VEKTORALGEBRA

SIEGFRIED PETRY

Fassung vom 24.Januar 2013

I n h a l t

►►

1 Einleitung

1.1 Skalare Größen und vektorielle Größen

In der Physik wird zwischen **gerichteten** und **ungerichteten Größen** (und Größenarten) unterschieden.

Ungerichtete Größen sind solche, die durch ihren Größenwert (das Produkt aus einem Zahlenwert und einer Maßeinheit) vollständig beschrieben sind. Dazu gehören zum Beispiel die Temperatur und der Luftdruck in einem Punkt des Raumes.

Gerichtete Größen dagegen sind solche, zu deren vollständiger Beschreibung zusätzlich eine Richtungsangabe erforderlich ist. Gerichtete Größen sind zum Beispiel: Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Körpers, die auf einen Körper wirkende Kraft, die elektrische und magnetische Feldstärke in einem Punkt des Raumes.

Ungerichtete Größen werden als **skalare Größen** (kurz: **Skalare**) bezeichnet, gerichtete Größen als **vektorielle Größen** (kurz: **Vektoren**).

(In der »Linearen Algebra« , haben Vektoren eine etwas andere Bedeutung; wir beschäftigen uns hier jedoch nur mit physikalischen Vektoren und ihrer mathematischen Behandlung.)

In der Physik unterscheidet man verschiedene Arten von Vektoren:

Freie Vektoren können parallel zu sich selbst im Raum verschoben werden.

Linienflüchtige Vektoren (zum Beispiel Kräfte) sind an ihre Wirkungslinie gebunden und nur längs dieser verschiebbar.

Ortsgebundene Vektoren können überhaupt nicht verschoben werden. Dazu gehören die Feldvektoren, die einem bestimmten Punkt zugeordnet sind, und die Ortsvektoren, die immer im Ursprung des Basissystems beginnen.

Die Unterscheidung zwischen diesen Vektoren trifft die Experimentalphysik. Bei der Herleitung der Rechengesetze ist der Unterschied meist bedeutungslos.

Vom Schulunterricht her wird der Vektorbegriff oft mit einer Kraft verbunden, und tatsächlich wird seine Einführung erstmals in diesem Zusammenhang nötig. Der einfachste und elementare Vektor aber ist der gerichtete Abstand zweier Punkte, und genau damit wollen wir beginnen.

Eine vektorielle Größe wird durch einen Pfeil dargestellt. Dieser Pfeil wird ebenfalls Vektor genannt. Er hat dieselbe Richtung wie die vektorielle Größe, die er darstellt. Seine Länge entspricht nach einem möglichst zweckmäßig zu wählendem Maßstab dem Größenwert der dargestellten Größe, d. h. sie ist ihm proportional. So kann zum Beispiel ein 3 cm langes Vektorsymbol (ein 3 cm langer Pfeil) eine Kraft von 300 Newton (N) darstellen. Der Abbildungsmaßstab ist in diesem Fall

$$M = 1\,\text{cm} : 100\ \text{N} = \frac{1\ \text{cm}}{100\ \text{N}} = 0{,}01\frac{\text{cm}}{\text{N}}.$$

Um den Größenwert der dargestellten vektoriellen Größe zu erhalten, muss man – wie bei einer Landkarte – die Länge des Vektorsymbols durch den Maßstab M dividieren (oder mit dem Kehrwert multiplizieren).

Die Länge des Vektorsymbols stellt also den Größenwert der abgebildeten Größe dar – das Produkt aus Zahlenwert und Maßeinheit – und wird **Betrag des Vektors** genannt. Die für den Betrag übliche Kennzeichnung sind zwei senkrechte Striche, wie sie aus der Algebra bekannt sind. Wenn immer möglich aber werden wir den Betrag eines Vektors mit einem normalen (nicht fett gedruckten) Kursivbuchstaben (z. B. V) bezeichnen, den Vektor selbst mit einem fett gedruckten Kursivbuchstaben (z. B. $\boldsymbol{V}$).

Für handschriftliche Aufzeichnungen eignet sich nur die Schreibweise mit einem Pfeil über dem Vektorsymbol.

Zur mathematischen Beschreibung eines Vektors benötigt man drei nicht in einer Ebene liegende Einheitsvektoren (Vektoren mit dem Betrag 1). Die drei Einheitsvektoren bilden eine »Basis« oder ein »Basissystem«. Einzelheiten dazu folgen später.

1.2 Invarianz bei Basiswechsel

Die erste fundamentale Eigenschaft eines jeden Vektors $\boldsymbol{V}$ ist, dass sein Betrag V und seine Richtung im Raum in jedem beliebigen (bei Geschwindigkeitsvektoren: nicht bewegten) Basissystem dieselben sind. Dies versteht sich von selbst, denn die durch einen Vektorpfeil dargestellte vektorielle Größe ist von der Basis, die der Beobachter willkürlich wählen kann, unabhängig. (Beispiele: Der Abstandsvektor zweier Punkte und die Gewichtskraft eines Körpers sind gleichsam »absolute Größen«, deren Größenwerte mit der benutzten Basis nichts zu tun haben.)

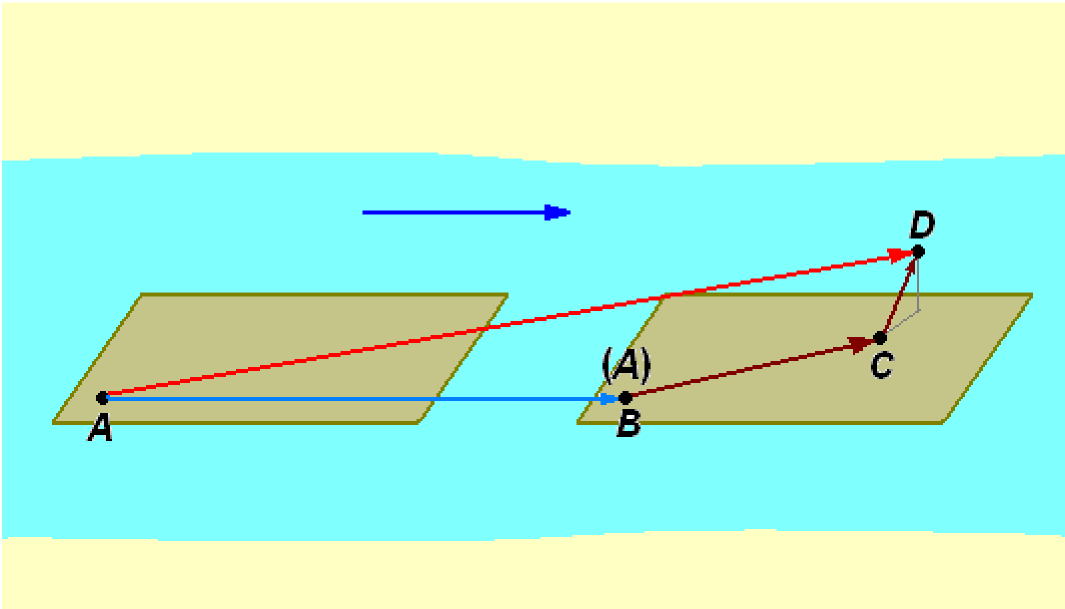
Die Aussage, der Vektor habe »im Raum« eine bestimmte Lage, beruht auf der Vorstellung eines »absoluten Raumes«. Da der absolute Raum nach der Speziellen Relativitätstheorie jedoch eine unhaltbare Fiktion ist, gehen wir etwas bescheidener vor. Wir richten in dem Punkt, in dem wir uns augenblicklich befinden, eine »Fundamentalbasis« B_0 ein: Der erste Einheitsvektor dieser Basis sei nach Norden gerichtet, der zweite nach Westen, der dritte weise senkrecht nach oben, also zum Zenit. Bezüglich dieser Basis hat der betrachtete Vektor eine bestimmte Richtung, die durch die Winkel beschrieben werden kann, die er mit den drei Basisvektoren bildet. Mit den Basisvektoren einer anderen Basis bildet der Vektor im Allgemeinen andere Winkel, er hat also bezüglich dieser Basis eine andere Richtung. Es ist aber möglich, aus diesen Winkeln diejenigen Winkel zu berechnen, die der Vektor mit den Basisvektoren der Fundamentalbasis bildet. Und diese Berechnungen ergeben – unabhängig von der jeweils benutzten Basis – immer dieselben Werte.

Diese fundamentale Eigenschaft ist gemeint, wenn gesagt wird, Vektoren seien »vom Basissystem unabhängig« oder »invariant bei (auch: gegenüber) Basiswechsel«.

2 Grundrechenarten mit Vektoren

2.1 Addition von Vektoren

Eine weitere fundamentale Eigenschaft der Vektoren ist die besondere Art ihrer Addition. Dies soll am Beispiel einer zusammengesetzten Verschiebung erklärt werden.



Auf einem Fluss treibe ein Floß abwärts. Auf dem Floß steht im Punkt A ein Mensch. Während das Floß über die Strecke AB verschoben wird, bewege sich der Mensch (in der Abbildung vertreten durch seinen Fußpunkt) auf dem Floß vom Punkt A zunächst zu einem Punkt C. Dort ersteigt er eine Stehleiter und befindet sich schließlich im Punkt D. Seine daraus resultierende Verschiebung wird dargestellt durch den Vektor $\overrightarrow{AD}$. Man findet sie, indem man die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CD}$ der einzelnen Verschiebungen »aneinander heftet« und dann den Fußpunkt des ersten Vektors mit der Spitze des letzten verbindet. Dieses Verfahren heißt Vektoraddition oder vektorielle Addition. Diese Operation wird beschrieben durch die »Vektorgleichung«

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

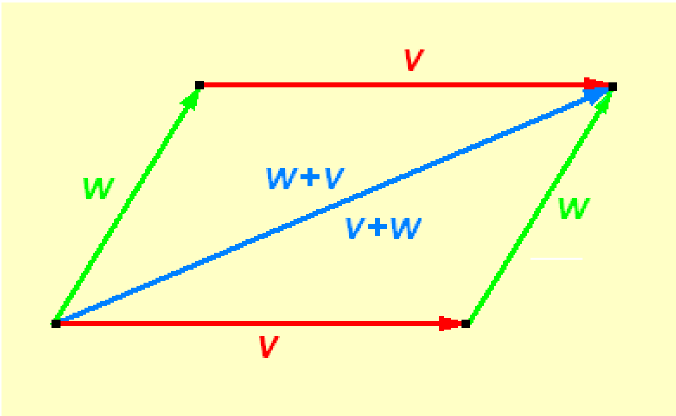
In diesem Beispiel mit drei Verschiebungsvektoren ist das Verfahren der vektoriellen Addition unmittelbar einsichtig. Bei allen anderen physikalischen Größenarten dagegen muss erst nachgewiesen werden, dass die dazu gehörigen Größen sich vektoriell summieren lassen, bevor ihnen die Vektoreigenschaft zuerkannt werden kann. Dies ist eine Aufgabe der Experimentalphysik.

Neben der Invarianz gegenüber Basiswechsel ist die vektorielle Summierbarkeit eine wesensbegründende (konstituierende) Eigenschaft der Vektoren.

Es gibt allerdings eine kleine Zahl von Ausnahmen. So ist es zum Beispiel nützlich und sinnvoll, bei gewissen Vorgängen (etwa bei Strömungen) ein Flächenstück durch seinen Flächenvektor (der auf dem Flächenstück senkrecht steht) darzustellen, oder die Winkelgeschwindigkeit einer Rotationsbewegung durch einen in der Drehachse liegenden Vektor. Aber die vektorielle Addition dieser Vektoren wäre im ersten Fall im Allgemeinen sinnlos, im zweiten falsch.

Wenn nur zwei Vektoren zu addieren sind – z. B. wenn an einem Punkt gleichzeitig zwei Kräfte angreifen – kann die Addition der Vektoren auch durch das »Vektorparallelogramm« vorgenommen werden. Die beiden im selben Punkt fußenden Kraftvektoren werden zu einem Parallelogramm ergänzt. Die vom Fußpunkt ausgehende Diagonale des Parallelogramms ist dann der Summenvektor. Die Abbildung zeigt nicht nur, dass diese Methode zum selben Ergebnis führt wie das Aneinanderheften, sondern auch, dass die Reihenfolge der Vektoren beim Aneinanderheften beliebig ist (Kommutativgesetz):

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}. \tag{2.1}$$



Übung 2.1: Beweisen Sie, dass gilt

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}), \tag{2.2}$$

(Assoziativgesetz), auch wenn die Vektoren nicht in derselben Ebene liegen (nicht »komplanar« sind.)

In Gleichung (2.2) wird – wie in der Algebra – die Reihenfolge der Summationen durch Klammern vorgeschrieben.

Wegen des Assoziativgesetzes kann man für die Summe einfach schreiben

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}.$$

Von Gleichung (2.2) ausgehend kann leicht bewiesen werden, dass das Assoziativgesetz auch bei beliebig vielen Summanden gilt.

Übung 2.2: Führen Sie diesen Beweis durch.

2.2 Subtraktion von Vektoren

Wir verabreden:

1. Es sei der Vektor $\boldsymbol{w}$ = -$\boldsymbol{v}$ ein Vektor von gleichem Betrag und gleicher Richtung im Raum aber von umgekehrter Orientierung wie der Vektor $\boldsymbol{v}$.

2. Die Differenz $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ zweier Vektoren sei gleich der Summe der Vektoren $\boldsymbol{v}$ und (–$\boldsymbol{w}$):

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{w}). \tag{2.3}$$

Damit ist die Subtraktion auf eine Addition zurückgeführt.

3. Die Bildung der Differenz $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v})$ führt zum Fußpunkt von $\boldsymbol{v}$ zurück, ergibt also einen Vektor vom Betrag null und unbestimmter Richtung. Dieser Vektor heißt Nullvektor $\boldsymbol{o}$. Es ist also

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}. \tag{2.4}$$

Ist die Summe von n Vektoren gleich dem Nullvektor, also

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o},$$

dann bilden die n Vektoren einen geschlossenen Polygonzug. Weil dann jeder der Vektoren mittels einer linearen Gleichung durch die anderen ausgedrückt (und somit aus diesen berechnet) werden kann, heißen die Vektoren (von einander) linear abhängig.

2.3 Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

1. Es sei $\boldsymbol{v}$ ein Vektor und n eine natürliche Zahl größer als null. Wie in der elementaren Algebra definieren wir dann das Produkt $n\,\boldsymbol{v}$ als die Summe von n gleichen Summanden $\boldsymbol{v}$**:**

$$n\boldsymbol{v} := \underbrace{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} + \cdots + \boldsymbol{v}}_{n \text{ Summanden } \boldsymbol{v}}$$

Nach dem Gesetz der Vektoraddition ergibt dies einen Vektor von gleicher Richtung wie der Vektor $\boldsymbol{v}$ und von n-fachem Betrag.

2. Nun können wir die Beschränkung auf ganze Zahlen n aufgeben und die Definition verallgemeinern: Wenn k eine positive reelle Zahl ist, dann ist $k\boldsymbol{v}$ ein Vektor von gleicher Richtung wie $\boldsymbol{v}$ und von k-fachem Betrag. Für $k = 0$ ist

$$k\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}.$$

3. Wenn k eine positive reelle Zahl ist, dann ist $(-k)\,\boldsymbol{v}$ gleich dem Vektor $-(k\,\boldsymbol{v})$.

2.4 Multiplikation eines Vektors mit einer skalaren Größe

Es sei $\boldsymbol{v}$ ein Vektor und S eine *skalare* Größe mit dem Zahlenwert $\{S\}$ und der Maßeinheit $[S]$, also

$$S = \{S\} \cdot [S].$$

(Lies: Größenwert von S = Zahlenwert von S mal (Maß-)Einheit von S.)

Der Betrag des Vektors $\boldsymbol{v}$ sei analog $v = \{v\} \cdot [v]$. Dann ist der Vektor $\boldsymbol{w} = S \cdot \boldsymbol{v}$ ein Vektor von der Richtung des Vektors $\boldsymbol{v}$ und dem Betrag $w = \{S\} \cdot \{v\} \cdot [S] \cdot [v]$. Anders ausgedrückt: Der Betrag des Vektors $\boldsymbol{w}$ ist gleich dem Größenwert von S multipliziert mit dem Betrag von $\boldsymbol{v}$, die Richtung des Vektors $\boldsymbol{w}$ ist dieselbe wie die des Vektors $\boldsymbol{v}$, wenn der Zahlenwert von S größer null ist, anderenfalls entgegengesetzt.

Beispiel: Die Kraft $\boldsymbol{F}$, die eine elektrische Ladung Q in einem Punkt eines elektrischen Feldes mit der Feldstärke $\boldsymbol{E}$ erfährt, ist

$$\boldsymbol{F} = Q\,\boldsymbol{E}.$$

Für $Q > 0$ ist $\boldsymbol{F} \uparrow\uparrow \boldsymbol{E}$, anderenfalls ist $\boldsymbol{F} \uparrow\downarrow \boldsymbol{E}$.

Es sei zum Beispiel E = 4,0·10^{5} V/m und Q = 3,2·10^{-8} As, dann ist der Betrag des Vektors $\boldsymbol{F}$

$$F = 3{,}2\cdot 10^{-8}\ \text{As}\cdot 4{,}0\cdot 10^{5}\ \text{V/m} = 12{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

Jeder Vektor $\boldsymbol{v}$ kann dann dargestellt werden als das Produkt seines Betrages mit dem Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_v = \boldsymbol{v}_0$, das ist ein Vektor mit derselben Richtung wie der Vektor $\boldsymbol{v}$ und dem Betrag 1:

$$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e}_v = v\,\boldsymbol{v}_0. \qquad \textbf{(2.5)}$$

Umgekehrt ist der Einheitsvektor von der Richtung des Vektors $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{e}_v = \boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{v}}{v} = \frac{1}{v}\boldsymbol{v}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Die (bisher noch nicht definierte) Division eines Vektors durch einen Skalar S wird in Gleichung (2.6) interpretiert als Multiplikation mit dem Kehrwert des Skalars. Die fehlende Definition wird hiermit nachgeholt: Es sei

$$\frac{\boldsymbol{V}}{S} \overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{S}\boldsymbol{V}. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Beispiel: Die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ in einem Punkt eines elektrischen Feldes ist der Quotient aus der Kraft $\boldsymbol{F}$, die eine elektrische Ladung dort erfährt, und der Ladung:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q} = \frac{1}{Q}\boldsymbol{F}.$$

Eine Kuriosität: Die Multiplikation eines Vektors mit einer komplexen Zahl (Wer weiß, wofür man es mal braucht?) wird im Anhang 1 behandelt.

2.5 Multiplikation eines Vektors mit einem Vektor

Es gibt drei verschiedene Produkte zweier Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$: das Skalarprodukt, das Vektorprodukt und das dyadische Produkt.

2.5.1 Das Skalarprodukt

Es hat seinen Namen daher, dass sein Ergebnis ein Skalar ist. Das Skalarprodukt von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ wird normgerecht geschrieben

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}.$$

(Lies: v Punkt w oder vw.)

Wir verwenden im Allgemeinen die erste Schreibweise.

Definition des Skalarprodukts:

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \overset{\text{Def.}}{=} v\,w\cos\sphericalangle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = v\,w\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \qquad \textbf{(2.8)}$$

Unter dem Winkel

$$\varphi = \sphericalangle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \sphericalangle(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}),$$

dem keine Richtung zugeordnet ist, wird der kleinere der beiden von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ eingeschlossenen Winkel verstanden. Es ist also stets

$$0 \le \varphi \le \pi.$$

In Verbindung mit trigonometrischen Funktionen kann das Winkelzeichen vor der Klammer weggelassen werden.

Das Skalarprodukt wurde eingeführt und definiert im Hinblick auf die Arbeit W, die eine Kraft $\boldsymbol{F}$ längs eines Weges $\Delta \boldsymbol{s}$ verrichtet, wenn die Kraftrichtung nicht mit der Verschiebungsrichtung zusammenfällt. Dann ist nämlich

$$W = F \, \triangle s \, \cos(\boldsymbol{F}, \triangle \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{F} \cdot \triangle \boldsymbol{s}.$$

Das Skalarprodukt ist invariant gegenüber Basiswechsel. Dies folgt unmittelbar aus seiner Definition (rechte Seite von Gleichung 2.8): Alle darin auftretenden Größen sind von der benutzten Basis unabhängig. Man kann aber auch argumentieren, dass dies schon aus der Schreibweise $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ folgt: Die beiden darin auftretenden Vektoren sind basisunabhängig, also müssen es auch alle damit vorgenommenen Operationen sein, wenn diese selbst keinen Bezug zur Basis haben.

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} &\text{Für } \varphi = 0 \quad \text{ist} \quad && \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v\, w, \\ &\varphi = \tfrac{\pi}{2} && \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0, \\ &\varphi = \pi && \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = -v\, w. \end{aligned}$$

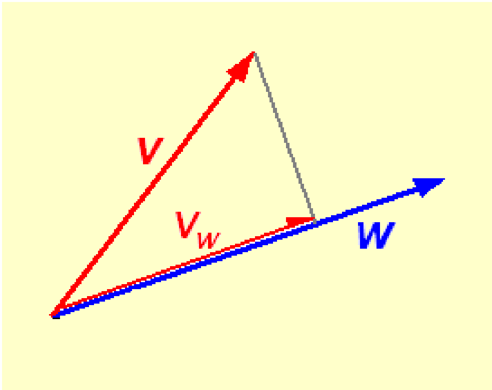
$$\text{Für } \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0 \ \text{ und } \ v, w \neq 0 \text{ ist } \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}.$$

Umgekehrt muss, wenn $\boldsymbol{v}$ senkrecht zu $\boldsymbol{w}$ sein soll, $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ sein (»Orthogonalitätsbedingung«).

Ein wichtiger Sonderfall: Aus Gleichung (2.8) folgt für $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ wegen $\cos 0^\circ = 1$:

$$\boxed{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \ \equiv \ \boldsymbol{v}^2 = v \cdot v = v^2}$$

Das Skalarprodukt kann interpretiert werden als das Produkt aus dem Betrag eines beliebigen der beiden Vektoren und dem Betrag der Projektion des anderen Vektors auf jenen.



$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_w w = v\, w_v.$$

Ist der Winkel φ zwischen den beiden Vektoren größer als $\pi/2$, dann ist der Betrag der Projektion mit einem negativen Vorzeichen zu versehen.

Da die Reihenfolge der Faktoren auf der rechten Seite von Gleichung (2.8) beliebig und $\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \cos(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ ist, ist auch die Reihenfolge der beiden Vektoren auf der linken Seite beliebig. Es gilt also für das Skalarprodukt das Kommutativgesetz:

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Das Skalarprodukt heißt im Englischen auch »dot product« (Punktprodukt). Dass diese neutralere Bezeichnung Vorzüge hat, zeigt folgende Übung:

Übung 2.3: Was bedeutet das doppelte »Punktprodukt« $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$? Ist das doppelte Punktprodukt assoziativ, d. h. ist $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$? Begründen Sie Ihre Antwort. (Das Ergebnis zeigt, warum das doppelte Punktprodukt nicht doppeltes Skalarprodukt genannt werden darf.)

Übung 2.4: Beweisen Sie graphisch das Distributivgesetz

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \qquad \textbf{(2.10)}$$

wobei die drei Vektoren im Allgemeinen nicht in derselben Ebene liegen.

Übung 2.5: Zeigen Sie – ausgehend von Gleichung (2.10) –, dass die Distributivität auch für folgende Terme gilt:

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{t} \quad \text{und} \quad (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{t}).$$

Übung 2.6: Gegeben zwei beliebige Vektoren ***v*** und ***w***. Berechnen Sie die zu ***w*** parallele und die dazu senkrechte Komponente von ***v***.

2.5.2 Das Vektorprodukt

Es heißt so, weil sein Ergebnis ein Vektor ist.

Definition: Das Vektorprodukt ***u*** x ***v*** (lies: ***u*** Kreuz ***v***) ist ein Vektor ***w***, der auf ***u*** und ***v*** senkrecht steht und so gerichtet ist, dass ***u***, ***v***, ***w*** ein Rechtssystem bilden. Der Betrag des Vektors ***w*** ist

$$w=|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=u\,v\sin\varphi=u\,v\,\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}). \qquad \textbf{(2.11)}$$

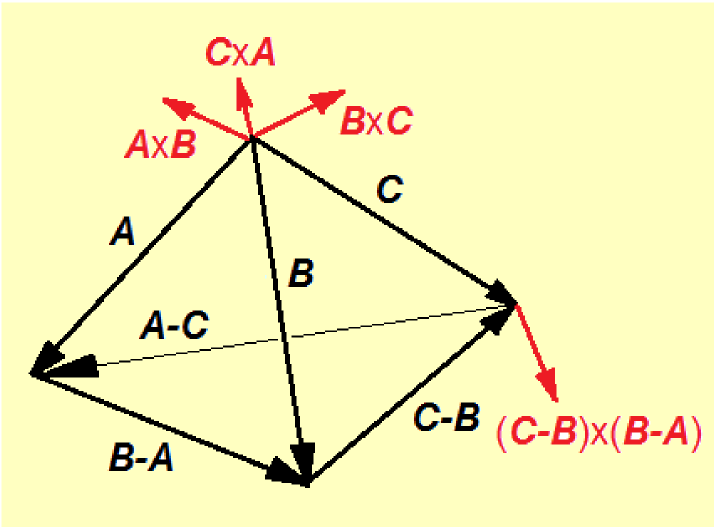
Definition Rechtssystem: Die Vektoren ***u, v, w*** bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, wenn die Drehung, die ***u*** auf dem kürzesten Weg in die Richtung von ***v*** bringt, mit der Richtung von ***w*** eine Rechtsschraube bildet. (Drei-Finger-Regel der rechten Hand: Daumen, Zeigefinger und der dazu senkrecht ausgestreckte Mittelfinger bilden ein Rechtssystem.) Wenn ***u, v, w*** ein Rechtssystem ist, dann sind auch ***v, w, u*** und ***w, u, v*** Rechtssysteme und ***v, u, w*** usw. sind Linkssysteme.

Beachten Sie: Die hier benutzten senkrechten Striche um das Vektorprodukt sollen »Betrag von ***u*** x ***v***« bedeuten.
Der Betrag von ***w*** ist nach Gleichung (2.11) gleich dem Größenwert der Fläche des von ***u*** und ***v*** »aufgespannten« Parallelogramms.

Da die Vektoren ***u*** und ***v*** nicht unbedingt Streckenvektoren oder Verschiebungsvektoren sind, hat der Größenwert der Fläche nicht notwendig die Dimension FLÄCHE = LÄNGE x LÄNGE. Zum Beispiel kann ***v*** eine Kraft und ***u*** ihr Hebelarm sein. Dann ist ***u*** x ***v*** der Vektor des von der Kraft ausgeübten Drehmoments.

Das Vektorprodukt ist somit ein Vektor von ganz anderer Art als die bisher behandelten Vektoren wie Verschiebungsvektoren, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren oder Kraft- und Feldstärkevektoren. Das Vektorprodukt beschreibt die Lage eines »Flächenstücks« (im oben beschriebenen erweiterten Sinn) im Raum und dessen Umlaufsrichtung. Solche Vektoren werden **axiale**

Vektoren genannt, die früher beschriebenen Vektoren heißen **polare Vektoren**. Zwischen diesen beiden Arten von Vektoren bestehen tiefgreifende Unterschiede. Zum Beispiel ist es im Allgemeinen sinnlos oder falsch, axiale Vektoren zu addieren. Eine wichtige Ausnahme sind die Flächenvektoren eines Tetraeders und allgemein die eines Polyeders. Wir verabreden, dass die Flächenvektoren eines Polyeders stets nach außen gerichtet sein sollen. Ein Tetraeder, dessen von der Spitze ausgehenden Kanten die Vektoren ***A*, *B*** und ***C*** sind, hat als Kanten der Grundfläche die Vektoren ***B*–*A*, *C*–*B*** und ***A*–*C*.** Dann ist, wie sich durch Ausmultiplizieren des Vektorprodukts (***C*–*B***)x(***B*–*A***) ergibt, die Summe der Flächenvektoren gleich null.



Da jedes Polyeder in eine Anzahl von Tetraedern zerlegt werden kann, gilt der Satz für alle Polyeder:

$$\sum \boldsymbol{A}_{\mathrm{i}} = 0.$$

Anleitung: Man zerlege die Flächen des Polyeders durch Diagonalen in Dreiecke. Einen beliebigen Punkt im Inneren des Polyeders verbinde man mit jedem Eckpunkt der Oberfläche. So entstehen Tetraeder. Die Summe ihrer Flächenvektoren ist null. Da bei der Summierung die im Inneren des Polyeders gelegenen Flächen je zweimal mit entgegengesetzt gleichen Vektoren auftreten, ist die Summe dieser Flächenvektoren null. Folglich ist auch die Summe der nach außen gerichteten Flächenvektoren null.

Jede beliebige geschlossene Fläche (eine so genannte Hüllfläche) kann auf ähnliche Weise durch eine große Anzahl von Tetraedern angenähert werden, deren dreieckige Grundflächen in je einer Tangentenebene der Fläche liegen. Für die Summe der Flächenvektoren dieser Dreiecke gilt dann

$$\sum \Delta\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}} = 0\,,$$

und für den Grenzwert dieser Summe für alle $\Delta\boldsymbol{A}_{\mathrm{i}}$ gegen 0

$$\lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \Delta\boldsymbol{A}_i \equiv \oint \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0.$$

Ein solches Integral heißt **Hüllenintegral**.

Vertauscht man im Vektorprodukt die Reihenfolge der Faktoren, so bleibt der Betrag des Vektors ***w*** = ***v*** x ***u*** unverändert, aber seine Richtung wird umgekehrt, weil nun ***v***, ***u***, ***w*** ein Rechtssystem ist. Also ist

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{v}. \qquad \textbf{(2.12)}$$

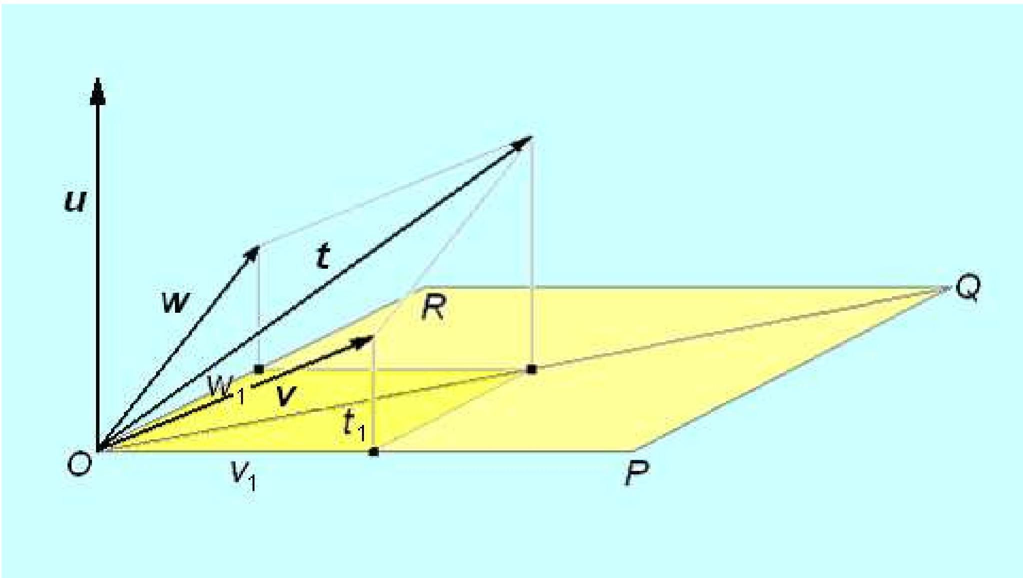
Das Vektorprodukt ist also nicht kommutativ.

Dagegen ist das Vektorprodukt distributiv:

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}. \qquad \textbf{(2.13)}$$

(Der folgende etwas aufwändige Beweis ist nötig, um später das Vektorprodukt aus den Vektorkomponenten berechnen zu können.)

Beweis: Ohne Beeinträchtigung der Allgemeingültigkeit können wir die Zeichenebene in die von den Vektoren ***u*** und ***v*** aufgespannte Ebene legen und diese dann so drehen, dass ***u*** senkrecht nach oben zeigt.



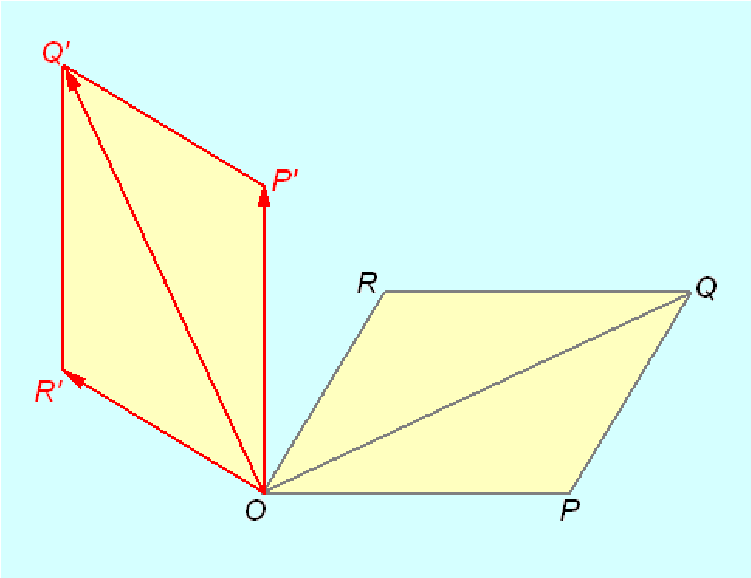
Das von ***v*** und ***w*** aufgespannte Parallelogramm wird in die durch *O* gehende und auf ***u*** senkrecht stehende Ebene projiziert. Für die Beträge gilt dann

$$v_1 = v\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \quad w_1 = w\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}), \quad t_1 = t\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}).$$

Multipliziert man die Projektionen alle mit dem Betrag *u*, so erhält man das größere Parallelogramm *OPQR*, für dessen Seiten gilt:

$$\overline{OP} = u\,v_1 = u\,v\,\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|,$$
$$\overline{OR} = u\,w_1 = u\,w\,\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}|,$$
$$\overline{OQ} = u\,t_1 = u\,t\,\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}) = |\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{t}|.$$

Die Beträge der Seiten des Parallelogramms sind also gleich den Beträgen der Vektorprodukte ***u*** x ***v***, ***u*** x ***w*** und ***u*** x ***t***. – Nun wird das Parallelogramm in seiner Ebene um 90° links herum gedreht. Die folgende Abbildung zeigt die verkleinerte Draufsicht.



Die einander zugeordneten Seiten stehen nun aufeinander senkrecht. Damit steht *OP'* aber auch auf ***u*** senkrecht, *OQ'* auf ***t*** und *OR'* auf ***w***. Somit gilt für die drei rot gezeichneten Vektoren:

$$\overrightarrow{OP'} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \quad \overrightarrow{OR'} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}, \quad \overrightarrow{OQ'} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{t}.$$

Nun ist aber

$$\overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OQ'} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{t},$$

und da $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ ist, erhält man schließlich

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}.$$

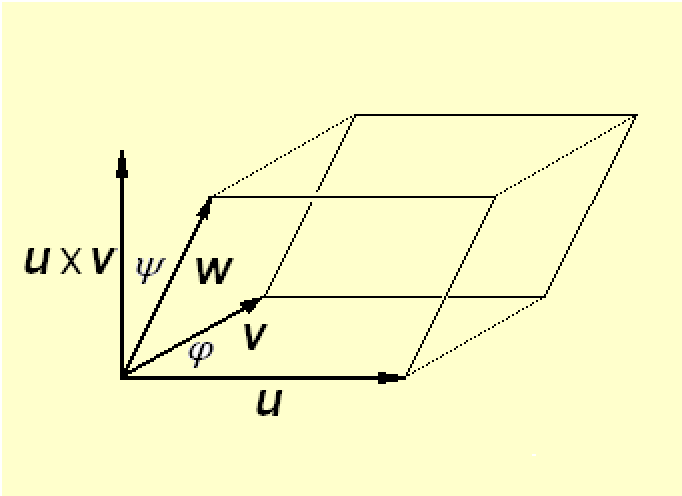
Übung 2.7: Zeigen Sie , dass das Distributivgesetz auch für folgende Terme gilt:

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} + \boldsymbol{t}) \quad \text{und} \quad (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{t}).$$

Auf das **dyadische Produkt** wird hier nicht näher eingegangen, weil dazu die Matrizendarstellung der Vektoren nötig ist. (Siehe dazu »Einführung in die Tensorrechnung« auf dieser Website.)

2.5.3 Mehrfache Produkte von Vektoren

Eine einfache Behandlung mehrfacher Produkte von Vektoren ist im Allgemeinen erst mit Hilfe der Komponentendarstellung in einem Basissystem möglich. Daher wird an dieser Stelle nur ein einziger Typ eines mehrfachen Produkts behandelt, das so genannte Spatprodukt ($\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{v}$)·$\boldsymbol{w}$. Der erste Faktor dieses Skalarprodukts ist der Flächenvektor des von ***u*** und ***v*** aufgespannten Parallelogramms. Die skalare Multiplikation mit ***w*** ergibt den Größenwert des Volumens V_S des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds (Spates), wenn ***u, v, w*** ein Rechtssystem ist, anderenfalls den negativen Größenwert von V_S. (Der Begriff »Spat« ist der Mineralogie entlehnt; denken Sie zum Beispiel an Feld- oder Flussspat.)



Da das Volumen des Spates unabhängig davon ist, welche seiner Flächen man als Grundfläche betrachtet, ist

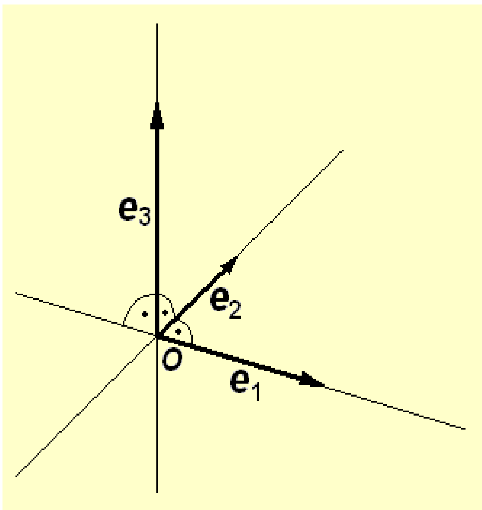
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{w} \\ &= -(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{v}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Für das Spatprodukt ist auch folgende Schreibweise gebräuchlich

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}]. \tag{2.15}$$

3 Einführung eines kartesischen Basissystems

Drei aufeinander senkrechte Einheitsvektoren (Vektoren vom Betrag 1, der durch eine beliebig gewählte Strecke dargestellt wird), bilden die Basis $B\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ eines kartesischen »Basissystems«. Dieses entsteht aus der Basis durch geradlinige Verlängerung der Basisvektoren in beiden Richtungen. Die Basisvektoren bilden in der genannten Reihenfolge ein Rechtssystem.

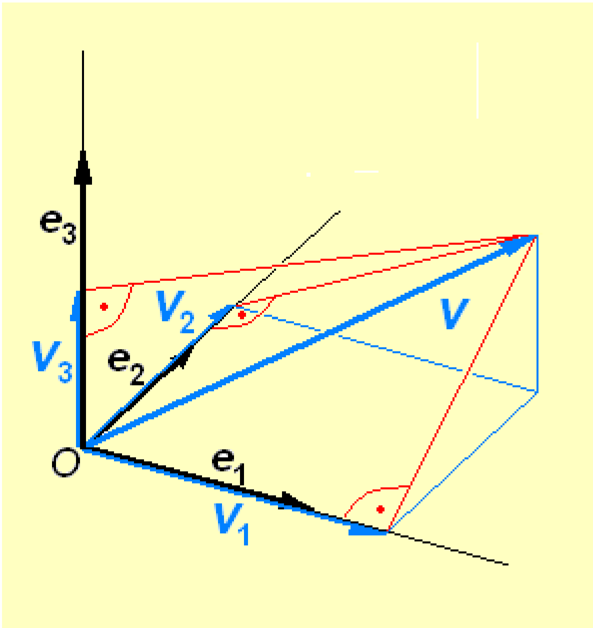


Die Lage der Basis zur Zeichenebene ist beliebig wählbar.

Wir betrachten nun einen beliebig im Raum gelegenen Vektor $\boldsymbol{v}$, den wir zunächst parallel zu sich selbst verschieben, sodass sein Fußpunkt im Ursprung O der Basis zu liegen kommt. Auf die folgenden Überlegungen hat die Parallelverschiebung keinen Einfluss.

Die (senkrechten) Projektionen $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, des Vektors $\boldsymbol{v}$ auf die Achsen des Basissystems heißen seine vektoriellen Komponenten, deren Beträge heißen seine skalaren Komponenten im gegebenen Basissystem. Durch seine skalaren oder seine vektoriellen Komponenten ist der Vektor im Basissystem eindeutig beschrieben:

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3.$$



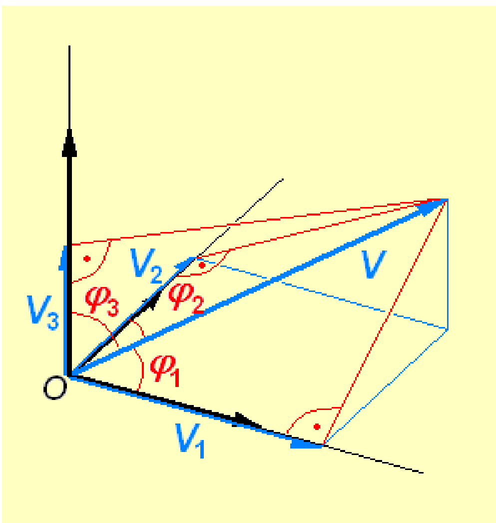
Eine zweite Möglichkeit, den Vektor zu beschreiben, ist die Angabe seines Betrags v und der drei Winkel (»Richtungswinkel«) φ_1, φ_2, φ_3, die er mit den Basisvektoren bildet:

$$\boldsymbol{v} = (v,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3).$$

Für die Richtungswinkel gilt die beim Skalarprodukt getroffene Verabredung: Die Winkel sind nicht gerichtet und es ist stets

$$0 \le \varphi_i \le \pi, \quad i = 1, 2, 3.$$

Zwischen den skalaren Komponenten und den »Richtungskosinus« besteht – wie man der Abbildung



entnehmen kann – folgender Zusammenhang:

$$\frac{v_1}{v} = \cos\varphi_1, \quad \frac{v_2}{v} = \cos\varphi_2, \quad \frac{v_3}{v} = \cos\varphi_3. \tag{3.1}$$

Wegen

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v^2 \tag{3.2}$$

ist

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1. \tag{3.3}$$

4 Rechnen mit Vektoren in Komponentendarstellung

4.1 Summe und Differenz zweier Vektoren

Es sei

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3).$$

Dann ist

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w} = v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3 \pm (w_1\,\boldsymbol{e} + w_2\,\boldsymbol{e}_2 + w_3\,\boldsymbol{e}_3)$$

und wegen der Gültigkeit des Assoziativ- und Distributivgesetzes

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \pm \boldsymbol{w} = (v_1 \pm w_1)\boldsymbol{e}_1 + (v_2 \pm w_2)\boldsymbol{e}_2 + (v_3 \pm w_3)\boldsymbol{e}_3. \tag{4.1}$$

Übung 4.1

Gegeben $\boldsymbol{v}$ = (v_1, v_2, v_3) und $\boldsymbol{w}$ = (w_1, w_2, w_3). Berechnen Sie die skalaren Komponenten des Vektors $\boldsymbol{u}$ = $\boldsymbol{v}$ + $\boldsymbol{w}$, sowie seinen Betrag und seine Richtungskosinus cos ψ_i (i = 1, 2, 3).

4.2 Das Skalarprodukt

Aus der Definition des Skalarprodukts ergibt sich für die Skalarprodukte von je zwei Basisvektoren

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1 \tag{4.2}$$

und

$$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0. \tag{4.3}$$

Für das Skalarprodukt von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ gilt dann

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = (v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3) \cdot (w_1\,\boldsymbol{e}_1 + w_2\,\boldsymbol{e}_2 + w_3\,\boldsymbol{e}_2).$$

Mit dem Distributivgesetz und unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.2) und (4.3) folgt daraus schließlich

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \tag{4.4}$$

Insbesondere ist

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v^2. \tag{4.5}$$

Übung 4.2

Berechnen Sie den von ***v*** und ***w*** (siehe Übung 4.1) eingeschlossenen Winkel.

4.3 Das Vektorprodukt

Aus der Definition des Vektorprodukts ergibt sich für die Vektorprodukte von je zwei Basisvektoren:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\qquad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\qquad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2,\\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_3,\qquad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1\qquad \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_2,\\ \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3=0.\end{gathered}\tag{4.6}$$

Für das Vektorprodukt zweier Vektoren ***v*** und ***w*** gilt wegen der Distributivität und mit Gleichungen (4.6)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}&=(v_1\,\boldsymbol{e}_1+v_2\,\boldsymbol{e}_2+v_3\,\boldsymbol{e}_3)\times(w_1\,\boldsymbol{e}_1+w_2\,\boldsymbol{e}_2+w_3\,\boldsymbol{e}_3)\\ &=(v_2w_3-v_3w_2)\boldsymbol{e}_1+(v_3w_1-v_1w_3)\boldsymbol{e}_2+(v_1w_2-v_2w_1)\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann als Determinante geschrieben und in dieser Form leichter gemerkt werden:

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}.\tag{4.8}$$

4.4 Das Spatprodukt

Für das Spatprodukt lautet die Komponentendarstellung

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}\cdot(w_1\boldsymbol{e}_1+w_2\boldsymbol{e}_2+w_3\boldsymbol{e}_3),\tag{4.9}$$

woraus sich mit Gleichungen (4.6) ergibt

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}&=(u_2v_3-u_3v_2)w_1+(u_3v_1-u_1v_3)w_2+(u_1v_2-u_2v_1)w_3\\ &=\begin{vmatrix}w_1 & w_2 & w_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Bei der letzten Umformung wurden die Zeilen der Determinante zyklisch vertauscht, wobei der Wert der Determinante unverändert bleibt.

4.5 Das doppelte Vektorprodukt

Die Komponentendarstellung des doppelten Vektorprodukts (***u*** x ***u***) x ***w*** ist

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=[\underbrace{(u_2v_3-u_3v_2)}_{K_1}\boldsymbol{e}_1+\underbrace{(u_3v_1-u_1v_3)}_{K_2}\boldsymbol{e}_2+\underbrace{(u_1v_2-u_2v_1)}_{K_3}\boldsymbol{e}_3]\times(w_1\boldsymbol{e}_1+w_2\boldsymbol{e}_2+w_3\boldsymbol{e}_3),$$

und mit den Abkürzungen für die Klammern

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=(K_1\boldsymbol{e}_1+K_2\boldsymbol{e}_2+K_3\boldsymbol{e}_3)\times(w_1\boldsymbol{e}_1+w_2\boldsymbol{e}_2+w_3\boldsymbol{e}_3),$$

und schließlich als Determinante geschrieben

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ K_1 & K_2 & K_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}.$$

Der Faktor von $\boldsymbol{e}_1$ ist:

$$\begin{aligned}K_2w_3-K_3w_2&=(u_3v_1-u_1v_3)w_3-(u_1v_2-u_2v_1)w_2\\ &=u_3v_1w_3-u_1v_3w_3-u_1v_2w_2+u_2v_1w_2\\ &=(u_3w_3+u_2w_2)v_1-(v_3w_3+v_2w_2)u_1.\end{aligned}$$

Addiert man beim ersten Term der letzten Zeile das Produkt $u_1v_1w_1$ und subtrahiert es beim zweiten Term, so erhält man

$$(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)v_1-(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)u_1=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})v_1-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})u_1.$$

Analog erhält man den Faktor von $\boldsymbol{e}_2$:

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})v_2-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})u_2$$

und den Faktor von $\boldsymbol{e}_3$:

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})v_3-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})u_3.$$

Also ist

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}&=[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})v_1-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})u_1]\boldsymbol{e}_1+[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})v_2-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})u_2]\boldsymbol{e}_2+[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})v_3-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})u_3]\boldsymbol{e}_3\\ &=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})(v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3)-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})(u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3),\end{aligned}$$

und schließlich

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{u}. \qquad \textbf{(4.11)}$$

Dies ist der so genannte **Entwicklungssatz**. Das doppelte Vektorprodukt ist demnach eine Linearkombination $a\,\boldsymbol{u}\ +\ b\,\boldsymbol{v}$ der Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$, folglich ein Vektor, der in der Ebene der Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ liegt.

Analog findet man

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}. \qquad \textbf{(4.12)}$$

Übungen 4.3:

Gegeben die Vektoren $\boldsymbol{u}$ = (1, 2, 3), $\boldsymbol{v}$ = (1, 3, -2) und $\boldsymbol{w}$ = (-2, -1, 0). Berechnen Sie:

1. $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$,
2. $\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{v}$,
3. $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}$ x $\boldsymbol{w})$,
4. $\boldsymbol{u}$ x ($\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{w}$),
5. ($\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{v}$) x $\boldsymbol{w}$.

4.6 Weitere Produkte mit vektoriellen Faktoren

Mit den bisher abgeleiteten Regeln lassen sich weitere beweisen:

$$(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{w} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \end{vmatrix},$$
$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \end{vmatrix}, \qquad \textbf{(4.13)}$$
$$(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{u})\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\left[\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{w}\right] - \boldsymbol{w}\left[\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\right].$$

Die in eckigen Klammern stehenden Produkte sind Spatprodukte (siehe dort).

5 Geometrische Anwendungen von Vektoren

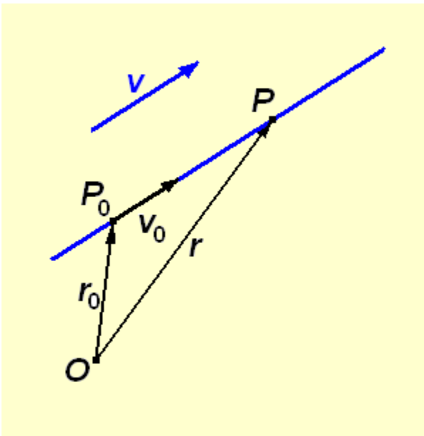
5.1 Gerade im Raum

5.1.1 Punkt-Richtungs-Gleichung

Durch einen Punkt P_0 des Raumes gehe eine Gerade von gegebener Richtung. Der Punkt P_0 werde durch seinen »Ortsvektor«

$$\overrightarrow{OP_0} = \boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = x_0\,\boldsymbol{e}_1 + y_0\,\boldsymbol{e}_2 + z_0\,\boldsymbol{e}_3 \qquad \textbf{(5.1)}$$

beschrieben, die Richtung der Geraden durch einen Vektor $\boldsymbol{v}$ oder den entsprechenden Einheitsvektor $\boldsymbol{v}_0$.



Dann kann der Ort eines Punktes P der Geraden gekennzeichnet werden durch seinen Ortsvektor

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{r}_0 + \frac{\lambda}{v}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_0 + \kappa\boldsymbol{v}, \qquad \textbf{(5.2)}$$

wobei λ und κ reelle Zahlen sind, sogenannte »Parameter«. Wenn λ (bzw. κ) alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt, durchläuft der Punkt P alle Punkte der Geraden. Der Vektor

$$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

wird beschrieben durch seine skalaren Komponenten, die hier identisch mit den Richtungskosinus des Einheitsvektors $\boldsymbol{v}_0$ sind. Die Vektorgleichung (5.1) ist äquivalent mit den drei skalaren Komponentengleichungen

$$x = x_0 + \lambda v_x, \quad y = y_0 + \lambda v_y, \quad z_0 + \lambda v_z, \qquad \textbf{(5.3)}$$

die auch geschrieben werden können

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}. \qquad \textbf{(5.4)}$$

Die Geradengleichung kann auch als parameterfreie Vektorgleichung geschrieben werden:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{v} = 0. \qquad \textbf{(5.5)}$$

Begründung: Da der Vektor $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ parallel zu $\boldsymbol{v}$ ist, ist das Vektorprodukt null.

Solche parameterfreien Vektorgleichungen – wie sie uns immer wieder begegnen werden – sind implizit, d. h. nicht nach $\boldsymbol{r}$ aufgelöst (und auch nicht auflösbar). Doch können daraus die Parameterdarstellungen der Komponenten von $\boldsymbol{v}$ gewonnen werden.

Übung 5.1

Gegeben ein Punkt P_0 (-2; 5; 3) und ein Vektor $\boldsymbol{v}$ (6; 4; 2).

1. Gesucht sind die Vektorgleichung der Geraden durch P_0 mit dem Richtungsvektor $\boldsymbol{v}$ sowie die Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ (x, y, z) eines Punktes der Geraden.

2. Aus der parameterfreien Vektorgleichung (5.5) sollen die Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ in Abhängigkeit von einem Parameter κ bestimmt werden.

5.1.2 Zwei-Punkte-Gleichung

Hier wird die Gerade durch zwei Punkte P_1 und P_2 definiert, durch die sie gehen soll. Die Ortsvektoren der beiden Punkte seien $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$. Die beiden Punkte (bzw. ihre Ortsvektoren) definieren einen Richtungsvektor $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, wodurch dieser Fall auf die Punkt-Richtungs-Gleichung zurückgeführt ist.

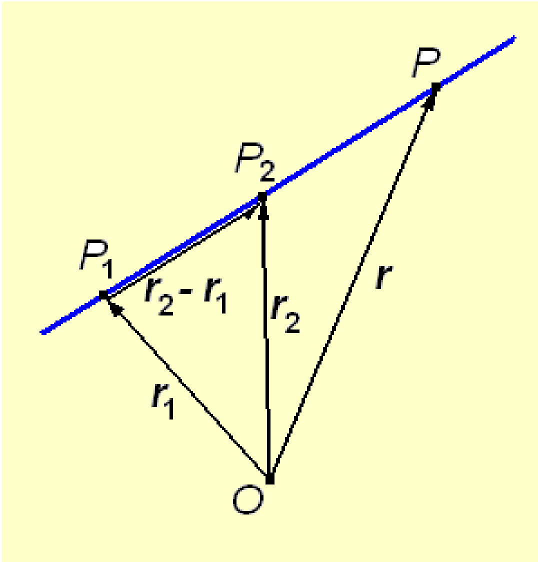
$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1). \qquad \textbf{(5.6)}$$

Die äquivalenten Koordinatengleichungen lauten dann

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) \qquad \textbf{(5.7)}$$

oder

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad \textbf{(5.8)}$$



Die parameterfreie Vektorgleichung ist analog zu Gleichung (5.5)

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=0. \tag{5.9}$$

Daraus kann wieder die Parameterdarstellung der Komponenten von $\boldsymbol{r}$ gewonnen werden.

Übung 5.2

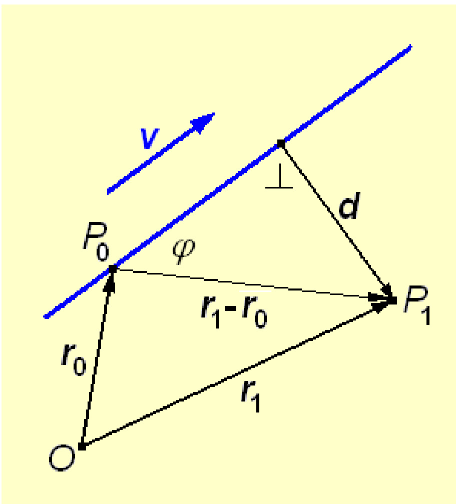
Gegeben zwei Punkte $P_1(4;\ 2;\ 5)$ und $P_2(-3;\ -1;\ 6)$. Bestimmen Sie aus Gleichung (5.9) eine Parameterdarstellung der Geraden P_1P_2.

Übung 5.3

Geben Sie eine in Vektoren ausgedrückte Bedingung dafür an, dass drei Punkte P_i mit $i = 1, 2, 3$ auf einer Geraden liegen. Was folgt daraus für ihre Koordinaten / für die Komponenten ihrer Ortsvektoren?

5.1.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden

Die Gerade sei durch einen ihrer Punkte und ihren Richtungsvektor bestimmt.



Für den Abstandsvektor $\boldsymbol{d}$ gilt dann (siehe Übung 3.4):

$$\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)_v = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) - \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\cdot \boldsymbol{v}}{v^2}\boldsymbol{v}. \qquad \textbf{(5.10)}$$

wobei $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)_v$ die Projektion de Vektors $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$ auf den Vektor $\boldsymbol{v}$ ist.

Der Betrag d von $\boldsymbol{d}$ lässt sich einfacher mit dem Vektorprodukt darstellen, weil nämlich

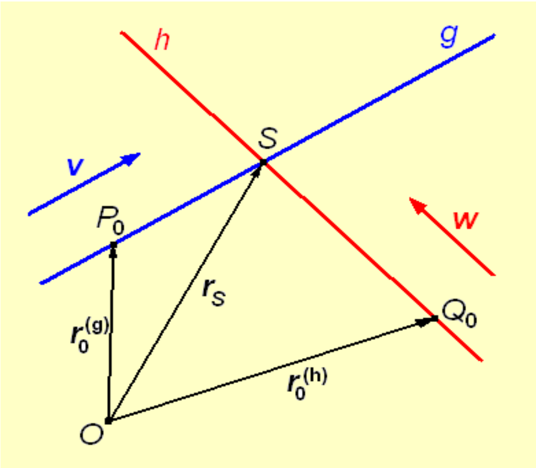
$$\frac{\mathrm{d}}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0|} = \sin\varphi \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\times \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0|\, v},$$

woraus folgt

$$\mathrm{d} = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\times \boldsymbol{v}|}{v}. \qquad \textbf{(5.11)}$$

5.1.4 Schnittpunkt zweier Geraden

Die beiden Geraden g und h seien durch je einen Punkt und ihren Richtungsvektor gegeben.



Dann lauten ihre Gleichungen:

$$g: \quad \boldsymbol{r}_g = \boldsymbol{r}_0^{(g)} + \lambda \boldsymbol{v}, \qquad h: \quad \boldsymbol{r}_h = \boldsymbol{r}_0^{(h)} + \kappa \boldsymbol{w}. \qquad \textbf{(5.12)}$$

Für die Ortsvektoren des Schnittpunkts S gilt dann

$$\boldsymbol{r}_S^{(g)} = \boldsymbol{r}_S^{(h)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_0^{(g)} + \lambda_S \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}_0^{(h)} + \kappa_S \boldsymbol{w} \quad \Rightarrow \quad \lambda_S \boldsymbol{v} - \kappa_S \boldsymbol{w} = \boldsymbol{r}_0^{(h)} - \boldsymbol{r}_0^{(g)}. \qquad \textbf{(5.13)}$$

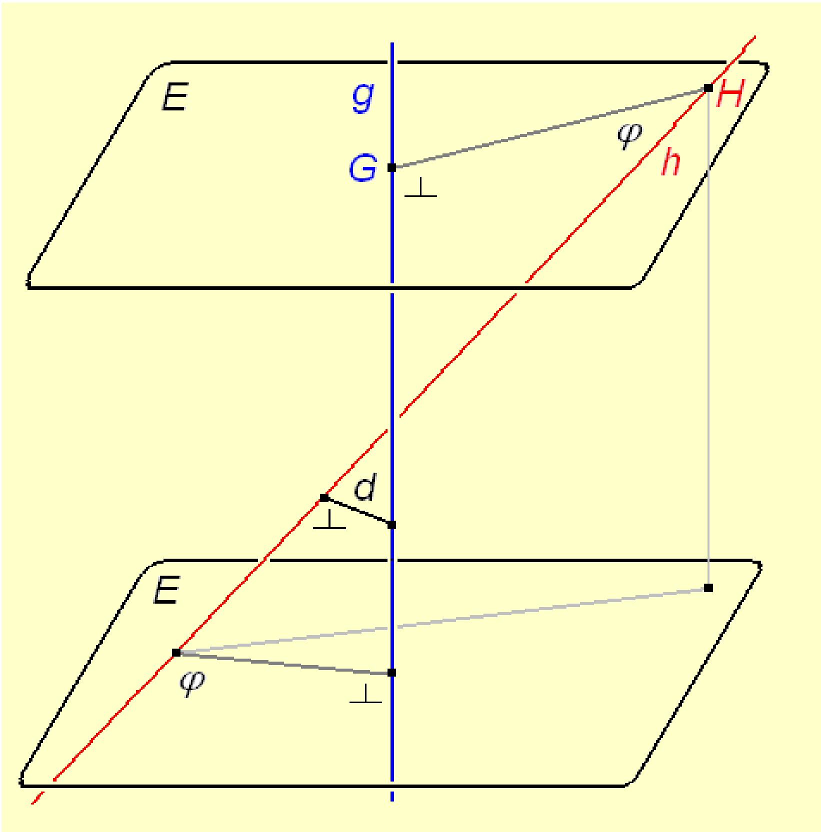
Aus zwei beliebigen der drei Komponentengleichungen können λ_S und κ_S bestimmt werden. (Zur Berechnung des Schnittpunkts genügt bereits eine der beiden Größen.) Wenn die Geraden einander schneiden, erfüllen λ_S und κ_S auch die dritte Gleichung.

Übung 5.4

Zwei Gerade g und h seien wie oben durch ihre Punkt-Richtungs-Gleichungen gegeben. Geben Sie die Bedingung dafür an, dass g und h einander schneiden. Was folgt daraus für die Komponenten von $\boldsymbol{r}_0^{(g)}$, $\boldsymbol{r}_0^{(h)}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$?

5.1.5 Abstand zweier windschiefer Geraden

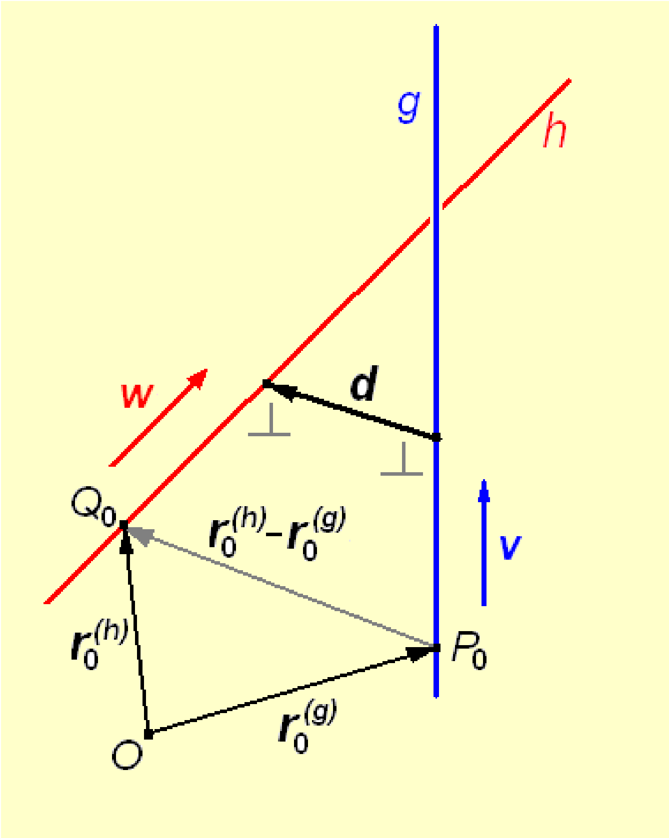
Windschiefe Geraden sind solche, die einander nicht schneiden und nicht parallel sind. Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden versteht man die kürzeste Entfernung zwischen einem Punkt der einen und einem Punkt der anderen Geraden.



Wir denken uns eine auf der Geraden g senkrechte Ebene E und verbinden den Schnittpunkt G der Geraden g mit E mit dem Schnittpunkt H der Geraden h mit E. Der Winkel zwischen GH und h sei φ. Wenn die Ebene E sich sehr weit nach oben bewegt, geht φ stetig gegen null, wenn sich E sehr weit nach unten bewegt, geht φ stetig gegen $\pi/2$. Folglich muss es dazwischen eine Position der Ebene E geben, in der φ ein rechter Winkel ist. Die Entfernung d der beiden Geraden an dieser Stelle ist »der Abstand der beiden Geraden«.

Übung 5.5

Vervollständigen Sie den Beweis, dass die Strecke d der kürzeste Abstand zwischen irgend zwei Punkten der beiden Geraden ist.



Der Vektor $\boldsymbol{d}$ bildet mit $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ in der Reihenfolge $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{d}$ ein Rechtssystem. Der zu $\boldsymbol{d}$ gehörige Einheitsvektor ist daher

$$\boldsymbol{d}_0 = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|}. \tag{5.14}$$

Der Vektor $\boldsymbol{d}$ ist die (rechtwinklige) Projektion des Vektors $\boldsymbol{r}_0^{(h)} - \boldsymbol{r}_0^{(g)}$ auf $\boldsymbol{d}_0$, also ist

$$d = \left| \boldsymbol{d}_0 \cdot \left(\boldsymbol{r}_0^{(h)} - \boldsymbol{r}_0^{(g)} \right) \right| = \frac{\left| (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \cdot \left(\boldsymbol{r}_0^{(h)} - \boldsymbol{r}_0^{(g)} \right) \right|}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|}. \tag{5.15}$$

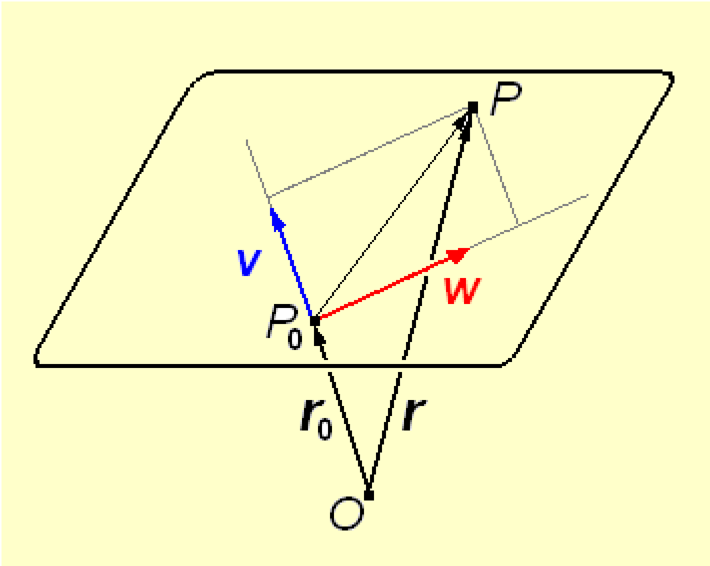
Die Betragszeichen im Zähler und im mittleren Term sind nötig, weil die Skalarprodukte negativ sein können.

5.2 Ebenen im Raum

Eine Ebene im Raum kann bestimmt werden

1. durch einen Punkt und zwei nicht parallele Vektoren
2. durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen,
3. durch einen Punkt und den Normalenvektor der Ebene (Punkt-Richtungs-Gleichung)

5.2.1 Ebene durch einen Punkt mit zwei Richtungsvektoren



Der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ eines Punktes P der Ebene lässt sich beschreiben durch

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \kappa \boldsymbol{v} + \lambda \boldsymbol{w}, \tag{5.16}$$

wobei κ und λ reelle Zahlen und $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ nicht parallel sind.

Zu einer parameterfreien Darstellung der Ebenengleichung gelangt man, wenn man die Tatsache nutzt, dass das von den drei in der Ebene liegenden Vektoren $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ aufgespannte Parallelepiped (Spat) das Volumen null hat und daher das Spatprodukt der drei Vektoren null ist:

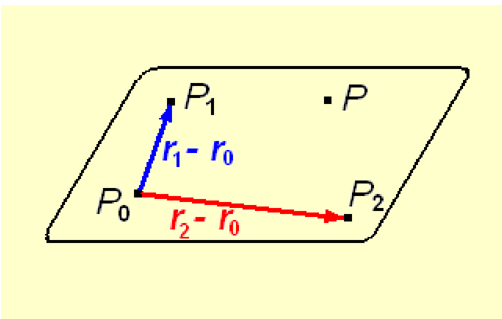
$$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = [(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}] = 0. \tag{5.17}$$

Diese Gleichung kann (siehe »Spatprodukt«) mit einer Determinante geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0. \tag{5.18}$$

5.2.2 Ebene durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen

Dieser Fall kann auf den vorgehenden zurückgeführt werden, indem man statt der Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ die Vektoren $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$ und. $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0$ benutzt.



sDie Ebenengleichung lautet dann

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \kappa(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) + \lambda(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0). \tag{5.19}$$

Eine parameterfreie Darstellung der Ebenengleichung erhält man analog zu oben:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \cdot \left[(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0) \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0)\right] = \left[(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0)\right] = 0. \tag{5.20}$$

Auch diese Gleichung kann mit einer Determinante geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.21}$$

Daraus kann die Gleichung der Ebene in der Standardform

$$ax + by + cz + d = 0.$$

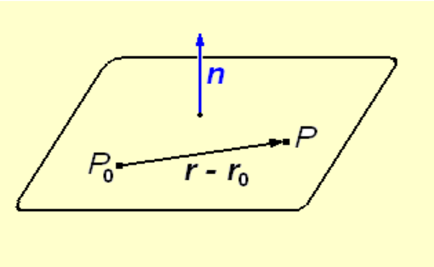
gewonnen werden.

Übung 5.6

Leiten Sie aus Gleichung (5.20) die Gleichung (5.21) her.

5.2.3 Punkt-Richtungs-Gleichung der Ebene

In diesem Fall ist ein Punkt P_0 der Ebene gegeben und ein auf der Ebene senkrecht stehender Vektor (Normalenvektor) $\boldsymbol{n}$.



Da $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{n}$ aufeinander senkrecht stehen, ist ihr Skalarprodukt null:

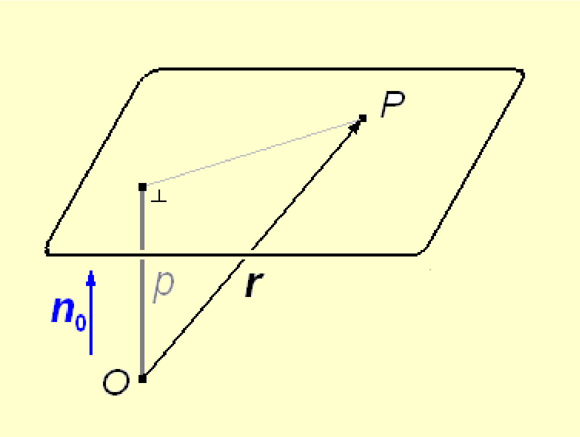
$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}_0. \tag{5.22}$$

Übung 5.7

Leiten Sie aus Gleichung (5.22) die Ebenengleichung in der Standardform her.

5.2.4 Die Hesse-Normalform der Ebenengleichung

In der Hesse-Normalform wird die Ebene beschrieben durch den Normalenvektor und ihren Abstand p vom Ursprung.



Die Projektion des Ortsvektors $\boldsymbol{r}$ von P auf den Einheitsvektor $\boldsymbol{n}_0$ hat den Größenwert p, also ist

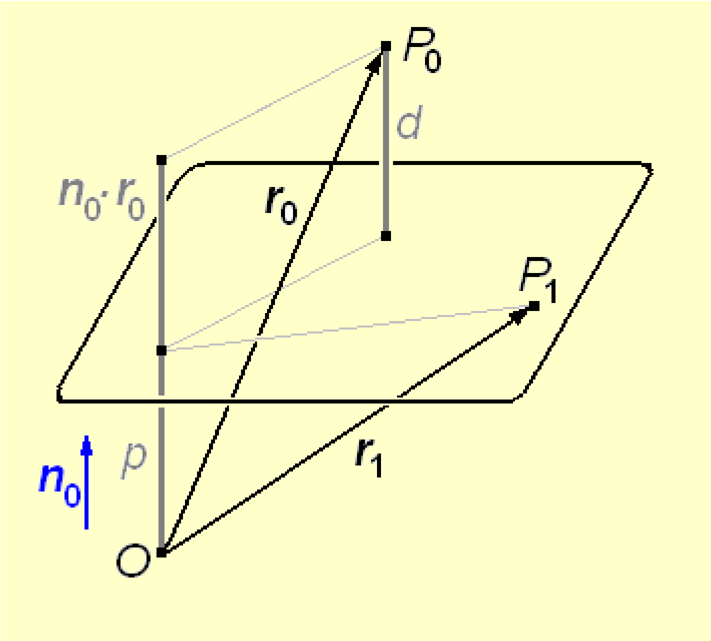
$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_0 = p. \tag{5.23}$$

Setzt man in den Komponentengleichungen jeweils $z = 0$, so kommt man leicht zur Hesse-Normalform einer Geraden in der XY-Ebene.

Übung 5.8

Geben Sie die Hesse-Normalform der Gleichung einer Ebene durch drei Punkte an, deren Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ sind ($i = 1, 2, 3$).

5.2.5 Abstand eines Punktes von einer Ebene



Wie die Abbildung zeigt, ist

$$d = \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r}_0 - p \quad \text{und} \quad p = \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r}_1 \quad \Rightarrow \quad d = \boldsymbol{n}_0(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1), \tag{5.24}$$

wobei $\boldsymbol{r}_1$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene ist.
Wenn P_0 und O auf verschiedenen Seiten der Ebene liegen, ist $d > 0$, anderenfalls ist $d < 0$.

5.2.6 Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene

Der Schnittpunkt ist am einfachsten zu finden, wenn man von der Punkt-Richtungs-Gleichung der Geraden g und der Hesse-Normalform der Ebene E ausgeht:

$$g: \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda \boldsymbol{v}, \qquad E: \quad \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r} = p.$$

Dann gilt für den Ortsvektor des Schnittpunkts S:

$$\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{r}_0 + \lambda_S \boldsymbol{v} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r}_S = p,$$

woraus folgt

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{r}_0 + \lambda_S \boldsymbol{v}) = p \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r}_0 + \lambda_S \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{v} = p$$

und schließlich

$$\lambda_S = \frac{p - \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r}_0}{\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{v}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{r}_0 + \frac{p - \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r}_0}{\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}. \tag{5.25}$$

5.2.7 Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

Der Winkel φ zwischen einer Geraden und einer Ebene ist definiert als der Winkel zwischen der Geraden und ihrer Projektion auf die Ebene. Daraus folgt, dass stets

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

ist. Berechnet wird φ am einfachsten über den Winkel ψ zwischen der Geraden (Richtungsvektor $\boldsymbol{v}$) und dem Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ der Ebene, wofür gilt: $\psi = \pi/2 - \varphi$. Wegen

$$\cos\psi = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}}{n v} = \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}|}{n v}.$$

Das Betrag-Zeichen ist notwendig, weil das Skalarprodukt $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}$ negativ sein kann, während φ ein spitzer oder rechter Winkel sein soll.

5.2.8 Schnittgerade zweier Ebenen

Aus den Ebenengleichungen in der Hesse-Normalform:

$$E_1: \quad \boldsymbol{n}_0^{(1)} \cdot \boldsymbol{r} = p_1, \qquad E_2: \quad \boldsymbol{n}_0^{(2)} \cdot \boldsymbol{r} = p_2$$

folgt für den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ eines Punktes der Schnittgeraden:

$$\boldsymbol{r} \cdot \left(\boldsymbol{n}_0^{(2)} - \boldsymbol{n}_0^{(1)} \right) = p_2 - p_1. \tag{5.26}$$

5.2.9 Winkel zwischen zwei Ebenen

Der Winkel φ zwischen zwei Ebenen ist definiert als der kleinere der beiden Winkel, den ihre (nicht gerichteten) Flächennormalen bilden, wenn sie zum Schnitt gebracht werden. Demnach ist stets

$$\varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Wenn die Ebenen wieder wie oben definiert sind, ist

$$\varphi = \arccos\left|\boldsymbol{n}_0^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}_0^{(2)}\right| = \arccos\frac{\boldsymbol{n}^{(1)} \cdot \boldsymbol{n}^{(2)}}{n^{(1)} n^{(2)}}. \tag{5.27}$$

6 Wiederholungsaufgaben

6.1 Beweisen Sie grafisch: Jeder Vektor $\boldsymbol{v}$ kann in eine Komponente $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}}$ parallel zu einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{u}$ und in eine dazu senkrechte Komponente zerlegt werden:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}}^{\perp}.$$

6.2 Berechnen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts den Vektor $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}}$ und dann die dazu senkrechte Vektorkomponente.

6.3 Zeigen Sie graphisch, dass ($\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{v}$) x $\boldsymbol{w}$ ein Vektor ist, der in der Ebene von $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ liegt.

6.4 Drei Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ seien linear abhängig, d. h. es ist

$$\boldsymbol{w} = a\,\boldsymbol{u} + b\,\boldsymbol{v},$$

wobei a und b reelle Zahlen sind.

Zeigen Sie, dass die drei Vektoren in einer Ebene liegen.

6.5 Zeigen Sie: Es ist

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} \neq 0,$$

wenn die drei Vektoren linear unabhängig sind.

6.6 Beweisen Sie: Wenn $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ linear unabhängig sind, dann sind auch die Vektoren

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}$$

linear unabhängig.

6.7 Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e} - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{e}) \times \boldsymbol{e}$$

ist, wobei $\boldsymbol{e}$ ein beliebiger Einheitsvektor ist.

6.8 Eine Aufgabe für zuverlässige und ausdauernde Rechner:

Jede Vektorgleichung ist äquivalent mit drei skalaren Gleichungen. Schreiben Sie die drei skalaren Gleichungen an, die der Vektorgleichung

$$k\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b},$$

entsprechen, wobei k ein Skalar ist und $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ konstante Vektoren sind.

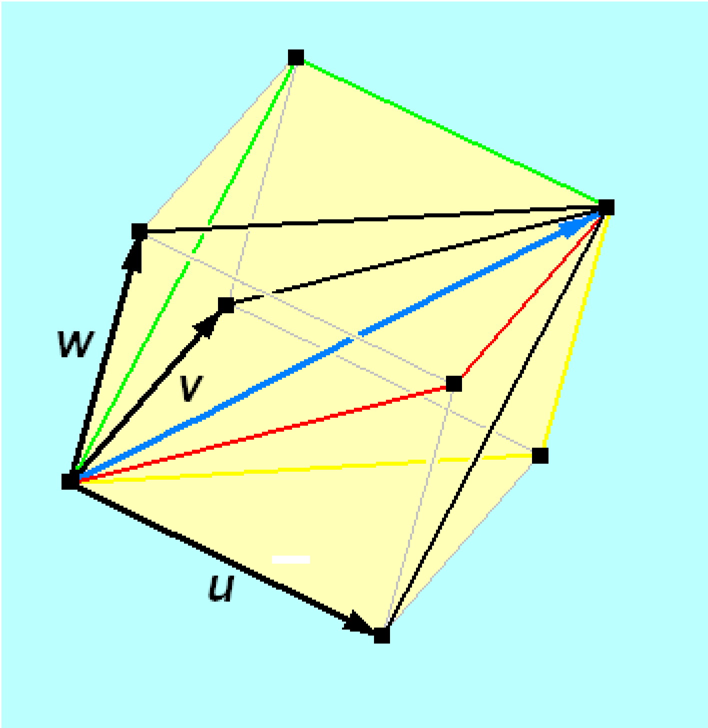
Lösen Sie diese drei Gleichungen nach v_1, v_2, und v_3 auf.

Zeigen Sie dann, dass die Lösung durch folgende Vektorgleichung beschrieben werden kann:

$$\boldsymbol{v} = \frac{k^2\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{k\left(k^2 + \boldsymbol{a}^2\right)}.$$

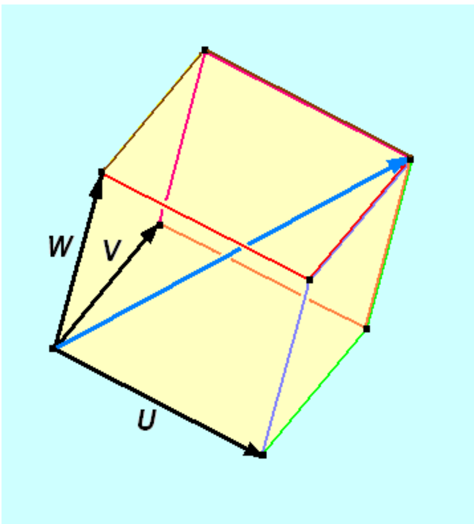
7 Lösungen

Übung 2.1



Die drei Vektoren spannen ein Parallelepiped (Spat) auf, dessen blaue Raumdiagonale die Summe der drei Vektoren ist. Die Summe zweier Vektoren ist eine der drei Flächendiagonalen. Die Abbildung zeigt, dass es beliebig ist, welche Vektoren zuerst addiert werden. Also ist

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{v}.$$



In dieser Abbildung werden die Vektoren durch Aneinanderheften addiert. Es gibt sechs verschiedene Wege, die vom Fußpunkt aus entlang den Seiten des Spates zur gegenüberliegenden Ecke führen.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})+\boldsymbol{w} \\ &= (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u})+\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{u}.\end{aligned}$$

Übung 2.2

Bei der Summe von 4 Vektoren kann man die ersten drei zu einer Summe zusammenfassen:

$$\boldsymbol{t}+\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{t}+\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}.$$

Die Reihenfolge der Additionen in der Klammer ist nach Gleichung (2.1) beliebig. Man kann aber auch zuerst die letzten drei Vektoren zuerst zusammenfassen:

$$\boldsymbol{t}+\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{t}+(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}).$$

Wieder ist die Reihenfolge der Additionen in der Klammer beliebig. So ergeben sich insgesamt 24 verschiedene Möglichkeiten, die alle gleichwertig sind.

Übung 2.3

$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ ist ein zu $\boldsymbol{w}$ paralleler Vektor $\boldsymbol{t}$ mit dem Betrag

$$\boldsymbol{t} = uv\cos(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} = uvw\cos(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

Das Produkt $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})$ dagegen ist ein zu $\boldsymbol{u}$ paralleler Vektor. Es ist also

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) \neq (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}.$$

Übung 2.4

Die Projektion des Vektors $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ auf den Vektor $\boldsymbol{w}$ ist gleich der Summe der Projektionen von $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{u}$ auf $\boldsymbol{w}$.

Übung 2.5

Setzt man $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{s}$, so wird

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{s}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{t} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{t}.$$

Ferner wird

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}+(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{t} \;\text{ usw.}$$

Übung 2.6

Die zu $\boldsymbol{w}$ parallele Komponente von $\boldsymbol{v}$ ist die Projektion $\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{w}}$ von $\boldsymbol{v}$ auf $\boldsymbol{w}$.

$$\boldsymbol{v}_{\parallel} = \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{w}} = \frac{v\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})}{w}\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{w^2}\boldsymbol{w}.$$

Die auf $\boldsymbol{w}$ senkrechte Komponente ist

$$\boldsymbol{v}_\perp = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\parallel = \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{w^2}\boldsymbol{w}.$$

Übung 2.7:

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w},$$
$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{s} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{t},$$
$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{w} + \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{t} \quad \text{usw.}$$

Übung 4.1

$$u_i = v_i + w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$
$$u = \sqrt{(v_1+w_1)^2 + (v_2+w_2)^2 + (v_3+w_3)^2},$$
$$\cos\varphi_i = \frac{v_i + w_i}{u}.$$

Übung 4.2

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{v\,w} = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\sqrt{\sum_1^3 v_i^2 \cdot \sum_1^3 w_i^2}}.$$

Übung 4.3

1. $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 1$,

2. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (-13, 5, 1)$,

3. $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 21$,

4. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (-2, -11, 8)$,

5. $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = (1, -2, 23)$.

Übung 5.1

1. Aus

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda\boldsymbol{v}$$

folgt

$$\boldsymbol{r} = (-2,\ 5,\ 3) + \lambda(6,\ 4,\ 2).$$

Die Komponenten von $\boldsymbol{r}$ sind:

$$x = -2 + 6\lambda, \quad y = 5 + 4\lambda, \quad z = 3 + 2\lambda.$$

2. Aus

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{v}=0$$

folgt

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\kappa\boldsymbol{v}$$

und für die Komponenten

$$x-x_0=\kappa v_x, \quad y-y_0=\kappa v_y, \quad z-z_0=\kappa v_z,$$

also

$$x=-2+6\kappa, \quad y=5+4\kappa, \quad z=3+2\kappa.$$

Übung 5.2

Aus

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=0 \quad\Rightarrow\quad (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)=\kappa(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$$

und daraus für die Komponenten

$$x-x_1=\kappa(x_2-x_1) \quad \text{usw.}$$

und schließlich

$$x=4-7\kappa, \quad y=2-3\kappa, \quad z=5+\kappa.$$

Übung 5.3

Die Bedingung lautet

$$(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\times(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1)=0 \quad\Rightarrow\quad (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\kappa(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1).$$

Für die Komponenten ergibt sich daraus

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}.$$

Übung 5.4

Wenn die beiden Geraden einander schneiden sollen, muss es genau ein Wertepaar (λ, κ) geben, sodass

$$\lambda\boldsymbol{v}-\kappa\boldsymbol{w}=\boldsymbol{r}_0^{(h)}-\boldsymbol{r}_0^{(g)}=:\boldsymbol{u}$$

ist, wobei $\boldsymbol{u}$ nur eine Abkürzung für die davor stehende Differenz ist. Bezeichnen wir die Komponenten der drei Vektoren $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{u}$ (zur Abwechslung) mit v_i, w_i und u_i (i = 1, 2, 3), so muss sein

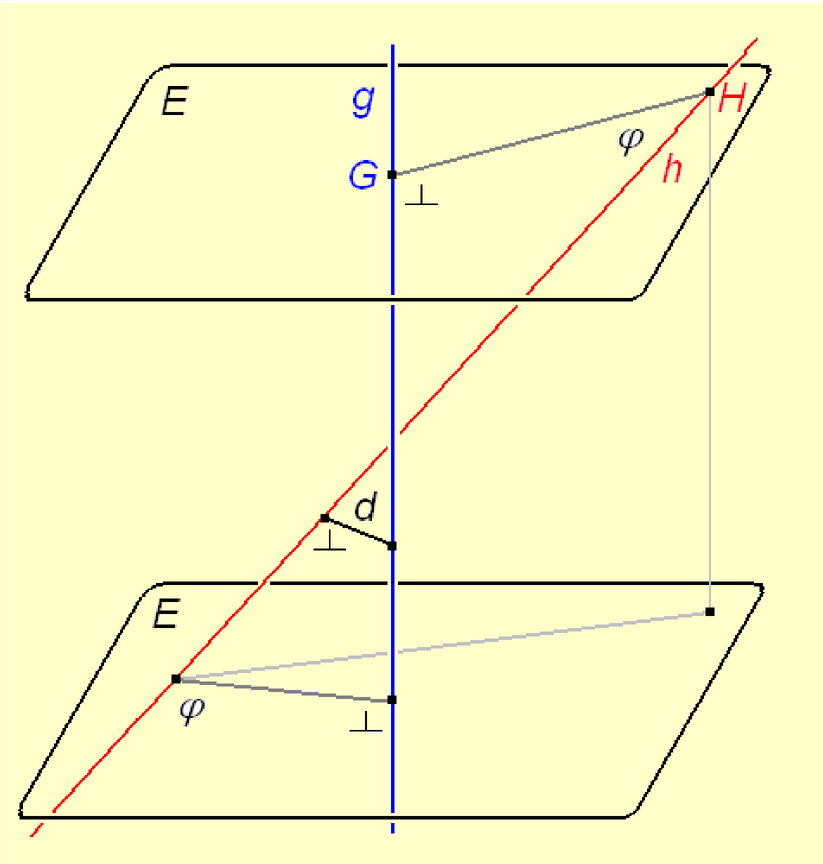
$$\lambda v_i-\kappa w_i=u_i.$$

Daraus ergeben sich drei Bestimmungsgleichungen für κ und λ. Das Gleichungssystem ist also »überbestimmt«. Es hat nur dann Bestand (d. h. die zwei Geraden schneiden einander nur dann), wenn die aus zwei der drei Gleichungen ermittelten Werte für κ und λ auch der dritten Gleichung genügen. Wenn man die Berechnung durchführt, zeigt sich, dass die Geraden nur dann einander schneiden, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Übung 5.5

1. Betrachten wir einen beliebigen Punkt H auf der Geraden h (siehe Abb.). Von allen Punkten der Geraden g liegt derjenige Punkt G dem Punkt H am nächsten, für den GH senkrecht zu g ist. (Jeder andere Punkt P bildet mit G und H ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse PH größer als GH ist.)



2. Vertauschen wir jetzt die Rollen der Geraden, indem wir Ebenen einführen, die auf h senkrecht stehen. Dann finden wir analog, dass von allen Punkten H auf der Geraden h derjenige Punkt G auf g der Geraden h am nächsten liegt, für den GH senkrecht auf h steht.

3. Daraus folgt: Der kürzeste Strecke zwischen einem Punkt der Geraden g und einem Punkt der Geraden h muss sowohl auf g als auch auf h senkrecht stehen.

Übung 5.6

Die Komponentendarstellung des ersten Faktor ist:

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\left(x-x_0\right)\boldsymbol{e}_1+\left(y-y_0\right)\boldsymbol{e}_2+\left(z-z_0\right)\boldsymbol{e}_3.$$

Den zweiten Faktor schreiben wir als Determinante:

$$\left(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0\right)\times\left(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{vmatrix}.$$

Bei Bildung des Skalarprodukts werden die gleichnamigen Komponenten multipliziert und die Produkte addiert. Der erste Summand ist

$$\left(x-x_0\right)\boldsymbol{e}_1\cdot\left(y_2z_3-y_3z_2\right)\boldsymbol{e}_2=\left(x-x_0\right)\left(y_2z_3-y_3z_2\right).$$

Die anderen beiden Summanden ergeben sich analog. Die Summe kann dann durch die Determinante in Gleichung 5.21 beschrieben werden.

Übung 5.7

Bezeichnen wir die skalaren Komponenten des Vektors $\boldsymbol{n}$ mit n_1, n_2, n_3, so folgt aus

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}_0\\ n_1x+n_2y+n_3z&=n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0.\end{aligned}$$

Übung 5.8

Es ist

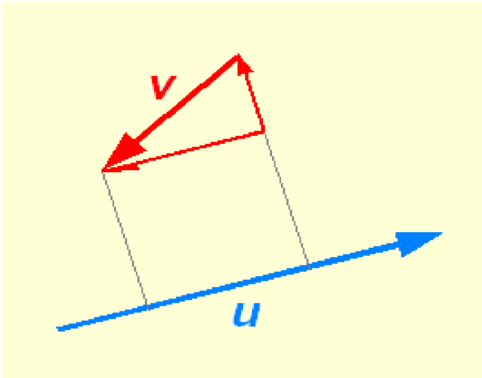
$$\boldsymbol{n}_0=\frac{\left(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right)\times\left(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1\right)}{\left|\left(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right)\times\left(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1\right)\right|}\quad\text{und}\quad\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{r}_1=p.$$

Also lautet die Hesse-Normalform der Ebene:

$$\boldsymbol{r}\cdot\frac{\left(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right)\times\left(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1\right)}{\left|\left(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right)\times\left(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1\right)\right|}=\boldsymbol{r}_1\cdot\frac{\left(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right)\times\left(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1\right)}{\left|\left(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1\right)\times\left(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1\right)\right|}.$$

Lösungen der Wiederholungsaufgaben

6.1



6.2 Es ist

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = uv\cos\varphi = u\,v_u \quad\Rightarrow\quad v_u = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{u},$$

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}} = v_u\frac{\boldsymbol{u}}{u} = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{u^2}\boldsymbol{u}.$$

Daraus ergibt sich

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}}^{\perp} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{u^2}\boldsymbol{u}.$$

6.3 ***u*** x ***v*** ist ein Vektor ***t***, der auf der von ***u*** und ***v*** aufgespannten Ebene (und damit auch auf ***u*** und ***v***) senkrecht steht. Der Vektor (***u*** x ***v***) x ***w*** wiederum ist ein Vektor, der auf ***t*** senkrecht steht. Alle auf ***t*** senkrechten Vektoren liegen in der auf ***t*** senkrechten Ebene und damit in der von ***u*** und ***v*** aufgespannten Ebene.

6.4 Aus

$$\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} \quad\Rightarrow\quad a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = 0.$$

Die drei Vektoren *a**u***, *b**v*** und -***w*** bilden einen geschlossenen Linienzug, ein Dreieck, auf dessen Seiten auch die Vektoren ***u*** und ***v*** liegen.

6.5 Der Vektor ***u*** x ***v*** steht auf der Ebene von ***u*** und ***v*** senkrecht. Wenn ***w*** nicht sin dieser Ebene liegt, ist das betrachtete Skalarprodukt ungleich null.

6.6 Wenn ***u***, ***v*** und ***w*** linear unabhängig sind, dann spannen die Vektorpaare (***u***, ***v***), (***v***, ***w***) und (***w***, ***u***) drei verschiedene Ebenen auf. Von diesen stehen jeweils die Vektoren ***r***, ***s*** und ***t*** senkrecht. Sie können daher nicht in derselben Ebene liegen und sind folglich linear unabhängig.

6.7 Nach dem Entwicklungssatz ist

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e})\times\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} - (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} - \boldsymbol{v},$$

woraus durch Auflösen nach ***v*** die gegebene Gleichung folgt.

6.8 Die drei äquivalenten skalaren Gleichungen lauten

$$kv_1 + v_2 a_3 - v_3 a_2 = b_1,$$
$$kv_2 + v_3 a_1 - v_1 a_3 = b_2,$$
$$kv_3 + v_1 a_2 - v_2 a_1 = b_3.$$

Daraus ergibt sich

$$v_1 = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)(k^2 + a_1^2) + (a_1 b_3 - k b_2)(a_1 a_3 + k a_2)}{(k a_1 - a_2 a_3)(k^2 + a_1^2) + (k a_3 + a_1 a_2)(a_1 a_3 + k a_2)}$$

und nach einigen Umformungen

$$v_1 = \frac{a_1(k^2 b_1 + a_1(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) - k(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})_1)}{a_1 k(k^2 + a^2)} = \frac{k^2 b_1 + a_1(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) - k(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})_1}{k(k^2 + a^2)},$$

wobei $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})_1$ die erste Komponente des Vektorprodukts ist.

Durch einen einfachen Analogieschluss findet man

$$v_2 = \frac{k^2 b_2 + a_2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) - k(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})_2}{k(k^2 + a^2)},$$
$$v_3 = \frac{k^2 b_3 + a_3(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) - k(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})_3}{k(k^2 + a^2)}.$$

Diese drei skalaren Gleichungen lassen sich durch eine Vektorgleichung darstellen, die gleich der gegebenen ist.

Anhang 1: Multiplikation eines Vektors mit einer komplexen Zahl

Ein Vektor $\boldsymbol{v}$ soll mit einer komplexen Zahl $a + b\mathrm{i}$ multipliziert werden:

$$(a + b\,\mathrm{i})\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{v} = (a + b\,\mathrm{i})(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3) = a\,x\boldsymbol{e}_1 + a\,y\boldsymbol{e}_2 + a\,z\boldsymbol{e}_3 + b\,x\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_1 + b\,y\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_2 + b\,z\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_3$$

Das Ergebnis ist ein sechsdimensionaler Vektor mit drei reellen und drei imaginären Komponenten und den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ und $\mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_1, \mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_2, \mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_3$. Für die Skalarprodukte der letzteren gilt

$$\mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_i \cdot \mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_k = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ -1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

Die imaginären Einheitsvektoren stehen also – genau wie ihre reellen Gegenstücke – paarweise aufeinander senkrecht. Für die Produkte aus einem reellen und einem imaginären Basisvektor dagegen gilt

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \mathrm{i}\,\boldsymbol{e}_k = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ \mathrm{i} & \text{für } i = k \end{cases}$$

In dieser reell/imaginären Paarung stehen also die Basisvektoren mit ungleichen Indizes aufeinander senkrecht, während die mit gleichen Indizes im sechsdimensionalen Raum parallel sind.

Übung: Untersuchen Sie die Vektorprodukte der Basisvektoren.