grenzwert

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

die Quelldichte des Feldvektors (eigentlich: des Strömungsfeldes, dessen Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} ist) in dem Punkt P , auf den die Hülle geschrumpft ist. Sie wird als die **Divergenz** des Vektors \mathbf{v} im Punkt P bezeichnet:

$$(\text{div } \mathbf{v})_P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (6)$$

Zur Berechnung der Divergenz aus dem Feldvektor $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ betrachten wir einen Quader mit den Seiten $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, dessen Mittelpunkt der Punkt $P(x, y, z)$ ist.



Die Flächennormalen auf den Seitenflächen sind die Einheitsvektoren in Achsenrichtung: i, j, k sowie $-i, -j, -k$. (j und der dazu gehörige Feldvektor sind nicht eingezeichnet.)

Die Flüsse durch die einzelnen Seitenflächen sind:

$$\Delta \Phi_1 = i \cdot v_{(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)} \Delta y \Delta z = (v_x)_{(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)} \Delta y \Delta z,$$

$$\Delta \Phi_2 = -i \cdot v_{(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z)} \Delta y \Delta z = -(v_x)_{(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z)} \Delta y \Delta z, \text{ usw.}$$

Der gesamte Fluss $\Delta \Phi$ durch die Flächen des Quaders ist die Summe aus den sechs Flüssen $\Delta \Phi_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Er entspricht dem Wert des Hüllenintegrals in der Definition der Divergenz. Von den sechs Summanden lassen sich je zwei wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_1 + \Delta \Phi_2 &= \left[(v_x)_{(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)} - (v_x)_{(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z)} \right] \Delta y \Delta z \\ &= \frac{(v_x)_{(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)} - (v_x)_{(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z)}}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned}$$

Der Bruch auf der rechten Seite ist der »partielle Differenzenquotient« der Funktion v_x für $y = \text{konst.}$ und $z = \text{konst.}$ Für Δx gegen 0 wird daraus die partielle Ableitung von v_x nach x . Zusammen mit den übrigen vier Summanden ergibt sich dann

$$\text{div } v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_A v \cdot dA = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta V} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right),$$

und mit $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (7)$$

3 Rechengesetze für Divergenzen

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = 0, \quad \mathbf{C} : \text{konstanter Vektor}$$

$$\operatorname{div} c\mathbf{v} = c \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad c : \text{reelle Zahl}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{w},$$

$$\operatorname{div}(U\mathbf{v}) = U \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} U, \quad U = U(x, y, z)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w}.$$

4 Beispiele:

1. Gegeben ein Vektorfeld mit dem Feldvektor $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$. Der Feldvektor ist also radial nach außen gerichtet, seine Länge ist gleich der Länge des Ortsvektors des betreffenden Punktes. Dann ist:

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \operatorname{div}(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Wir verifizieren an diesem Beispiel den GAUSS-Integralsatz: Die Ergiebigkeit der Quellen in einem Raumgebiet V ist gleich dem Fluss durch dessen Hüllfläche A :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (8)$$

Der Fluss Φ des Feldvektors $\mathbf{v} = \mathbf{r}$ durch die Oberfläche einer Kugel vom Radius R um O ist $\Phi = 4 \pi R^2 R = 4 \pi R^3$. Die Ergiebigkeit S aller innerhalb der Kugel liegenden Quellen ist $S = (\operatorname{div} \mathbf{r}) V = 3 V = 4 \pi R^3$.

2. Es sei $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}/r$. Der Feldvektor ist also radial nach außen gerichtet und hat die konstante Länge 1. Dann ist:

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \operatorname{div} \frac{1}{r} (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3),$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r} = \frac{r-x}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r} = \frac{r-y}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r} = \frac{r-z}{r^2}.$$

Die partiellen Ableitungen berechnet man am einfachsten durch implizite Ableitung aus:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow 2r \partial r = 2x \partial x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{3r - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r}}{r^2} = \frac{2}{r}.$$

Kontrolle: Der Fluss des Vektors $\mathbf{v} = \mathbf{r}/r$ durch die Oberfläche einer Kugel um O mit dem Radius R ist

$$\Phi_K = 4\pi R^2 \cdot 1 = 4\pi R^2.$$

Das Volumen einer Kugelschale vom Radius r und der Dicke dr ist

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

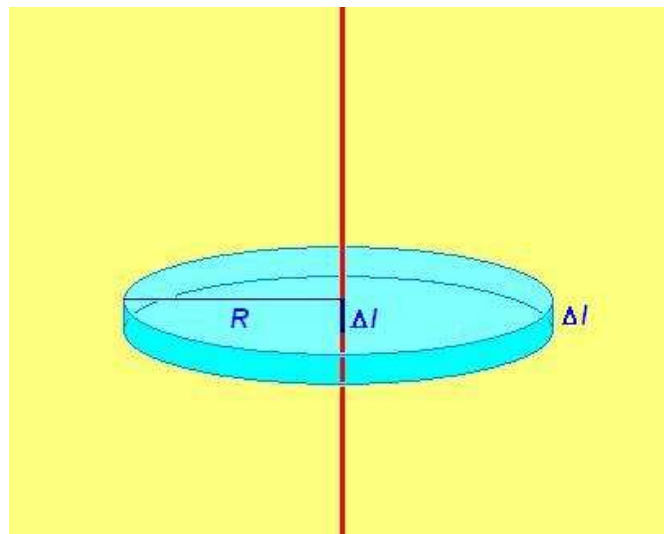
Die Ergiebigkeit der in der Kugelschale liegenden Quellen ist

$$dS = dV \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = 4\pi r^2 dr \frac{2}{r} = 8\pi r dr.$$

Die Ergiebigkeit S der Quellen in einer Kugel vom Radius R ist dann

$$S = \int_0^R 8\pi r dr = 8\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = 4\pi R^2 = \Phi_K.$$

3. Dieses Beispiel ist von ganz anderer Natur als die vorangegangenen. Hier ist kein Feld vorgegeben, dessen Eigenschaften untersucht werden sollen, sondern eine physikalische Anordnung, ein sehr langer, elektrisch geladener Leiter. Gesucht ist die elektrische Feldstärke in der Umgebung des Leiters.



Wir betrachten ein Leiterelement Δl und eine Kreisscheibe mit Radius R um dieses Leiterelement. Die im Leiterelement vorhandene elektrische Ladung sei Δq , die längenbezogene Ladung ρ also gleich $\Delta q/\Delta l$. Oben (Gleichung (5)) haben wir gesehen, dass der von einer Ladung Q erzeugte Fluss Φ des Vektors \mathbf{E} gleich Q/ϵ_0 ist.

Der von der Ladung Δq erzeugte Fluss $\Delta\Phi$ des Vektors \mathbf{E} verlässt die Kreisscheibe nur an deren senkrechter Umrandung, welche die Fläche $\Delta A = 2\pi R \Delta l$ hat. Da der Fluss auf der Umrandung stets senkrecht steht, ist der Betrag der Feldstärke am Rand gleich der Flussdichte dort (Gleichung (3)):

$$E_R = \frac{\Delta\Phi}{\Delta A} = \frac{\Delta q}{\epsilon_0 2\pi R \Delta l} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Da \mathbf{E} radial nach außen gerichtet ist, ist

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}.$$

Wir berechnen nun noch $\operatorname{div} \mathbf{E}$, die außerhalb des Leiters überall null sein muss:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^2} &= \operatorname{div} \frac{x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2}{r^2} = \frac{r^2 - x2r \frac{\partial r}{\partial x} + r^2 - y2r \frac{\partial r}{\partial y}}{r^4} \\ &= \frac{2r^2 - 2r \left(x \frac{x}{r} + y \frac{y}{r} \right)}{r^4} = \frac{2r^2 - 2r^2}{r^4} = 0. \end{aligned}$$

5 Die Divergenz im Feld einer elektrischen Kugelladung

Für den Feldstärkevektor einer Kugelladung Q vom Radius R mit dem Mittelpunkt in O gilt

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} =: k \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} := \frac{\mathbf{E}}{k} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad r \geq R.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{r^3 - x3r^2 \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \quad \left(\text{mit } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Das Feld ist außerhalb der Ladung quellenfrei: es entstehen oder verschwinden im Raum keine Feldlinien.

Nehmen wir nun an, die Ladung bestehe aus einer kugelförmigen Raumladungswolke von konstanter Raumladungsdichte $\rho = dQ/dt$. Wir wenden nun auf diese Kugel (Volumen V) und ihre Oberfläche A den GAUSS-Integralsatz an:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}.$$

Aus der konstanten Raumladungsdichte schließen wir auf eine konstante Quelledichte $\operatorname{div} \mathbf{v}$, ferner ist an der Oberfläche für $Q > 0$ stets $\mathbf{v} \uparrow \uparrow d\mathbf{A}$. Daraus folgt

$$(\operatorname{div} \mathbf{v})V = \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 \quad \text{und} \quad (\operatorname{div} \mathbf{E})V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Da dieses Ergebnis (übrigens eine der MAXWELL-Gleichungen) von R unabhängig ist, gilt es auch noch für $R \rightarrow 0$, also auch für Punktladungen.

Bei einer metallischen Kugel oder Hohlkugel befinden sich die Ladungen immer nur an der Oberfläche. Hier gilt für den Fluss Φ des Vektors E durch die Kugeloberfläche

$$\Phi = E A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{\rho_F}{\epsilon_0} \quad \rho_F : \text{Flächenladungsdichte}$$

Da Q/ϵ_0 der gesamte von der Ladung Q erzeugte Fluss ist, folgt daraus auch, dass im Innern einer Hohlkugel die Feldstärke null ist.