# Vektoranalysis

## Teil IV

Siegfried Petry

Fassung vom 25. Januar 2013

# I n h a l t

## Die Rotation eines Feldvektors


1 Einleitung – Zirkulation und Wirbel eines Feldvektors 2

2 Berechnung des Wirbels – Die Rotation eines Feldvektors 4

3 Der Integralsatz von STOKES 7

4 Rechengesetze für Rotationen 8

5 Ergänzungen 8

6 Beispiele 9

7 Der HAMILTON-Differentialoperator Nabla (Nabla-Operator) 11

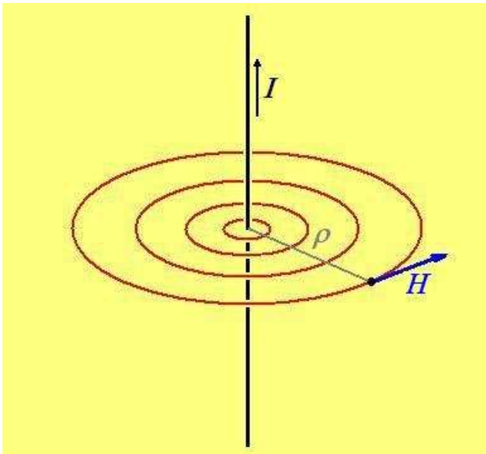
# Die Rotation eines Feldvektors

## 1 Einleitung – Zirkulation und Wirbel eines Feldvektors

Vorbemerkung: Diese Einleitung ist etwas unkonventionell. Sie versucht, die Begriffe und Zusammenhänge anschaulich werden zu lassen und dem Anfänger dadurch zu ermöglichen, sie wirklich zu verstehen.

Die Theoretische Physik lehrt, dass das Linienintegral über das Skalarprodukt $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$ längs einer geschlossenen Kurve in einem Potentialfeld gleich null ist. Ein Potentialfeld erkennt man formal daran, dass der Feldvektor $\boldsymbol{v}$ der Gradient eines Skalarfeldes ist.

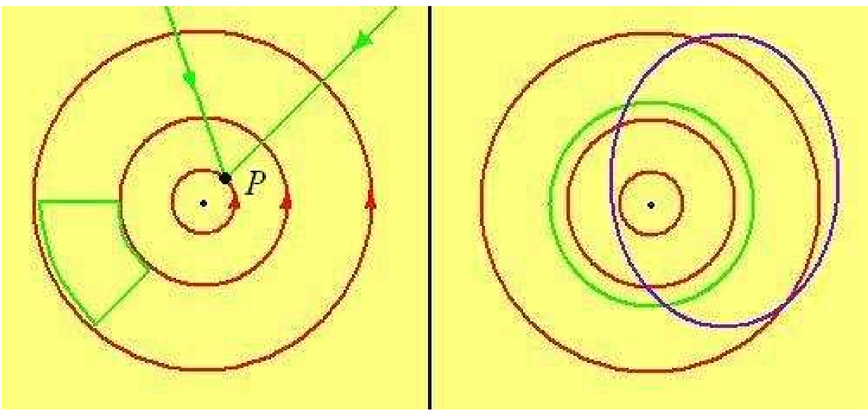
Letzteres ist keineswegs immer der Fall, und in der Physik gibt es wichtige Felder, die diese Bedingung nicht erfüllen. Ein Beispiel dafür ist das magnetische Feld eines unendlich langen Leiters.




Der Leiter ist von konzentrischen kreisförmigen Feldlinien umgeben; der Vektor $\boldsymbol{H}$ der magnetischen Feldstärke steht auf dem Radius $\rho$ senkrecht, für seinen Betrag $H$ gilt

$$H = \frac{I}{2\pi\rho},$$

wenn $I$ die Stromstärke im Leiter ist. Schauen wir uns dieses Feld etwas genauer an.




1. Bewegt man (linkes Bild) einen Magnetpol aus sehr großer („unendlicher“) Entfernung radial zu einem Punkt $P$ hin, so ist dabei keine (positive oder negative) Arbeit aufzuwenden, weil die Kraftrichtung auf dem Weg senkrecht steht. Erfolgt die Bewegung jedoch schräg, so hat der Weg eine Komponente in Richtung des Feldes, und es ist daher Arbeit aufzuwenden. Das Linienintegral

$$\int_{\infty}^{P} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

hat also einen vom Weg abhängigen Wert. Daher kann man dem Punkt $P$ kein bestimmtes Potential zuordnen.

2. Betrachten wir die grüne Linie, die eine Fläche umfasst, deren Seiten radial bzw. tangential verlaufen. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass das Linienintegral über einen geschlossenen Umlauf den Wert null hat. (Wäre dagegen der Betrag der Feldstärke nicht proportional $1/\rho$, wäre das nicht so.)

3. Bei einem geschlossenen Umlauf, der den Leiter umschlingt (rechtes Bild), hat das Linienintegral dagegen – unabhängig vom Weg – den Wert $I$ (Stromstärke). Dies zeigt, dass das Linienintegral über eine geschlossene Kurve eine besondere Bedeutung haben kann. Darum wollen wir uns genauer damit befassen.

**Definition:** Unter der Zirkulation $\Gamma$ (Gamma) eines Vektors $\boldsymbol{v}$ längs einer geschlossenen Kurve $K$ versteht man das Linienintegral des Vektors längs dieser Kurve:

$$\Gamma = \oint_K \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

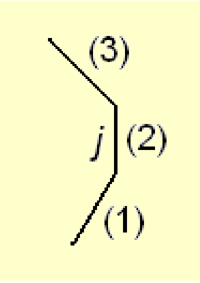
Wie oben gesagt wurde, ist die Zirkulation des Feldstärkevektors $\boldsymbol{H}$ längs einer Linie, die den unendlich langen Leiters umschlingt, gleich der Stromstärke $I$ im Leiter. Umfasst dagegen die Kurve $K$ den Leiter nicht, ist die Zirkulation null. (Einfachste Begründung: Die Linie umschlingt dann einen – gedachten – Leiter mit der Stromstärke null.)
Betrachten wir nun eine Feldlinie vom Radius $\rho = \rho_L$, welche direkt an der Oberfläche des Leiters verläuft und dividieren wir die Zirkulation des Feldstärkevektors durch die Fläche $A$ des Leiters, die mit der von der betrachteten Feldlinie umschlungenen Fläche identisch ist, so erhalten wir

$$\frac{\Gamma}{A} = \frac{I}{\rho_L^2 \pi} = j, \qquad j: \text{ Stromdichte im Leiter}$$

Denken wir uns nun den Leiterquerschnitt – bei konstanter Stromdichte $j$ – immer mehr auf seinen Mittelpunkt $P$ hin schrumpfend, so bleibt der Größenwert von $\Gamma/A$ konstant. Wir nennen ihn den **Wirbel** $\boldsymbol{w}$ des Vektors $\boldsymbol{H}$ im betrachteten Punkt oder im betrachteten »Stromfaden«. Für ihn gilt $w = j$, oder als Vektorgleichung geschrieben

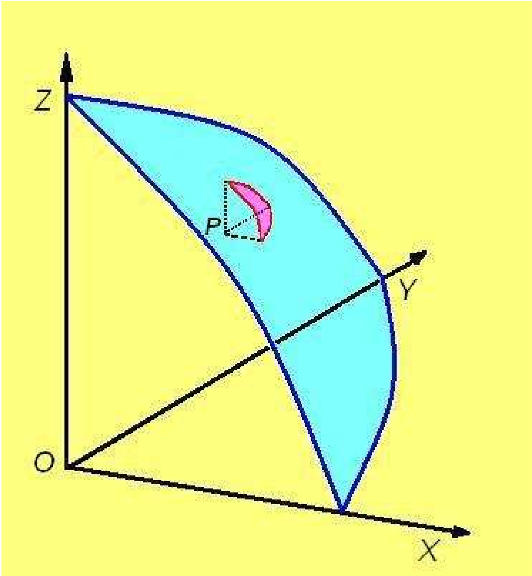
$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{j}.$$

Diese Aussage gilt übrigens unabhängig von der Länge und der Gestalt des Stromfadens. Begründung: Denken wir uns einen gekrümmten Stromfaden durch drei geradlinige Stromfäden angenähert, so liefern die Stromfäden (1) und (3) und alle übrigen keinen Beitrag zur Zirkulation und damit auch zum Wirbel im Stromfaden (2), da die Zirkulation außerhalb der Stromfäden (1) und (2) gleich null ist.

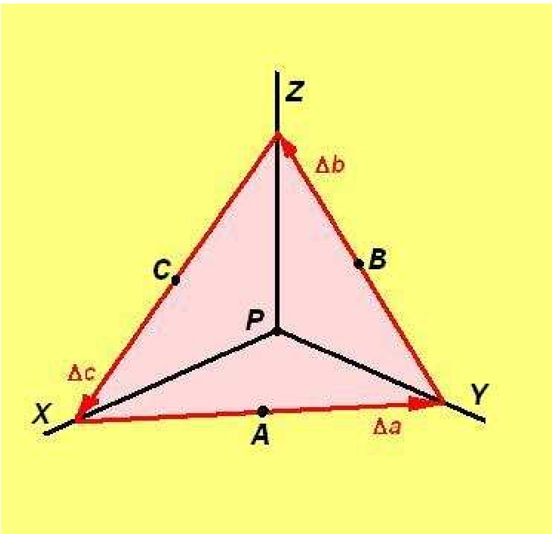


## 2 Berechnung des Wirbels – Die Rotation eines Feldvektors

Es soll nun der Wirbel eines *beliebigen* Feldvektors $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ in einem Punkt einer gegebenen Fläche berechnet werden.




Durch einen Punkt $P$ nahe an der Fläche legen wir ein kleines Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu den entsprechenden Achsen des benutzten großen Koordinatensystems sind. Die Ebenen des kleinen Koordinatensystems schneiden aus der Fläche ein kleines Flächenstück heraus, das wir durch ein ebenes Dreieck annähern.




Die Abschnitte auf den Achsen seien $2\Delta x$, $2\Delta y$, $2\Delta z$. Die Seitenmitten des Dreiecks und ihre Koordinaten bezüglich des kleinen Systems sind dann

$$A(\Delta x, \Delta y, 0) \quad B(0, \Delta y, \Delta z) \quad C(\Delta x, 0, \Delta z),$$

und seine Seitenvektoren sind

$$\Delta\boldsymbol{a} = -2\,\Delta x\,\boldsymbol{e}_1 + 2\,\Delta y\,\boldsymbol{e}_2,$$

$$\Delta\boldsymbol{b} = -2\,\Delta y\,\boldsymbol{e}_2 + 2\,\Delta z\,\boldsymbol{e}_3,$$

$$\Delta\boldsymbol{c} = 2\,\Delta\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{e}_1 - 2\,\Delta z\,\boldsymbol{e}_3.$$

Zur (zunächst) angenäherten Berechnung des Linienintegrals über die drei Seiten multiplizieren wir den jeweiligen Seitenvektor skalar mit dem Wert, den der Feldvektor $\boldsymbol{v}$ in der Seitenmitte hat und summieren die Produkte:

$$\sum_{\triangle} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\,\boldsymbol{s} \approx \boldsymbol{v}_A \cdot \Delta\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}_B \cdot \Delta\boldsymbol{b} + \boldsymbol{v}_C \cdot \Delta\boldsymbol{c}.$$

Für die Vektoren $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ und $\boldsymbol{v}_C$ gilt:

$$\boldsymbol{v}_A \approx \boldsymbol{v}_P + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s}\right)_{PA} \cdot (\Delta s)_{PA}\,,$$

$$\boldsymbol{v}_B \approx \boldsymbol{v}_P + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s}\right)_{PB} \cdot (\Delta s)_{PB}\,,$$

$$\boldsymbol{v}_C \approx \boldsymbol{v}_P + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}s}\right)_{PC} \cdot (\Delta s)_{PC}\,.$$

Der Index $PA$ bedeutet

**–** bei der Richtungsableitung d$\boldsymbol{v}$/d$s$, dass diese an der Stelle $P$ und in der Richtung $PA$ zu bilden ist,

**–** bei $\Delta s$, dass damit die Strecke $\Delta s = PA$ gemeint ist, usw.

Für die Komponenten der drei Vektoren gilt:

$$(v_A)_x \approx (v_P)_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z \qquad (\Delta z = 0),$$

$$(v_A)_y \approx (v_P)_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z \qquad (\Delta z = 0),$$

$$(v_A)_z \approx (v_P)_z + \frac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z \qquad (\Delta z = 0).$$

Dabei sind alle partiellen Ableitungen an der Stelle $P$ zu bilden. – Analoges gilt für die Komponenten von $\boldsymbol{v}_B$ und $\boldsymbol{v}_C$.

Wenn man die Komponentengleichungen wieder zu Vektorgleichungen zusammenfasst, wobei die rechts stehenden Vektoren als einspaltige Matrizen dargestellt sind, erhält man:

$$\boldsymbol{v}_A \approx \boldsymbol{v}_P + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_x}{\partial y}\Delta y + 0 \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + 0 \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_B \approx \boldsymbol{v}_P + \begin{pmatrix} 0 + \dfrac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z \\ 0 + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z \\ 0 + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_C \approx \boldsymbol{v}_P + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + 0 + \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + 0 + \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + 0 + \dfrac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich:

$$\boldsymbol{v}_A \cdot \Delta\boldsymbol{a} \approx \boldsymbol{v}_P \cdot \Delta\boldsymbol{a} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\Delta y\right)(-2\Delta x) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y\right)2\Delta y,$$

$$\boldsymbol{v}_B \cdot \Delta\boldsymbol{b} \approx \boldsymbol{v}_P \cdot \Delta\boldsymbol{b} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\Delta z\right)(-2\Delta y) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z\right)2\Delta z,$$

$$\boldsymbol{v}_C \cdot \Delta\boldsymbol{c} \approx \boldsymbol{v}_P \cdot \Delta\boldsymbol{c} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_x}{\partial z}\Delta z\right)2\Delta x + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Delta z\right)(-2\Delta z).$$

Die Summe Σ dieser drei Skalarprodukte ist

$$\sum \approx \boldsymbol{v}_P \cdot (\Delta\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{c}) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)2\Delta x\,\Delta y$$
$$+ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)2\Delta y\,\Delta z + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)2\Delta x\,\Delta z.$$

Dabei sind wieder alle partiellen Ableitungen im Punkt $P$ zu bilden. Der erste Summand ist null, da die Summe der Seitenvektoren des Dreiecks null ist. Die letzten drei Summanden können interpretiert werden als das Skalarprodukt aus einem Vektor $\boldsymbol{V_P}$ und einem Vektor $\Delta\boldsymbol{W}$, wobei (wieder als einspaltige Matrizen dargestellt)

$$\boldsymbol{V}_P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 2\Delta y\,\Delta z \\ 2\Delta z\,\Delta x \\ 2\Delta x\,\Delta y \end{pmatrix}.$$

Der erste Vektor erhält wegen seiner besonderen Bedeutung einen eigenen Namen: Rotation (von) $\boldsymbol{v}$ (geschrieben: rot $\boldsymbol{v}$).
Die Komponenten des zweiten Vektors sind die Projektionen der Fläche $\Delta A$ in die Koordinatenebenen: $\Delta W_x = \Delta A_x$, $\Delta W_y = \Delta A_y$, $\Delta W_z = \Delta A_z$. Das heißt: Der Vektor $\Delta\boldsymbol{W}$ ist identisch mit dem Flächenvektor $\Delta\boldsymbol{A}$. Dieser Vektor kann auch geschrieben werden als $\Delta\boldsymbol{A} = \Delta A\,\boldsymbol{n}$,
wobei $\boldsymbol{n}$ der Normaleneinheitsvektor der Fläche $\Delta\boldsymbol{A}$ ist. Folglich ist

$$\sum_{\triangle} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \approx \left(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\right)_P \cdot \Delta A\, \boldsymbol{n}$$

und

$$\frac{1}{\Delta A} \sum_{\triangle} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \approx \boldsymbol{n} \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})_P .$$

Lässt man nun den Punkt $P$ unbeschränkt an die Fläche heranrücken, dann gehen $\Delta A$ und die Summe gegen null. Für den Grenzwert des Quotienten gilt:

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\sum_{\triangle} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta A} \equiv w_P(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{n} \cdot (\operatorname{rot} \boldsymbol{v})_P .$$

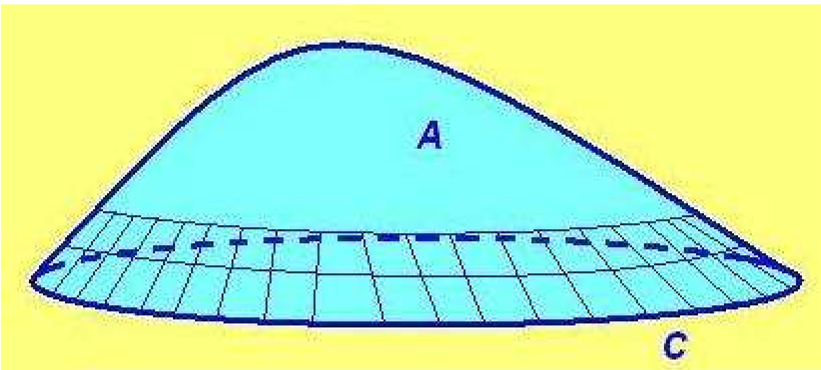
Das bedeutet: Der Betrag $w$ des Wirbels des Feldvektors $\boldsymbol{v}$ im Punkt $P$ einer Fläche ist gleich dem Größenwert der Projektion des Vektors rot $\boldsymbol{v}$ an dieser Stelle auf die Flächennormale. Hat die Flächennormale die gleiche Richtung wie der Vektor rot $\boldsymbol{v}$, dann ist der Betrag des Wirbels gleich dem Betrag von rot $\boldsymbol{v}$.
Beachten Sie: Der Vektor rot $\boldsymbol{v}$ ist eine Funktion des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ $(x, y, z)$, während der Wirbel außerdem noch von der Richtung des Flächenelements abhängt, für das der Wirbel berechnet wird. Der Wirbel an einer bestimmten Stelle ist maximal, wenn die Fläche auf rot $\boldsymbol{v}$ senkrecht steht; er ist null, wenn die Fläche so gerichtet ist, dass der Vektor rot $\boldsymbol{v}$ in der Tangentialebene der Fläche liegt.
Für das Beispiel aus der Einleitung ergibt sich daraus

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}.$$

Dies entspricht der 1. MAXWELL-Gleichung bei Abwesenheit eines elektrischen Wechselfeldes.

## 3 Der Integralsatz von STOKES

Wir betrachten ein beliebiges Flächenstück $A$ mit dem Rand $C$.




Wir zerlegen die Fläche – wie in der Abbildung für den unteren Teil angedeutet – in kleine Flächenstücke $\Delta A_i$ mit den nach außen gerichteten Flächenvektoren $\Delta\boldsymbol{A}_i$. Die einzelnen Flächenstücke sollen alle im gleichen Sinn wie der Rand $C$ umlaufen werden. Dabei werden alle Seiten – bis auf die,

die auf dem Rand *C* liegen – zweimal durchlaufen. Die Richtungen der beiden Durchläufe aber sind gegensinnig. Für jedes einzelne Flächenstück mit seinen vier Seiten gilt dann:

$$\sum_{k=1}^{4} \boldsymbol{v}_{i,k} \cdot \Delta\boldsymbol{s}_{i,k} \approx \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta\boldsymbol{A}_i .$$

Summiert man über alle Flächenstücke $\Delta A_i$, so fallen alle die Summanden heraus, deren $\Delta\boldsymbol{s}_{i,k}$ nicht auf dem Rand *C* liegt. Die übrig bleibenden werden nun mit dem Index *j* versehen:

$$\sum_{\triangle} \sum_{k=1}^{4} \boldsymbol{v}_{i,k} \cdot \Delta\boldsymbol{s}_{i,k} = \sum_{j} \boldsymbol{v}_j \cdot \Delta\boldsymbol{s}_j \approx \sum \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta\boldsymbol{A}_i .$$

Für alle $\Delta A$ gegen null (wobei natürlich auch alle $\Delta s$ gegen null gehen) wird daraus

$$\oint_C \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A},$$

wobei die Gestalt der Fläche völlig beliebig ist. Dies ist der Integralsatz von STOKES.

## 4 Rechengesetze für Rotationen

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(c\boldsymbol{v}) &= c \operatorname{rot} \boldsymbol{v}, \qquad c: \text{ reelle Zahl} \\
\operatorname{rot}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + \operatorname{rot} \boldsymbol{w}, \\
\operatorname{rot}(U\boldsymbol{v}) &= U \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + (\operatorname{grad} U) \times \boldsymbol{v} \qquad U = U(x, y, z)
\end{aligned}$$

## 5 Ergänzungen

1. Der Vektor rot $\boldsymbol{v}$ wird häufig als Determinante geschrieben. Diese ist als Merkhilfe sehr nützlich.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \boldsymbol{v} &= \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{e}_1 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{e}_2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{e}_3 \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} .
\end{aligned}$$

2. Setzt man im Integralsatz von STOKES $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} U$, so erhält man

$$\oint_C \operatorname{grad} U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}.$$

Nun ist aber das Kurvenintegral über grad *U* längs einer geschlossenen Kurve stets null, da ein Potentialfeld vorliegt. Also muss auch das rechte Integral null sein. Da die Fläche *A* völlig beliebig ist, kann nicht angenommen werden, dass der Vektor rot (grad *U*) überall senkrecht zu d$\boldsymbol{A}$ und daher das Skalarprodukt der beiden Vektoren überall null ist. Folglich muss überall rot (grad *U*) = 0 sein. Das bedeutet: Ein Gradientenfeld (Potentialfeld) ist wirbelfrei.

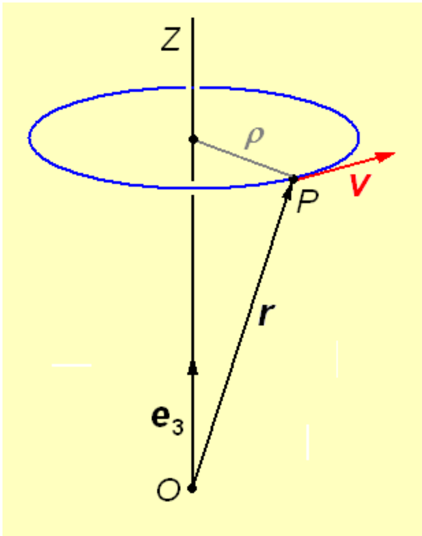
3. Ferner gilt:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0.$$

Die Divergenz eines Feldes, dessen Feldvektor die Rotation eines anderen Feldvektors ist, ist null. Ein »Rotationsfeld« ist also quellenfrei. – Beweis am einfachsten durch Ausrechnen und Anwendung des Satzes von SCHWARZ.

## 6 Beispiele

1. Ein Vektorfeld habe konzentrische, kreisförmige Feldlinien um die *Z*-Achse. Der Betrag *v* des Feldvektors sei proportional $1/\rho$ ($\rho$ = Abstand des betrachteten Punktes von der Z-Achse). Gesucht die Gleichungen $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z)$ sowie rot $\boldsymbol{v}$.




Der Feldvektor $\boldsymbol{v}$ steht auf $\boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{r}$ senkrecht und hat folglich die Richtung des Vektorprodukts $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{r}$. Also ist

$$\boldsymbol{v} = k\left(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{r}\right) = k\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = k\left(-y\,\boldsymbol{e}_1 + x\,\boldsymbol{e}_2\right).$$

Ferner soll sein

$$v = k\sqrt{y^2 + x^2} = k\rho = \frac{c}{\rho} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{c}{\rho^2}.$$

Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{v} = c\,\frac{-y\,\boldsymbol{e}_1 + x\,\boldsymbol{e}_2}{\rho^2} = c\,\frac{-y\,\boldsymbol{e}_1 + x\,\boldsymbol{e}_2}{x^2 + y^2}$$

und

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = c\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2 + y^2} & \dfrac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = c\,\boldsymbol{e}_3\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-x\,2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-x^2-y^2+y\,2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ergibt sich

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0.$$

Ein Beispiel für ein solches Feld ist das magnetische Feld (Feldstärke $\boldsymbol{H}$) eines unendlich langen Leiters (siehe »1 Einleitung – Zirkulation und Wirbel eines Vektors«). Nach der 1. MAXWELL-Gleichung ist bei Abwesenheit eines elektrischen Wechselfeldes

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j},$$

wobei $\boldsymbol{j}$ der Vektor der Stromdichte ist. Da die Stromdichte außerhalb des Leiters überall null ist, muss dort auch rot $\boldsymbol{H} = 0$ sein. Im Inneren des Leiters dagegen ist $j \neq 0$, und daher auch rot $\boldsymbol{H} \neq 0$, und dies ist die Ursache des Feldes.

Wir wenden nun zur Berechnung des Größenwerts $H$ der Feldstärke den Integralsatz von STOKES auf eine Kreisfläche $A$ vom Radius $\rho$ und auf deren Umrandung $K$ an. Die Kreisfläche soll mit dem Leiter konzentrisch sein und auf ihm senkrecht stehen. Dann gilt

$$\int_A \operatorname{rot}\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\oint_K \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Nun ist einerseits bei konstanter Stromdichte $j$

$$\int_A \operatorname{rot}\boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}=j\int_q \mathrm{d}A=j\,q=I,$$

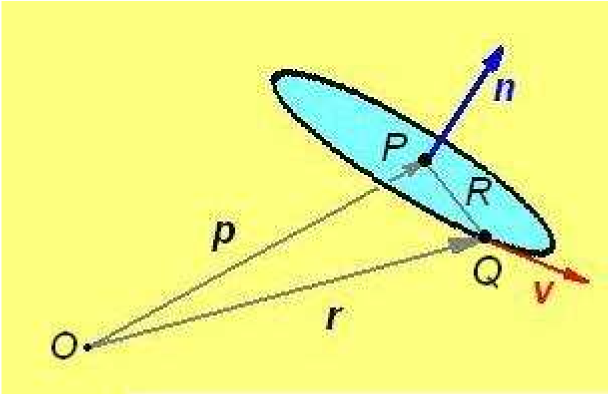
wobei $q$ der Leiterquerschnitt und $I$ die Stromstärke im Leiter ist. Andererseits ist

$$\oint_K \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=H\oint_K \mathrm{d}s=H\,2\pi\,\rho.$$

Also ist

$$I=H\,2\pi\rho \quad\Rightarrow\quad H=\frac{I}{2\pi\rho}.$$

3. Eine ebene Scheibe mit der Flächennormalen $\boldsymbol{n}$ rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um einen ihrer Punkte $P$ mit $\boldsymbol{n}$ als Drehachse. Gesucht der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ eines ihrer Punkte $Q$ im Abstand $R$ von $P$.




Es ist $v = \omega R$ und

$$\boldsymbol{v} = \omega \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{R} = \omega \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}) \quad \text{usw.}$$

Einfacher ist es jedoch, ein neues Koordinatensystem einzuführen, dessen Achsen parallel zu denen des alten sind und dessen Ursprung in $P$ liegt. Dann ist:

$$\boldsymbol{v} = \omega \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{R} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{R} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ n_x & n_y & n_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (n_y z - n_z y)\boldsymbol{e}_1 + (n_z x - n_x z)\boldsymbol{e}_2 + (n_x y - n_y x)\boldsymbol{e}_3,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \omega \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ n_y z - n_z y & n_z x - n_x z & n_x y - n_y x \end{vmatrix} = 2\omega \boldsymbol{n}.$$

Der Betrag von rot $\boldsymbol{v}$ ist also gleich der doppelten Winkelgeschwindigkeit.

## 7 Der HAMILTON-Differentialoperator Nabla (Nabla-Operator)

Bei der Berechnung von Gradient, Divergenz und Rotation werden an einer skalaren Funktion bzw. an einer Vektorfunktion bestimmte Rechenoperationen vorgenommen. Diese weisen bei aller Verschiedenheit gewisse formale Ähnlichkeiten auf: Immer werden die partiellen Ableitungen der Funktion bzw. der Vektorkomponenten gebildet.

**1. Gradient:** Es werden die partiellen Ableitungen der Funktion *U(x, y, z)* berechnet und diese werden als Komponenten eines Vektors benutzt:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_3.$$

Dieser Vektor kann formal aufgefasst werden als das Produkt aus einem »symbolischen Vektor Nabla«

$$\nabla \overset{\text{Def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_3$$

und der Funktion $U$:

$$\text{grad } U = \left( \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 \right) U = \nabla U.$$

**2. Divergenz:** Die Komponenten eines Vektors $\boldsymbol{v} = (v_x \quad v_y \quad v_z)$ werden partiell »nach ihrem Index« abgeleitet und daraus durch Addition eine skalare Funktion gebildet:

$$\text{div } \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Diese Summe kann formal aufgefasst werden als das Skalarprodukt aus dem Vektor Nabla und dem Vektor $\boldsymbol{v}$:

$$\text{div } \boldsymbol{v} = \left( \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_3 \right) \cdot \left( v_x\boldsymbol{e}_1 + v_y\boldsymbol{e}_2 + v_z\boldsymbol{e}_3 \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{v}.$$

**3. Rotation:** Die Komponenten eines Vektors $\boldsymbol{v}$ werden partiell »nach den beiden anderen Indices« abgeleitet und daraus Differenzen nach Art eines Vektorprodukts gebildet. Diese werden schließlich als Komponenten eines neuen Vektors benutzt. In der Schreibweise als symbolische Determinante wird dies am anschaulichsten:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)\boldsymbol{e}_1 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)\boldsymbol{e}_2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)\boldsymbol{e}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Dieser Vektor wiederum kann formal aufgefasst werden als das Vektorprodukt aus dem Vektor Nabla und dem Vektor $\boldsymbol{v}$:

$$\text{rot}\,\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}.$$

Der symbolische Vektor Nabla wird »HAMILTON-Differentialoperator« oder Nabla-Operator genannt. (Der Name beruht auf der Ähnlichkeit des Symbols mit der antiken Harfe Nabla.)

## Zusammenfassung:

Mit

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_3$$

ist

$$\text{grad } U = \nabla U, \quad \text{div } \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}, \quad \text{rot}\,\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}.$$

Ferner ist

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta, \qquad \Delta: \text{ LAPLACE-Operator}$$